

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : «signal, image, parole, télécoms»

préparée au Laboratoire des Images et des Signaux de Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale «**Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal**»

présentée et soutenue publiquement

par

Nicolas LE BIHAN

le 22 octobre 2001

Titre :

**TRAITEMENT ALGEBRIQUE DES SIGNAUX VECTORIELS
APPLICATION EN SEPARATION D'ONDES SISMIQUES**

Directeur de thèse : Jérôme MARS

JURY

Madame M. Basseville , Président
Monsieur S. Bourennane , Rapporteur
Monsieur P. Comon , Rapporteur
Monsieur P. Duvaut , Examineur
Monsieur S.J. Sangwine , Examineur
Monsieur J. Meunier , Invité
Monsieur J. Mars , Directeur de thèse
Monsieur F. Glangeaud , Co-directeur de thèse

Remerciements

Je remercie tout d'abord MM. J.-L. Lacoume et J.-M. Chassery pour m'avoir successivement accueilli au LIS.

Je tiens à remercier les membres du jury :

- Mme Michèle Basseville, pour avoir accepté de présider ce jury.
- M. Salah Bourennane et M. Pierre Comon, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de mon travail.
- M. Patrick Duvaut et M. Stephen J. Sangwine, pour avoir tous les deux traversé des océans pour participer à la soutenance, ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux de thèse.
- M. Julien Meunier pour avoir apporté son jugement de praticien sur mes travaux.
- Le duo d'encadrants complémentaires qui m'a donné l'envie de faire de la recherche et qui m'a fait confiance pendant ces trois années : M. Jérôme Mars et M. François Glangeaud. Je leur suis reconnaissant de m'avoir soutenu dans le travail et surtout lors des nombreux évènements extra-thèse...

Je tiens également à remercier M. Jean-louis Lacoume pour sa disponibilité, ses conseils et sa passion communicative.

Enfin, une thèse ne s'écrit pas tout seul, et il me faut remercier les thésards avec qui j'ai cohabité pendant ces trois années, et tout particulièrement :

- Pierre, le **kenseurt auvernat** (également connu sous le nom de **binioù gwaz**), pour un peu tout et parce qu'il reste sans doute le meilleur **paotr-ar-pal** que le laboratoire aie jamais connu. . .
- Mac-Alpine, le **kargedoul** de service, parce qu'il est le seul à ne pas avoir une réponse unique à la première question que pose un breton à un inconnu : «T'es d'où toi?»
- Cédric, le **drouiz barzh**, parce que sans lui on se laisserait tous un peu aller à faire les choses à moitié.
- Ali, le **lagad du**, pour sa cuisine, son amitié et les cours de Perse.
- Seb, le **bidourik divalis**, qui reste la voix contestataire du bureau. Pour sa "fight" légendaire. . .
- Stéphane, le **lavarer kaer**, pour sa verve inextinguible et ses circonvolutions empha-

tiques.

- Steeve, le **marc'h-houarn dre dan**, car avec lui on pousse toujours un peu plus loin. . .
- Antoine, le **skilfeg**, pour son flegme et ses flocons d'avoine, toujours **gant plijadur**.
- Cyrille, **lou provencalou**, pour ses incursions en pays gallo et parce qu'il est le seul à connaître par cœur la table de 51.
- Patrick, le **brizhellader**, pour sa disponibilité colorisée et sa vitesse de pointe sur l'aile droite.
- et bien sûr tous les autres . . .

Un grand merci également à Bidou, le **pen bouteg**, pour son sens critique et les verres de vin, à Jocelyn, le seul **tan skopañ** du labo, et à Bernard, alias **gwenn barv**, le mentor de tous les thésards. Et encore une fois à Jérôme, le **skeul braz**, parce qu'il est bien plus qu'un directeur de thèse, et à François (incroyable, je ne l'ai pas appelé "Monsieur Glangeaud" !! . . .), le **kelenner meur**, pour son originalité et sa gentillesse, et parce qu'il est un peu **pen kalet**.

Merci aux informaticiens Hervé et Matthieu pour leur disponibilité et leur patience, à tous les membres de l'équipe de foot du LIS pour tous les moments inoubliables passés sur le terrain. Bonne route (mais allez-y tranquille. . .) à tous mes coéquipiers du RAID (non maman, je ne suis pas rentré dans la police).

Merci à mes parents qui m'ont toujours soutenu et m'ont permis d'arriver là.

Et par dessus tout, je tiens à saluer la patience de Fabienne et Tanguy, **ma daou kared**, qui ont supporté mes états plus ou moins supportables lors de la rédaction de ce manuscrit. Je ne serais jamais arrivé au bout sans eux... merci pour leur tendresse et leurs sourires.

Trugarez vraz ha kenavo digadao

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	3
1 Ondes et signaux sismiques multicomposantes	7
1.1 Acquisition sismique	8
1.1.1 Principe	8
1.1.2 Les sources sismiques	10
1.1.3 Les capteurs sismiques	12
1.1.4 Enregistrements sismiques multicomposantes (2C/3C/4C)	12
1.1.5 Enregistrements sismiques multidimensionnels (2D/3D/4D)	14
1.2 Les ondes sismiques	15
1.2.1 Propagation des ondes sismiques : équation d'ondes	15
1.2.2 La polarisation des ondes sismiques	16
1.2.3 Les ondes de volume	17
1.2.4 Les ondes de surface et les ondes guidées	18
1.2.5 Dispersion et ondes guidées	19
1.2.6 Comportement des ondes sismiques aux interfaces	19
1.3 Modélisation des signaux sismiques polarisés et multidimensionnels	21
1.4 Conclusion	26
2 Outils d'algèbre linéaire et multilinéaire	27
2.1 Rappels d'algèbre linéaire	28
2.1.1 Espace de Hilbert	28
2.1.2 La décomposition en valeurs singulières (SVD)	29
2.1.3 Approximation de rang r d'une matrice	29
2.1.4 Sous-espaces vectoriels et SVD	30
2.2 Éléments d'algèbre multilinéaire	31
2.2.1 Tableaux multidimensionnels et espace de Hilbert	32
2.2.2 Opérations sur les tableaux de données multidimensionnels	32
2.3 NDSVD : généralisation de la décomposition en valeurs singulières aux tableaux multidimensionnels	35

2.3.1	Les modèles de décomposition des tableaux multidimensionnels	35
2.3.2	<i>NDSVD</i>	36
2.3.3	Cas particulier des tableaux 3D : la 3DSVD	37
2.3.4	Estimation de la 3DSVD d'un tableau	38
2.3.5	Approximation de $\text{rang}(r_1, r_2, \dots, r_N)$	39
2.3.6	Sous-espaces vectoriels trimodaux et 3DSVD	39
2.4	Conclusion	42
3	Séparation d'ondes sismiques multicomposantes	43
3.1	Traitements 2D en séparation d'ondes sismiques	44
3.1.1	Séparation d'ondes par SVD	45
3.1.2	Simulations	47
3.1.3	SVD par polarisation sur sections sismiques multicomposantes	54
3.2	Séparation d'ondes sismiques polarisées par méthode de sous-espaces trimodaux (application de la 3DSVD)	55
3.2.1	Modélisation du problème	55
3.2.2	Base propre du tableau de données	56
3.2.3	Traitement par long-vecteurs ou par tableaux 3D ?	57
3.2.4	Sous-espaces et projecteurs	58
3.2.5	Approche par sous-tableaux : lissage multimodal	60
3.2.6	Simulations	61
3.2.7	Comparaison des résultats obtenus par SVD et 3DSVD	71
3.3	Conclusion	74
4	Quaternions et traitement des signaux vectoriels	77
4.1	Les quaternions	78
4.1.1	Opérations élémentaires	79
4.1.2	Relation entre les quaternions et les nombres complexes	80
4.1.3	Notations pour les quaternions	80
4.2	Représentation quaternionique des signaux vectoriels	82
4.2.1	Dispositif d'enregistrement et algèbre associée	82
4.2.2	Espace de Hilbert sur le corps des quaternions	83
4.2.3	Grandeurs caractéristiques des signaux vectoriels	84
4.2.4	Transformée de Fourier quaternionique	87
4.3	Méthode de séparation d'ondes par sous-espace pour les sections sismiques vectorielles	88
4.3.1	SVD d'une matrice complexe	89
4.3.2	Méthode de séparation par sous-espaces pour les signaux vectoriels 2D	89
4.3.3	SVD quaternionique (SVDQ)	91
4.3.4	Méthode de séparation par sous-espaces pour les signaux vectoriels 3D ou 4D	94

4.3.5	SVDQ ou 3DSVD?	98
4.4	Conclusion	99
5	Applications sur signaux réels	101
5.1	Données de type OBC en environnement petits fonds	102
5.2	Données de sismique réflexion 3D	107
5.3	Conclusion	110
	Conclusion et perspectives	113
	Annexes	119
A	Extension de la matrice spectrale pour les signaux vectoriels	119
A.1	La matrice spectrale	119
A.2	Généralisation de la matrice spectrale aux données multicomposantes	123
A.2.1	Le tableau spectral	124
A.2.2	Décomposition en éléments propres du tableau spectral	124
A.2.3	Projecteurs et sous-espaces	125
	Bibliographie	127

Notations

\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{C}	Ensemble des complexes
\mathbb{H}	Ensemble des quaternions
\mathbb{R}^n	Espace vectoriel des vecteurs réels de taille n
\mathbb{C}^n	Espace vectoriel des vecteurs complexes de taille n
\mathbb{H}^n	Espace vectoriel des vecteurs quaternioniques de taille n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times m$ (n lignes et m colonnes)
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Espace vectoriel des matrices complexes de taille $n \times m$
$\mathbb{H}^{n \times m}$	Espace vectoriel des matrices quaternioniques de taille $n \times m$
$\mathbb{R}^{n \times m \times p}$	Espace vectoriel des tableaux réels de taille $n \times m \times p$
a	scalaire
\underline{a}, \vec{a}	vecteur
\mathbf{A}	matrice
\mathcal{A}	tableau de dimension supérieure à 2
$\mathbf{A}_{(i)}$	matrice dépliant de \mathcal{A} suivant le mode i
\cdot	produit intérieur
\circ	produit extérieur
\otimes	produit de Kronecker
\oplus	somme directe d'espaces vectoriels
\times_n	produit n -modal ou n -mode produit
$\text{rang}_n(\cdot)$	n -mode rang d'un tableau n -dimensionnel
$\text{rang}(\cdot)$	rang d'une matrice
$\text{tr}(\cdot)$	trace d'une matrice (somme des valeurs propres de la matrice)
$\text{Range}(\cdot)$	noyau d'une matrice
$\text{Null}(\cdot)$	sous-espace nul d'une matrice
$P_j^{\mathbf{A}_{(i)}}$	$j^{\text{ème}}$ projecteur de la matrice dépliant $\mathbf{A}_{(i)}$
$s.e.v.$	sous-espace vectoriel
\cdot^T	opérateur transposition
\cdot^H	opérateur transposition-conjugaison complexe
\Re	partie réelle
\Im	partie imaginaire
\bar{x}	conjugué de x (complexe ou quaternion)

Introduction

L'enregistrement et l'analyse des signaux sismiques et sismologiques est une pratique très ancienne entreprise dès le XI^{ème} siècle par les chinois qui construisirent le premier sismographe. Depuis, les techniques d'écoute des vibrations de la terre et de recherche des richesses minérales qu'elle renferme n'ont cessé de se diversifier et se moderniser. La localisation et la caractérisation des gisements d'hydrocarbures (de gaz naturel ou de pétrole) a depuis longtemps fait appel aux mathématiques pour extraire l'information contenue dans les enregistrements de sondage du sous-sol pratiqués par les géophysiciens. La physique des ondes élastiques associée au traitement du signal ont permis aux géophysiciens de relier la réponse des capteurs sismiques, aux structures composant la subsurface de la croûte terrestre. L'interprétation des enregistrements à l'aide des outils de traitement du signal, permet d'affiner la caractérisation des réservoirs naturels, et d'optimiser l'exploitation des gisements qu'ils renferment.

Lors d'un sondage sismique, les vibrations de la terre au passage des ondes élastiques peuvent être orientées dans plusieurs directions de l'espace, révélant la nature des ondes produisant ces vibrations du sol. Pour mesurer les mouvements du terrain, les géophysiciens utilisent des capteurs directionnels, permettant d'enregistrer le mouvement du sous-sol suivant un axe prédéfini. Ces capteurs, dénommés *géophones* sont en général groupés en triades, chacun d'eux enregistrant le mouvement dans une des trois directions de l'espace. Ce dispositif permet également de mesurer une caractéristique importante des ondes sismiques : la polarisation. Un capteur sismique composé de trois géophones est dénommé *triphone*, et est qualifié de *multicomposante*. Cette dernière appellation découle du fait que chacun des trois géophones de ces capteurs *multicomposante* est considéré comme une *composante* du capteur. Du fait de la directivité des géophones, et comme ils sont en général placés de façon à former un trièdre, nous qualifierons ces capteurs de *vectoriels*, et leurs enregistrements de *signaux vectoriels*. Le supplément d'information qu'apportent les capteurs *multicomposantes* (ou *vectoriels*) dans l'étude des ondes sismiques se traduit par un accroissement du volume de données à traiter par l'interpréteur d'enregistrements sismiques.

L'objectif de ce travail de thèse est de développer des méthodes de traitement de ces signaux *vectoriels*, et plus particulièrement des méthodes de séparation d'ondes dédiées à l'étude de ces signaux. L'étape de séparation d'ondes est importante en sismique car elle permet d'améliorer la lisibilité des enregistrements et d'aider à l'interprétation. La spécificité des signaux vectoriels fait que les techniques classiques de traitement du signal ne leurs sont

pas adaptées car elles n'exploitent pas toute la richesse d'informations qu'ils renferment.

Dans le premier chapitre, nous présentons une introduction aux techniques d'acquisition des signaux sismiques scalaires et vectoriels, et introduisons quelques éléments de la physique des ondes élastiques. Une présentation sommaire des propriétés des ondes sismiques recueillies sur les réseaux de capteurs vectoriels est ensuite proposée. La fin du premier chapitre consiste en une présentation de la modélisation mathématique des signaux vectoriels et de leur stockage. Nous introduisons alors le concept de stockage de ces signaux dans des tableaux tridimensionnels. Ce conditionnement permettra l'introduction de techniques de traitement particulièrement bien adaptées aux signaux *multicomposantes*.

Les techniques de séparation d'ondes que nous proposons sont basées sur des outils d'algèbre linéaire et multilinéaire. Nous présentons ces outils dans le second chapitre, en introduisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour les matrices et son équivalent pour les tableaux tridimensionnels (3DSVD). Nous définissons également les notions de sous-espaces vectoriels pour les matrices et les tableaux.

Après avoir défini les outils mathématiques nécessaires, nous indiquons comment l'algèbre linéaire et multilinéaire permettent de réaliser la séparation d'ondes sismiques directement sur les données enregistrées. Dans le troisième chapitre, nous montrons comment la SVD permet de développer une méthode de séparation par sous-espaces sur les enregistrements sismiques scalaires. À l'aide de simulations, nous présentons les potentialités et les limitations de la méthode. Nous proposons ensuite une nouvelle technique de traitement des signaux multicomposantes. L'extension de la SVD aux tableaux tridimensionnels nous permet de développer une méthode de séparation par sous-espaces trimodaux particulièrement bien adaptée aux signaux multicomposantes. Nous présentons des simulations et montrons comment ce traitement tient compte, de façon simultanée, de l'information présente sur toutes les composantes des capteurs vectoriels. Nous montrons également comment la méthode proposée améliore les résultats de séparation d'ondes par rapport à une approche basée sur le traitement des composantes de façon indépendante.

Le chapitre 4 présente une approche différente des signaux vectoriels. Nous introduisons, une nouvelle façon d'appréhender les signaux multicomposantes, basée sur l'utilisation des quaternions¹. Nous étendons la représentation des signaux vectoriels 2D à l'aide des nombres complexes aux signaux vectoriels 3D et 4D à l'aide des quaternions. Après la définition de quantités permettant de caractériser physiquement ces signaux (moyenne, énergie), nous présentons les concepts de corrélation et de transformée de Fourier quaternionique. À la suite de cette présentation des signaux quaternioniques, nous développons des concepts d'algèbre sur le corps des quaternions, particulièrement la décomposition en valeurs singulières des matrices à valeurs quaternioniques (SVDQ). Finalement, nous proposons une méthode de séparation d'ondes par sous-espaces basée sur la SVDQ et présentons quelques simulations illustrant sa facilité d'utilisation et ses performances.

Dans la dernière partie du chapitre 4, nous comparons la 3DSVD et la SVDQ. Ces deux

¹Les quaternions ont été découverts en 1843 par W.R. Hamilton [Hamilton43].

outils de traitement des signaux vectoriels possèdent leurs spécificités. Leurs similitudes et leurs différences sont exposées.

Dans le dernier chapitre, nous illustrons les techniques de séparation d'ondes présentées sur des données issues de campagnes sismiques. Nous validons ainsi les méthodes que nous avons développées, sur des signaux provenant d'un câble sismique marin constitué de capteurs vectoriels. En fin de chapitre, nous présentons les résultats obtenus par la méthode de séparation sur un volume de données sismiques. Ce dernier exemple traduit la généralité du traitement qui peut être appliqué sur tous les types de données tridimensionnelles.

Chapitre 1

Ondes et signaux sismiques multicomposantes

Dans ce premier chapitre, nous présentons les caractéristiques des signaux auxquels nous nous intéressons dans ce manuscrit : les signaux sismiques multicomposantes. Nous effectuons un bref tour d'horizon des techniques d'acquisition de ces signaux et des dispositifs d'enregistrement. Ensuite, nous exposons les différentes ondes sismiques susceptibles d'être recueillies par les réseaux de capteurs vectoriels ou multidimensionnels. Une rapide présentation de quelques propriétés fondamentales des signaux sismiques est ensuite donnée. Enfin, dans la dernière partie, nous proposons une façon de modéliser les signaux polarisés. Cette modélisation sera reprise au chapitre 3 dans la présentation de traitements développés spécifiquement pour ces signaux. Ce chapitre a donc pour but de fixer le cadre du travail proposé et de poser les bases de l'étude des signaux multicomposantes en sismique. Les concepts abordés méritent une étude plus approfondie pour une compréhension de la physique des signaux sismiques, que nous ne faisons pas ici. La complexité et la multitude des cas de figures rencontrés dans l'étude des ondes sismiques ne peuvent être complètement décrits en un seul chapitre. Toutefois, les signaux sismiques multicomposantes sont un type particulier de signaux sur lesquels peuvent s'appliquer des traitements spécifiques. Ils serviront, dans ce mémoire, d'illustration pour les techniques proposées dans les chapitres suivants.

Nous présentons tout d'abord les dispositifs d'enregistrement des signaux auxquels nous nous intéressons dans cette étude. Le matériel nécessaire à l'émission et à la réception des signaux rencontrés lors des campagnes géophysiques fait ensuite l'objet d'un rapide tour d'horizon. Puis nous abordons les différents types d'ondes susceptibles d'être observées sur les enregistrements sismiques et en donnons les propriétés physiques fondamentales. La fin de ce chapitre est consacrée à une description des modèles mathématiques liés aux signaux sismiques vectoriels. Les concepts introduits ont pour but de décrire les signaux auxquels nous allons nous intéresser, en situant leur origine, et les méthodes pratiques mises en œuvre pour les enregistrer. Le lecteur intéressé trouvera une présentation plus complète de la physique des ondes élastiques dans [Ewing57, Brillouin60, Lavergne86].

1.1 Acquisition sismique

Le but de la prospection sismique est la cartographie et l'identification des structures géologiques de subsurface et de leurs stratigraphies, pour y rechercher et y localiser les gisements de pétrole, de gaz ou les dépôts miniers. Nous détaillons dans cette première partie quelques techniques utilisées par les géophysiciens et dressons un inventaire non exhaustif du matériel d'enregistrement permettant d'acquérir des *images* sismiques du sous-sol.

1.1.1 Principe

Le principe de base de la prospection sismique est fondé sur la génération d'un ébranlement mécanique du sous-sol. Cette sollicitation mécanique génère une onde (ou **source**). L'enregistrement temporel de la réponse du sous-sol à cette sollicitation par l'intermédiaire d'un récepteur (ou **capteur**) constitue un enregistrement sismique. Cet enregistrement sismique peut être vu comme une «échographie» du sous-sol, à des longueurs d'ondes plus élevées que les échographies réalisées sur l'être humain (de quelques centimètres, en diagraphie, à des centaines de mètres, en sismique grand angle). Afin d'obtenir une couverture spatiale de l'image du sous-sol, les géophysiciens déploient un réseau de capteurs (antenne), la plupart du temps de façon rectiligne. Ce dispositif peut être remplacé, en environnement maritime, par un seul capteur déposé au fond de l'eau (à l'interface sol-eau) et une répétition d'explosions (sources) sous-marines à intervalles de distance réguliers («offset»), assurant la couverture en distance de la zone à cartographier. Selon la nature et l'environnement de la région que l'on désire caractériser, différents types de dispositifs source(s)-capteur(s) sont utilisables. Le positionnement des structures géologiques à identifier ainsi que le niveau de détails que l'on veut obtenir dans l'image sismique déterminent le type de sismique à utiliser. On distingue plusieurs catégories de sismique qui diffèrent par les méthodes d'acquisition employées et les dimensions des structures illuminées par les ondes sismiques [Lavergne86, Sheriff91].

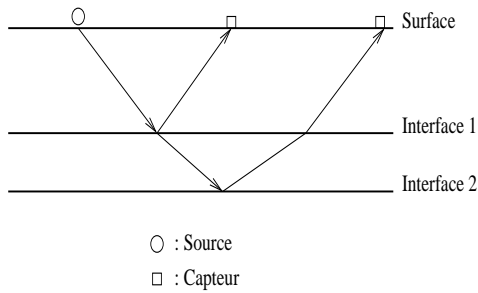


Fig. 1.1 – Principe de la sismique réflexion.

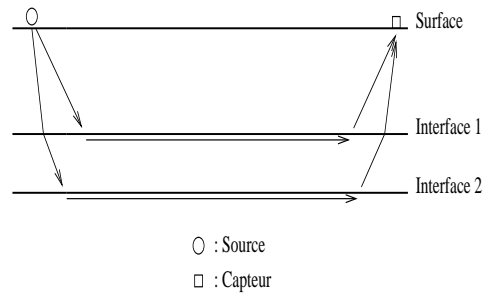


Fig. 1.2 – Principe de la sismique réfraction.

La sismique réflexion

Le but de la sismique réflexion est de caractériser les zones superficielles de la croûte terrestre ou océanique par l'étude des temps d'arrivée des ondes réfléchies par les interfaces géologiques représentant des changements d'impédance acoustique du sous-sol. Les ondes envoyées dans le milieu ont des fréquences très variées : de quelques hertz à plusieurs kilohertz selon la profondeur d'investigation et la nécessité pour les ondes de traverser ou non une couche d'eau avant de pénétrer dans le sous-sol. Quand la fréquence croît, les ondes ne pénètrent pas profondément dans le sous-sol du fait de l'atténuation qui est fonction de la fréquence ν (loi d'atténuation en ν^2). Ainsi, avec des fréquences de quelques hertz, il est possible d'imager des structures profondes et lointaines, mais avec une faible résolution (niveau de détails dans l'image des structures). L'utilisation d'ondes à fréquences relativement élevées permet d'imager des structures plus fines (pouvoir de résolution plus grand) et de produire un enregistrement sismique particulièrement adapté aux structures stratifiées superficielles (fig. 1.1), c.à.d. proches de la surface. La sismique réflexion est largement utilisée dans le milieu géophysique et particulièrement dans le génie civil et la surveillance ou *monitoring* de réservoirs [Hatton86, Waters78, Yilmaz87, Sheriff97, Mari98].

La sismique réfraction

Il existe plusieurs domaines d'utilisation de la sismique réfraction. Dans le cas de l'étude de structures géologiques profondes, l'utilisation de sources dites hautes fréquences n'est plus possible du fait de leur faible possibilité d'investigation en profondeur. Les sismologues utilisent alors des sources plus puissantes et de fréquences plus basses afin d'imager des couches profondes du sous-sol. Le principe utilisé est l'étude des ondes réfractées qui naissent lorsqu'une onde sismique arrive sur une interface géologique (frontière physique entre deux milieux géologiques de caractéristiques différentes) avec un angle égal à l'*angle critique* (Loi de Snell-Descartes). L'onde réfractée se propage le long de l'interface en réémettant de façon constante une onde qui remonte vers la surface avec le même angle critique (fig. 1.2). Des campagnes menées en mer ont permis des investigations sismiques pouvant aller jusqu'à des

profondeurs de 50 km, permettant ainsi de définir la position du Moho (limite entre la croûte et le manteau terrestre) [Sheriff91]. L'une des contraintes de la sismique réfraction est la forte puissance de la source émettrice des ondes sismiques. La sismique réfraction est également utilisée, entre autres, par les géophysiciens pour estimer les vitesses de propagation des ondes dans les couches du sous-sol.

La sismique de puits

Si l'interprétation d'une campagne de sismique réflexion ou réfraction révèle une zone potentiellement intéressante en termes d'exploitation, il est nécessaire de mettre en œuvre une sismique qui explorera la zone de façon plus précise. C'est la sismique de puits. Cette technique consiste à creuser un puits dans lequel les capteurs sont disposés et à placer la source sur le sol, hors du puits, à une certaine distance de l'ouverture du puits (le *déport*) variable ou non (fig. 1.3). La source, en sismique de puits, émet dans des gammes de l'ordre de la centaine de hertz. Le domaine d'investigation verticale est de l'ordre de 800 mètres au maximum. L'investigation horizontale est d'une part fonction de la distance entre la source et le haut du puits (déport) et d'autre part de la géométrie du sous-sol [Gilpatrick89]. Ce type de dispositif permet d'estimer un log d'impédance acoustique, *i.e.* une courbe de variation verticale de l'impédance acoustique directement liée aux positionnements des diverses interfaces géologiques et à la vitesse de propagation des ondes dans les milieux présents dans le sous-sol [Mari89]. Les enregistrements sismiques récoltés par ces dispositifs sont dénommés PSV (Profil Sismique Verticaux) si la source est à la verticale du puits ou PSO (Profil Sismique Oblique) dans le cas contraire [Hardage85].

La sismique puits à puits

Lorsqu'un champ est équipé de plusieurs puits, il est possible de contrôler les fluides et les transferts de fluide ou de gaz au niveau du réservoir. On utilise les différents puits pour imager la zone inter-puits, c'est la sismique inter-puits ou crosswell. Cette technique consiste à placer la source dans un puits et le système de réception (antenne de capteurs) dans un autre puits (fig. 1.4). La zone éclairée est alors située entre les deux puits et la résolution est meilleure car la source et les récepteurs sont placés sous la *zone altérée*, proche de la surface, génératrice de bruits importants [Hardage92].

Nous venons de voir les principales configurations d'acquisition sismique qui font toutes appel, d'une façon générale, à des sources et des capteurs. Présentons maintenant quelques sources parmi celles utilisées classiquement et les différents types de capteurs enregistrant les ondes.

1.1.2 Les sources sismiques

Il existe de nombreux moyens d'émettre une onde acoustique ou élastique. Pour une revue plus détaillée des divers dispositifs utilisés nous renvoyons à [Sheriff82, Lavergne86, Sheriff91,

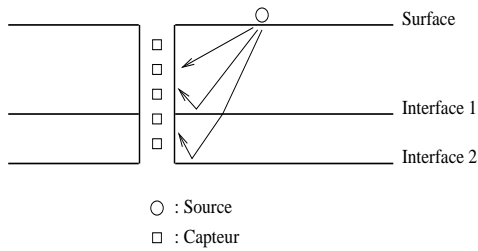


Fig. 1.3 – Principe de la sismique de puits.

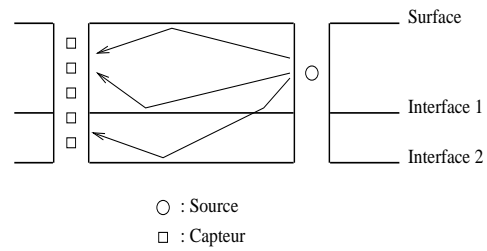


Fig. 1.4 – Principe de la sismique inter-puits.

Mars01]. Les principales sources utilisées sont :

En acquisition terrestre

- *les explosifs* : bien que de moins en moins utilisés, en mer et en zone urbaine pour des raisons évidentes, ils restent un type de source sismique apprécié en raison de la signature brève du signal qu'ils génèrent.
- *les camions vibreurs* : ils sont particulièrement utilisés par les compagnies de géophysique dans les régions habitées. Ces engins permettent d'envoyer dans le sous-sol un signal de type «sweep». Cette source, intéressante pour ses caractéristiques large-bande, est corrélée au train d'onde réfléchi par le sous-sol pour obtenir un enregistrement proche de ceux obtenus en sismique réflexion (explosif).
- *les chutes de masses* : elles consistent souvent en la chute d'une masse de trois tonnes d'une hauteur de trois mètres. Ce dispositif est moins utilisé du fait de sa faible maniabilité vis-à-vis des autres systèmes.

En acquisition marine

- *les explosifs* : ils constituent une source très intéressante en sismique du fait de leur forte énergie. Ils permettent une meilleure pénétration des ondes sismiques dans le sous-sol, ils sont depuis quelques années interdits à cause de leurs effets destructeurs sur l'environnement.
- *les canons à air* : basés sur l'expulsion d'une bulle d'air sous pression dans l'eau à une profondeur définie, ils constituent la source la plus communément utilisée dans les campagnes sismiques marines.
- *les canons à eau* : ils sont constitués d'un piston immergé qui expulse violemment l'eau contenue dans sa partie inférieure. La bulle d'eau éjectée cavite et génère une onde acoustique de puissance proportionnelle au volume d'eau expulsé par le piston et à la pression qui lui a été appliquée.

1.1.3 Les capteurs sismiques

Tous les capteurs sismiques ont pour but de retranscrire les mouvements du milieu (énergie sismique) en courants électriques, qui, numérisés constituent le document de base pour le travail d'interprétation du géophysicien. Nous décrivons brièvement les principaux capteurs utilisés durant les campagnes sismiques marines ou terrestres.

Hydrophones

Ces capteurs sont constitués de matériau piézo-électrique capable de transformer les variations de pression auxquelles ils sont soumis en un courant électrique. Ils sont utilisés en sismique marine et peuvent être placés dans des *flûtes sismiques* (streamers) où ils sont regroupés et disposés à intervalles réguliers le long du dispositif. Ce type de matériel est plus particulièrement utilisé en sismique réflexion. Les hydrophones sont des capteurs de pression acoustique appelés *capteurs scalaires* du fait de la nature omnidirectionnelle de la pression acoustique qu'ils mesurent dans l'eau [Sheriff82].

Géophones

Les géophysiciens utilisent les géophones afin de mesurer les mouvements du sous-sol de façon directionnelle. Ils sont composés d'un aimant fixe autour duquel une bobine mobile peut coulisser. Un mouvement dans la direction de l'axe de l'aimant génère un courant induit dans la bobine. Ce courant, par son amplitude, traduit la vitesse du déplacement provoqué par le passage de l'onde sismique. Les géophones sont dénommés *capteurs vectoriels* du fait de la nature directionnelle de la quantité qu'ils mesurent. Ils peuvent être utilisés seuls, en doublets, ou en triplets, formant alors un trièdre direct, permettant un enregistrement des mouvements du sous-sol dans les trois directions de l'espace [Sheriff91].

1.1.4 Enregistrements sismiques multicomposantes (2C/3C/4C)

Après avoir décrit les capteurs, unités de base d'un enregistrement, nous allons présenter les différentes configurations utilisables dans les campagnes sismiques.

Dispositif 2C/3C en sismique terrestre

En sismique terrestre, l'utilisation d'une antenne de capteurs vectoriels permettant l'enregistrement simultané des mouvements du sous-sol dans plusieurs directions orthogonales entre elles constitue un enregistrement multicomposante. Ces enregistrements sont pratiqués avec des doublets (2 composantes = 2C) ou des triplets (3 composantes = 3C). Dans ces cas, on dispose d'une composante verticale (notée souvent Z) et d'une ou deux composantes horizontales (X et Y). Ce type de dispositif est également utilisé en sismologie.

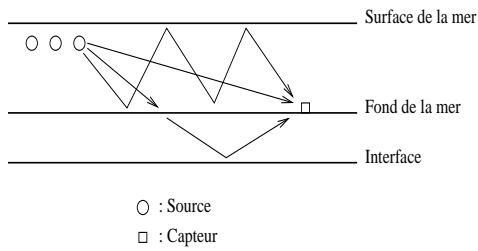


Fig. 1.5 – Acquisition marine avec OBS.

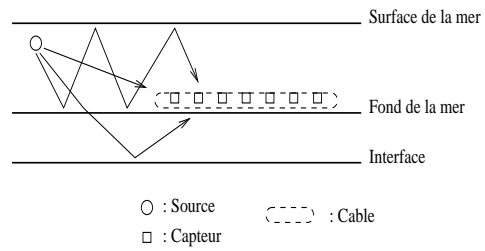


Fig. 1.6 – Acquisition marine avec OBC.

Capteur multicomposante marin (*Ocean Bottom Seismometer, OBS*)

Dans le cadre d'une acquisition sismique en mer, il existe plusieurs configurations possibles. Depuis quelques années, les OBS (*Ocean Bottom Seismometer*), composés d'un triplet de géophones formant un trièdre et d'un hydrophone, sont utilisés dans les acquisitions marines grands et petits fonds. Ces capteurs possèdent quatre composantes et permettent un enregistrement dit *4C* des vibrations du sous-sol marin. La possibilité d'avoir accès aux mouvements du sous-sol dans les trois directions de l'espace et aux variations de pression à l'interface sol-eau permet une meilleure caractérisation des champs d'ondes propagés dans le milieu. Un tel dispositif apporte une connaissance plus complète des structures souterraines se trouvant sous la couche d'eau.

Lorsqu'un capteur multicomposante de type OBS est placé sur le fond marin et qu'une série d'explosions (source sismique) est effectuée près de la surface, l'enregistrement correspondant comporte une diversité spatiale et une diversité de composantes. On obtient alors une antenne vectorielle synthétique (dénommée ainsi du fait des composantes vectorielles dont est composé l'OBS).

Antenne vectorielle marine (*Ocean Bottom Cable, OBC*)

Il est également possible de déployer des antennes au fond de l'eau. Pour cela, des capteurs du même type que ceux présents dans les OBS sont placés dans une flûte sismique à intervalles réguliers. Le dispositif est alors tracté et déposé sur le fond marin, une explosion est émise, le dispositif est déplacé et l'opération d'émission est renouvelée. La flûte décrite est appelée *Ocean Bottom Cable* (OBC). Elle possède l'avantage de pouvoir, à l'aide d'un seul navire, déplacer la source et le réseau de capteurs de façon rapide, ce qui n'est pas possible en utilisant une source (canon) et un OBS largué au fond de l'eau. La qualité des données recueillies par les OBS et les OBC est fonction du couplage entre les capteurs et le sous-sol marin. Un bon couplage est le garant d'une transcription fidèle des mouvements du sous-sol par le capteur. L'utilisation de ce type de capteurs est assez récente en géophysique [Trehu94, Barr97, Zhu99, Gaiser98].

1.1.5 Enregistrements sismiques multidimensionnels (2D/3D/4D)

Les types d'acquisitions sismiques que nous avons décrits jusqu'ici permettent d'imager une «tranche» de sous-sol contenue dans le plan vertical contenant l'axe source-captteur (plan de propagation). Cette sismique imageant une portion de terrain est dite à deux dimensions (2D), du fait de la diversité temporelle et spatiale des signaux. Si on désigne par x la distance source-captteur et t le temps d'enregistrement des signaux sismiques, ces enregistrements classiques sont fonction de ces deux variables et sont donc bidimensionnels (2D). Il est de plus en plus fréquent que les géophysiciens désirent obtenir une image d'un volume de terrain afin de reconstituer de façon plus complète le sous-sol ou le gisement qu'ils exploitent. Pour obtenir une telle représentation d'une zone géologique, il convient de répéter l'opération de sismique 2D décrite plus haut (par sismique réflexion en général) en appliquant une translation latérale à l'ensemble du dispositif (fig. 1.7) [Cordsen00, Yilmaz01]. Dans le cas des acquisitions 3D, où l'on cherche à déterminer les relations spatiales 3D, la nouvelle variable, souvent dénommée y , désigne la position des différentes acquisitions 2D translattées. Ces enregistrements sont réellement tridimensionnels dans le sens où les variables x et y décrivent, à la surface, le plan supérieur du volume que l'on cherche à cartographier et la variable t décrit le temps et donc la profondeur dans le volume (un évènement sismique est recueilli d'autant plus tard sur un enregistrement qu'il s'est produit profondément). Le volume de données enregistrées lors

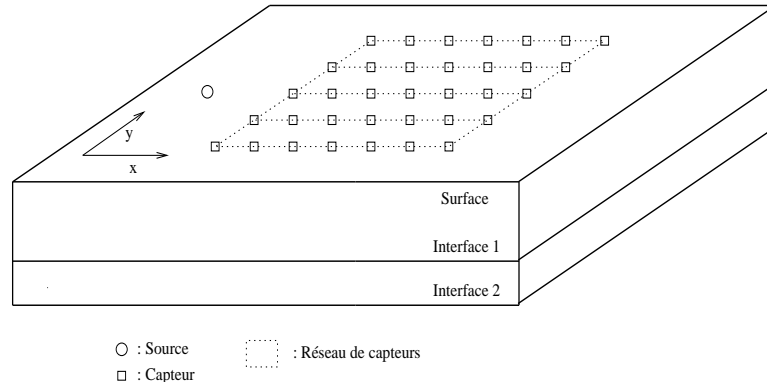


Fig. 1.7 – Représentation schématique d'un réseau de capteurs monocomposantes générant un enregistrement sismique 3D [Sheriff82].

d'une campagne 3D est appelé *cube sismique*. Bien sûr, ce type d'acquisition est plus coûteux qu'un dispositif 2D classique, mais l'apport sur la connaissance de la structure d'un gisement s'avère souvent déterminante et justifie l'utilisation de la sismique 3D.

Parallèlement, depuis plusieurs années, s'est développée une technique appelée *sismique 4D*. Le matériel effectivement déployé sur le site de l'étude sismique est le même que dans le cas de la sismique 3D mais à ceci qu'il reste en place durant une période pouvant aller du temps de la campagne sismique (de quelques jours à plusieurs semaines) à des périodes de plusieurs mois. Une nouvelle variable intervient alors : l'époque d'acquisition des signaux. Cette nouvelle donnée est précieuse dans l'étude du comportement des gisements au cours

de leur exploitation. Cette technique, permettant de faire du *monitoring* (surveillance de réservoir d'hydrocarbures), est nécessaire pour une extraction maximale des constituants des réservoirs.

1.2 Les ondes sismiques

Après avoir présenté les dispositifs d'acquisition, décrivons les principales propriétés physiques des ondes sismiques que nous serons amenés à rencontrer dans les traitements développés plus loin dans ce rapport. Après quelques brefs rappels sur la propagation des ondes élastiques, nous présentons la polarisation, quantité directement accessible grâce aux dispositifs multi-composantes. Nous exposons les différences entre les types d'ondes qui sont généralement présentes sur les enregistrements sismiques, et ce également en termes de polarisation. Nous décrivons ensuite les phénomènes de dispersion, propres à certaines ondes (ondes guidées, ondes de surface) qui peuvent se révéler gênantes pour l'interprétation d'un enregistrement de sismique profonde (du fait de leur forte énergie masquant une grande partie des autres ondes sur un enregistrement). Ces ondes dispersives s'avèrent parfois d'une grande utilité dans le sondage des couches superficielles du sous-sol (ingénierie civile) [Mari98, Mari00]. Enfin, nous rappelons brièvement les lois qui régissent le comportement de toutes les ondes décrites, lors de leur propagation et de leur interaction avec le milieu terrestre.

Les ondes sismiques se déplaçant dans le sol sont des ondes élastiques. Ces ondes utilisent les liaisons atomiques des constituants du milieu qu'elles traversent pour propager une perturbation (ou énergie). Les ondes sismiques peuvent se propager sur des distances très importantes : par exemple, les ondes générées par un tremblement de terre peuvent être enregistrées à plusieurs milliers de kilomètres de l'épicentre, voire faire plusieurs fois le tour de la terre avant d'être enregistrées par un réseau de capteurs. Si les équations caractérisant les ondes sismiques sont très proches de celles régissant les ondes acoustiques, elles possèdent des spécificités que nous allons maintenant aborder rapidement. Pour plus de détails sur les ondes élastiques et leurs propriétés, nous renvoyons le lecteur à la littérature abondante dans ce domaine [Ewing57, Officer58, Brillouin60, Brekhovskikh80, Lavergne86, Glangeaud97, Mari98].

1.2.1 Propagation des ondes sismiques : équation d'ondes

Nous supposons ici que le milieu traversé par les ondes est homogène, isotrope et élastique. On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en utilisant la loi de Hooke qui relie dans le solide les contraintes et les déformations, que :

$$(\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

où \vec{u} est le vecteur déplacement d'un point du milieu traversé par l'ébranlement se propageant dans le sous-sol. μ (module de rigidité) et λ sont les paramètres de Lamé [Mari98] et ρ la densité du milieu traversé.

Afin de faire apparaître les ondes de compression et les ondes de cisaillement, on représente le champs des vecteurs déplacements par la somme d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur (décomposition de Helmholtz) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{\psi}. \quad (1.2)$$

ϕ est le potentiel (scalaire) de dilatation et $\vec{\psi}$ le potentiel (vectoriel) de cisaillement. Pour que l'équation 1.1 soit vérifiée, il faut que les deux potentiels que nous venons d'introduire satisfassent les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{avec : } v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \\ \Delta\vec{\psi} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad \text{avec : } v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Ces équations sont, pour la première, celle d'une onde de compression (Onde P ou Primaire), et pour la seconde, celle d'une onde de cisaillement (Onde S ou Secondaire). Ces deux types d'ondes ont des vitesses différentes ($v_s < v_p$) et des types de propagations différents dus aux types de vibrations que les ondes véhiculent. Les ondes de cisaillement ne se propagent pas dans les liquides ($\mu = 0$ pour les liquides). À ces deux familles d'ondes il faut ajouter les ondes guidées et les ondes de surface qui se propagent dans des milieux stratifiés comme le sous-sol.

Après cette introduction, nous allons présenter les diverses ondes que nous rencontrons ainsi que quelques unes de leurs propriétés. En premier lieu, nous introduisons une des propriétés des ondes sismiques qui nous intéressera particulièrement : la polarisation. Nous faisons, dans ce qui suit, l'hypothèse que la source sismique est ponctuelle et se trouve suffisamment éloignée du réseau de capteurs pour nous permettre d'étudier les ondes dans une configuration d'ondes planes.

1.2.2 La polarisation des ondes sismiques

La polarisation d'une onde sismique décrit le comportement des particules du sous-sol au passage de l'onde. Le mouvement de ces particules est confiné dans un plan dénommé «plan de polarisation» qui, selon la nature de l'onde, contient la direction de propagation de l'onde ou lui est orthogonal. On parle alors de polarisation longitudinale ou transversale.

Si on dispose un capteur 2D (en général une composante enregistrant les mouvements verticaux et une autre les mouvements horizontaux) dans le plan de polarisation, on obtient deux signaux (fig. 1.8).

Ces deux signaux représentent les composantes du mouvement des particules dans le plan de polarisation. La figure de Lissajou (fig. 1.9) représente les positions successives des particules

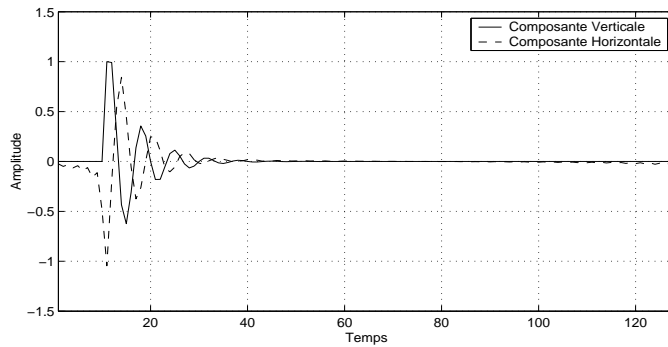


Fig. 1.8 – Signaux enregistrés sur les composantes verticales et horizontales.

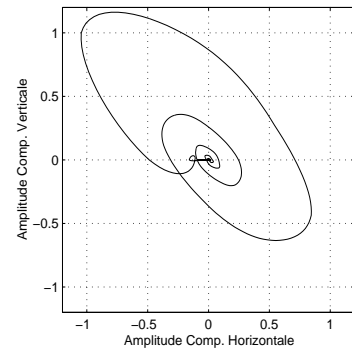


Fig. 1.9 – Figure de Lissajou.

du sous-sol au cours du temps. Sur la figure 1.9, la polarisation est elliptique et se caractérise par un déphasage et un rapport d'amplitude entre les signaux enregistrés sur les deux composantes (fig. 1.8). Si les deux signaux ne sont pas déphasés, on a une polarisation rectiligne. La polarisation résulte des relations de phase et d'amplitude entre les signaux enregistrés, pour une même onde, sur les composantes d'un capteur. Dans le cas de capteurs tridimensionnels, les relations de phase et d'amplitude entre les trois composantes décrivent le mouvement des particules en trois dimensions.

1.2.3 Les ondes de volume

Les ondes P

Pour les ondes P, le mouvement des particules du sous-sol est contenu dans le plan de propagation ; plan vertical contenant l'axe source-capteurs et dirigé dans le sens de propagation. Le mouvement des particules est rectiligne et colinéaire à la direction de propagation de l'onde. Une telle polarisation est dite linéaire longitudinale. Dans un milieu homogène, isotrope, la vitesse de ces ondes v_p s'écrit en fonction de la densité et des paramètres de Lamé : $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$.

Les ondes S

Dans le cas des ondes S, le mouvement des particules est perpendiculaire à la direction de propagation des ondes. Elles sont dites à polarisation transverse, et leur vitesse est donnée par : $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. On distingue les ondes SV et SH :

Ondes SV

Ces ondes sont caractérisées par un mouvement des particules du sous-sol contenu dans le plan vertical de propagation et sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde.

Ondes SH

Les ondes SH sont caractérisées par un mouvement des particules perpendiculaire au plan vertical de propagation.

1.2.4 Les ondes de surface et les ondes guidées

Il est possible que lors de la propagation des ondes sismiques, la topologie du milieu traversé favorise la naissance de phénomènes de guidages. Les ondes sismiques ou sismo-acoustiques sont alors guidées près de la surface du sol, dans des couches sédimentaires ou des couches d'eau (sismique marine).

Les ondes de surface

Lorsque le milieu est limité par une surface libre, il existe d'autres types de propagation que les ondes P et S, et à des vitesses différentes de v_p ou v_s . Ce sont les ondes de surface, qui se propagent sans pénétrer profondément dans les couches du sous-sol. Ces ondes qui peuvent s'avérer gênantes dans l'interprétation d'un enregistrement sismique, sont cependant porteuses d'un grand nombre d'informations sur le milieu géophysique traversé. Les ondes guidées naissent toutes d'un phénomène d'interférences constructives entre des ondes de volume. Les différentes interactions entre les types d'ondes P et S que nous venons d'aborder engendrent différents types d'ondes sismiques guidées.

Ondes de Rayleigh

Ces ondes naissent des interférences entre des ondes P et des ondes SV, dans un milieu homogène, semi-infini, possédant une surface libre (air) ou dans une couche superficielle surmontant une couche homogène infinie et possédant une surface libre : ondes de pseudo-Rayleigh. Dans ce dernier cas, la couche superficielle joue le rôle de guide d'ondes. Ces ondes sont appelées *ondes de surface* en sismique du fait de leur propagation le long de l'interface air-sol. Dans le cas des ondes pseudo-Rayleigh, la vitesse de propagation est fonction de la fréquence, ce qui traduit un caractère dispersif (vitesse de phase différente de la vitesse de groupe) [Lavergne86, Ewing57]. Ces ondes sont fréquemment collectées sur les enregistrements sismiques du fait de la présence d'une couche superficielle dans les formations géologiques (WZ : Weathering Zone ou zone altérée). Ces deux types d'ondes sont souvent regroupées sous le nom d'*ondes de Rayleigh*.

Les ondes de Rayleigh sont caractérisées par un déplacement elliptique des particules du sous-sol à leur passage. Ce mouvement est contenu dans le plan de propagation, plan défini par l'axe source-capteurs et la verticale. Ces ondes ont une polarisation elliptique.

Il existe d'autres types d'ondes de surface susceptibles d'être collectées par les réseaux de capteurs sismiques : les ondes de Love et les ondes de Stoneley [Sheriff91, Mari98]. Nous n'abordons pas leur description ici car nous ne serons pas amenés à les rencontrer dans les enregistrements sismiques que nous étudierons au chapitre 5.

Les ondes sismo-acoustiques guidées (ou ondes compressionnelles guidées)

Dans une configuration d'acquisition sismique en mer, une couche d'eau de taille variable surmonte les formations géologiques imagées. Dans le cas de petits fonds ($\simeq 100\text{ m}$), des ondes acoustiques générées par les sources sismiques (dynamite, canons à air) peuvent donner lieu à des phénomènes d'interférence et transformer la couche d'eau en guide d'ondes. Ces ondes guidées sont dispersives et leur étude permet de caractériser le milieu de propagation, en l'occurrence la couche d'eau et les gradients de vitesse dans les premières couches du sous-sol marin. L'étude de ces ondes a fait l'objet de nombreux travaux récents [Nardin98, Glangeaud99, Mari00]. Un des inconvénients de la présence de ces ondes sur un enregistrement sismique provient du fait que leur forte énergie masque les ondes qui se sont propagées dans le sous-sol (caractéristique fréquente des ondes guidées en sismique). Il convient donc de trouver des méthodes permettant de les caractériser correctement et de les soustraire entièrement des enregistrements sismiques. Nous verrons plus loin comment les méthodes que nous proposons y parviennent (cf. chapitre 4).

1.2.5 Dispersion et ondes guidées

La dispersion des ondes est le phénomène physique qui se caractérise par une différence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe [Ewing57]. Nous ne donnons pas d'expression mathématique de ces quantités, elles sont présentées dans la littérature [Officer58, Brillouin60, Brekhovskikh80, Nardin98, Glangeaud99, Mari00]. La vitesse de phase est la vitesse de propagation de plans équiphases (point de phase constante). La vitesse de groupe est la vitesse de déplacement de l'enveloppe du paquet d'ondes qu'est l'onde sismique. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde sismique. La mise en évidence d'une différence entre ces deux vitesses (de groupe et de phase) permet de juger de la dispersion de l'onde sismique examinée. Cette mesure de dispersion peut ensuite être reliée directement aux paramètres physiques des roches traversées par l'onde dispersive [Mari98]. Le phénomène de dispersion apparaît dans les ondes guidées si le «toit» du guide d'ondes est une surface libre. Les ondes guidées que nous rencontrerons dans les documents sismiques multicomposantes et multidimensionnels sont toutes dispersives. Nous verrons plus loin comment se caractérise l'enregistrement d'une onde dispersive sur un document sismique.

1.2.6 Comportement des ondes sismiques aux interfaces

Lors de leur propagation dans le sous-sol, les ondes sismiques rencontrent des changements dans la nature des milieux traversés. La quantité physique caractérisant le comportement des ondes dans une roche est l'impédance du milieu, qui est liée à la vitesse de propagation des ondes dans ce milieu et à la densité du matériau qui le constitue. Ainsi, lors du passage d'une roche tendre vers une roche dure (ou l'inverse), il se produit un changement d'impédance plus ou moins marqué. Ces transitions entre deux types de roches sont appelées *interfaces géologiques* et délimitent les régions ou couches du sous-sol. À la rencontre de ces interfaces,

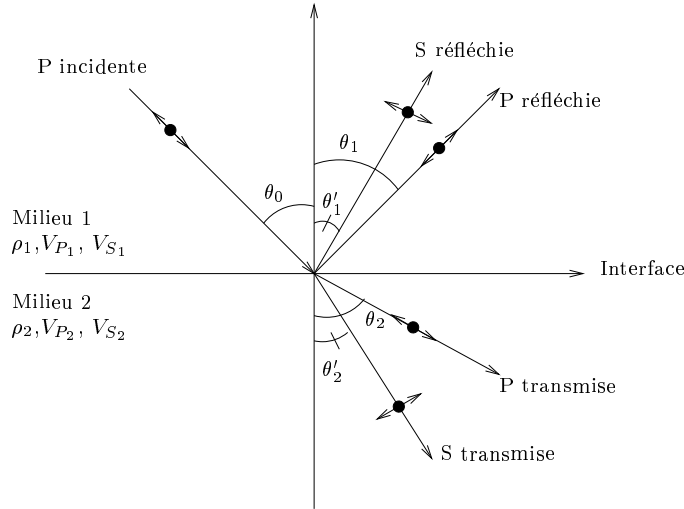


Fig. 1.10 – Ondes engendrées par une onde P incidente sur une interface entre deux milieux de vitesses différentes ($V_1 > V_2$). Le mouvement des particules au passage de l'onde, *i.e.* la polarisation, est représentée schématiquement sous forme de flèches.

les ondes ont un comportement similaire à celui des rayons lumineux en optique géométrique : elles sont réfléchies et éventuellement transmises. Les lois de la réflexion et de la transmission des ondes élastiques sur une interface sont illustrées sur la figure 1.10. Une onde P incidente donne naissance à deux ondes réfléchies (P et S) et deux ondes transmises (S et P). Les angles de réflexion et de transmission vérifient les lois de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (1.4)$$

Lorsque l'angle de l'onde transmise est de 90° , on atteint l'angle critique :

$$\theta_c = \arcsin \frac{V_1}{V_2}. \quad (1.5)$$

Si l'angle d'incidence de l'onde est supérieur à cet angle critique, on a une onde purement réfléchi. Cette propriété permet le phénomène de guidage par réflexions totales successives des fronts d'ondes sur une interface supérieure et une interface inférieure. Dans le cas où l'angle d'incidence est égal à l'angle critique, il y a naissance d'une onde réfractée. Dans le cas où l'angle d'incidence est inférieur à l'angle critique, il y a naissance d'une onde transmise et d'une onde réfléchi. Sur la figure 1.10 sont également représentés les phénomènes de conversion possibles d'onde P en onde S.

Il existe une grande variété de comportements des ondes aux interfaces du fait du grand nombre d'ondes existant et des diverses interfaces possibles. Nous ne détaillons pas cet aspect dans ce manuscrit mais nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la bonne compréhension des phénomènes aux interfaces, et particulièrement à celle où se trouve le capteur sismique, passe par une compréhension de la physique des ondes et s'avère nécessaire pour une interprétation totale des enregistrements sismiques. Nous nous contenterons, dans ce

travail, de proposer des traitements pour les signaux sismiques multicomposantes et n'aborderons que brièvement la phase d'interprétation des enregistrements propre aux géologues et géophysiciens.

Nous avons vu dans ce paragraphe la diversité des ondes sismiques susceptibles d'être collectées lors d'une campagne d'acquisition et quelques-unes de leurs propriétés. Nous allons maintenant aborder la façon de représenter mathématiquement les signaux provenant de l'enregistrement de ces ondes sismiques sur un ou plusieurs capteurs.

1.3 Modélisation des signaux sismiques polarisés et multidimensionnels

Afin de développer des traitements visant à aider le géophysicien dans son interprétation des enregistrements sismiques, une modélisation des signaux enregistrés est nécessaire. Nous donnons ici une description des signaux que nous rencontrerons après acquisition et numérisation. C'est donc les signaux discrets (numériques) que nous manipulerons, admettant que la phase de numérisation (échantillonnage et quantification) a été correctement effectuée (respect du théorème de Shannon). Nous décrivons tout d'abord les signaux sismiques collectés sur des réseaux de capteurs scalaires 2D. Ensuite nous décrivons les enregistrements multicomposantes obtenus en utilisant des réseaux de capteurs vectoriels. Enfin, nous présentons les signaux multidimensionnels, issus de réseaux de capteurs permettant d'illuminer un volume de terrain.

Signaux sismiques 2D monocomposantes

Dans le cas d'une acquisition à l'aide d'un réseau (antenne) de capteurs (géophone monocomposante ou hydrophone), l'enregistrement est composé d'autant de signaux qu'il y a de capteurs à *offset* (distance source-capteur, dénommée également *déport*) réguliers. Ainsi, si pour chaque offset on a enregistré un certain signal et que l'on a ensuite échantillonné celui-ci à une période T_e , on possède un signal de N_t échantillons pour chaque offset. Un signal, pour

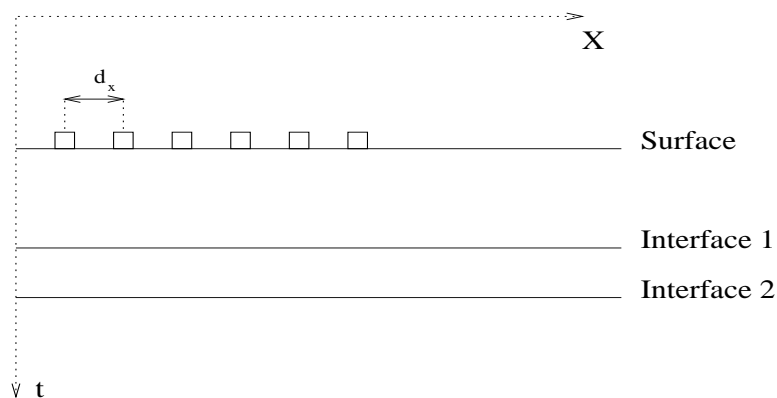


Fig. 1.11 – Représentation schématique d'un réseau de capteurs monocomposantes.

un offset donné, est donc constitué d'une suite de valeurs allant des instants T_e à $N_t.T_e$. Ces échantillons sont généralement représentés par les éléments d'un vecteur :

$$\begin{aligned} & \underline{x}(n_t) \text{ avec } (1 \leq n \leq N_t), \\ \text{ou} & \\ & \underline{x}(N_t) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_t}]^T. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si on a enregistré N_x différents signaux correspondants aux différentes distances source-capteur (fig. 1.11) de d_x à $N_x.d_x$ (d_x étant la distance inter-capteurs), on a alors un enregistrement sismique appelé *section sismique* ou *profil sismique* qui peut se représenter à l'aide d'une matrice :

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}(n_x, n_t) \text{ avec } (1 \leq n_t \leq N_t) \text{ et } (1 \leq n_x \leq N_x), \\ \text{ou} & \\ & \mathbf{S}(N_x, N_t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{(n_x=1)}^T(N_t) \\ \underline{x}_{(n_x=2)}^T(N_t) \\ \vdots \\ \underline{x}_{(n_x=N_x)}^T(N_t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cette matrice comprend, par convention que nous adopterons, sur ses lignes les signaux enregistrés aux différents offsets, elle a donc N_x lignes. Chaque colonne correspond aux échantillons enregistrés au même instant pour tous les offsets, elle a donc N_t colonnes. On parle d'enregistrement 2D du fait des dimensions «temps» (directement liée à la profondeur en sismique) et distance. La section sismique est donc représentée par une matrice possédant autant de colonnes qu'il y a d'échantillons temporels et autant de lignes qu'il y a de capteurs. On a représenté sur la figure 1.12 un enregistrement sismique 2D monocomposante. La

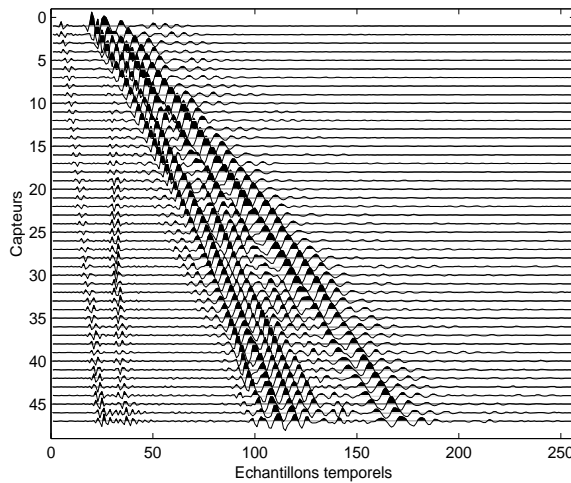


Fig. 1.12 – Section sismique 2D. Les échantillons temporels décrivent la dimension *temps* et le numéro des capteurs la dimension *distance*. Données enregistrées dans le grésivaudan par M. Dietrich.

dimension «temps» en sismique est liée à la profondeur, car le temps d'écoute des capteurs

est lié à la distance parcourue par les ondes avant d'être enregistrées et donc à la profondeur qu'elles ont pu atteindre. Les enregistrements 2D monocomposantes peuvent donc être stockés sous forme de matrices. De ce fait, les traitements développés pour ces signaux utilisent de façon intensive les techniques d'algèbre linéaire [Glangeaud94, Thirion95a, Mars96, Thirion96b, Thirion96a, Glangeaud97].

Modèle de signaux reçus en sismique 2D multicomposante

Dans une configuration d'acquisition multicomposante, chaque capteur n'est plus composé d'une seule composante (un géophone ou un hydrophone), mais de deux, trois ou quatre composantes. Ainsi, on mesure à chaque offset, les déplacements du sous-sol dans deux ou trois directions (2C ou 3C) et on ajoute un hydrophone en sismique marine (OBS ou OBC 4C). On dispose alors toujours d'un réseau de capteurs mais pour chaque position n_x on a deux, trois ou quatre signaux. Nous présentons les notations dans le cas général, où le nombre

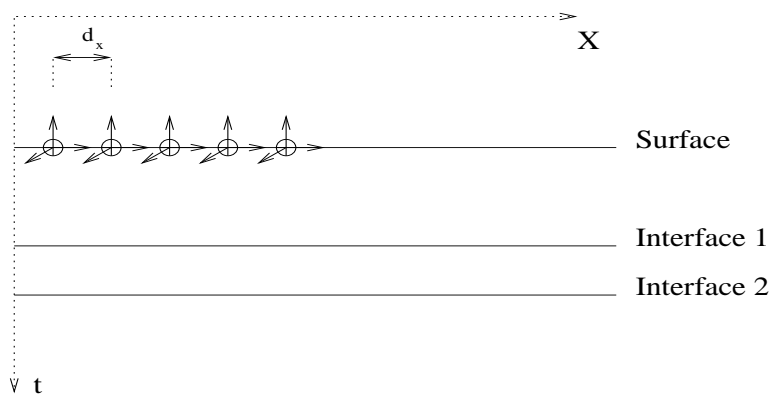


Fig. 1.13 – Représentation schématique d'un réseau de capteurs multicomposantes. Chaque capteur est composé de deux ou trois composantes (géophones) recueillant la vitesse de déplacement du sous-sol dans des directions orthogonales.

de composantes est N_c . Les signaux enregistrés sur un capteur multicomposante (ici à trois composantes) s'écrivent pour un offset donné comme :

$$\mathbf{X}_{n_x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{(n_c=1)}^T(N_t) \\ \underline{x}_{(n_c=2)}^T(N_t) \\ \underline{x}_{(n_c=3)}^T(N_t) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Pour chaque capteur, l'ensemble des signaux enregistrés sur ses composantes peut donc se mettre sous la forme d'une matrice de taille $N_c \times N_t$ si le nombre d'échantillons temporels est N_t et le nombre de composantes N_c . Si on considère maintenant un ensemble de N_x capteurs, constituant un réseau de capteurs multicomposantes, il existe principalement deux façons de modéliser ces signaux : en utilisant les longs vecteurs ou les tableaux de dimension trois.

Notation Long-vecteur

La notation «long vecteur» consiste en une concaténation de l'information reçue sur chaque capteur vectoriel dans un seul vecteur. Ainsi, pour un réseau de N_x capteurs possédant chacun N_c composantes, et ayant recueilli N_t échantillons, les données \mathcal{S} (qui sont de dimension $N_c \times N_x \times N_t$) seront stockées dans une matrice \mathbf{S} de taille $(N_x \cdot N_c) \times N_t$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n_x=1} \\ \mathbf{X}_{n_x=2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{n_x=N_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{x}_{n_x=1}(N_t) \otimes \underline{p}(N_c))^T \\ (\underline{x}_{n_x=2}(N_t) \otimes \underline{p}(N_c))^T \\ \vdots \\ (\underline{x}_{n_x=N_x}(N_t) \otimes \underline{p}(N_c))^T \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

où \otimes symbolise le produit de Kronecker et $\underline{p}(n_c)$ est un vecteur de taille N_c définissant les relations inter-composantes, *i.e.* la polarisation. Cette polarisation consiste en des rapports d'amplitudes entre les composantes (pour les ondes à polarisation linéaire) et en des déphasages (pour les ondes à polarisation elliptique). Nous verrons plus loin comment gérer les deux types de polarisations dans le traitement des signaux multicomposantes. L'approche par «long-vecteur» pour stocker les données de réseau de capteurs vectoriels a été largement utilisée depuis plusieurs années [Nehorai94b, Nehorai94a]. Nous n'adopterons pourtant pas ici cette notation car la mise en forme des données en «long-vecteur» peut s'avérer restrictive et avoir des incidences sur le traitement des données car elle ne prend pas en compte spécifiquement les relations inter-composantes (cf. Chapitre 3). En effet, il n'existe pas de règle établie pour construire le long-vecteur correspondant à un réseau de capteurs vectoriels donné et l'ordonnancement arbitraire des données dans un tableau confère des propriétés algébriques à celui-ci, notamment en ce qui concerne son rang. Nous détaillerons ce point dans le chapitre 3 et montrerons la perte d'information due au conditionnement en long-vecteur et la baisse de performance des algorithmes de séparation d'onde utilisant cette technique.

Notation tableau 3D

Dans cette thèse, nous prenons le parti de conserver la structure réelle des données et donc de stocker les signaux enregistrés par un réseau multicomposante non pas dans une matrice, mais dans un tableau tridimensionnel (ou trimodal). Cette approche est à la base des traitements que nous proposons, dans le chapitre 3, pour les signaux vectoriels. Ainsi, du fait de la diversité en temps, en distance et en composante de ces signaux, nous les représenterons sous la forme de tableau à trois indices \mathcal{A} (fig. 1.14). Ces tableaux sont parfois dits *trimodaux*. Chaque *mode* représente alors une des diversités de l'acquisition. Nous utiliserons le terme *mode* au détriment de *diversité* dans la suite du manuscrit. Sur la figure 1.15, on a représenté une simulation du type de données que l'on peut avoir sur un réseau multicomposante. La manipulation et le traitement des tableaux de données ainsi définis sont présentés dans le chapitre 2 et sont largement inspirés de [Kroonenberg83, DeLathauwer97]. Nous montrerons l'apport de l'utilisation des tableaux de données 3D au cours du chapitre 3.

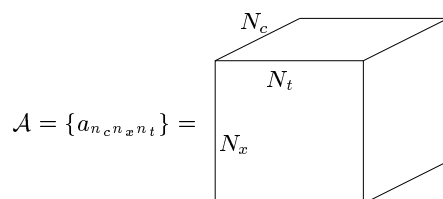


Fig. 1.14 – Stockage des données multicomposantes sous forme de tableau 3D de taille N_t dans la direction temporelle, N_x dans la direction spatiale et N_c dans la direction correspondant à la polarisation (nombre de composantes par capteur).

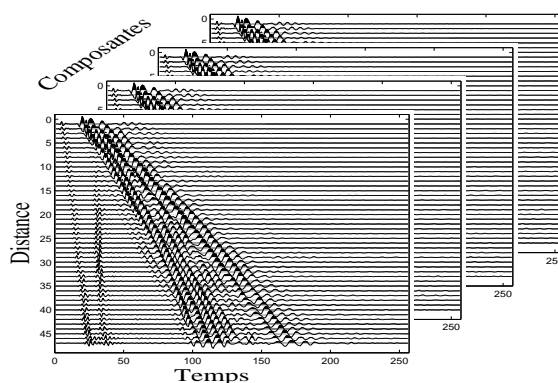


Fig. 1.15 – Section sismique multicomposante simulée. Les échantillons temporels décrivent la dimension *temps* et le numéro des capteurs la dimension *distance*, le nombre de «tranches» est égal au nombre de *composantes* des capteurs. Données M. Dietrich.

Modèle de signaux reçus en sismique 3D

Dans le cas du traitement de données sismiques provenant de réseaux de capteurs non plus multicomposantes mais multidimensionnels, nous conserverons également la structure originale des données. Ainsi, pour un volume de données 3D correspondant à l'éclairage d'un volume de terrain (réseau 2D de capteurs monocomposantes), nous garderons la structure tridimensionnelle des données en les rangeant dans un tableau 3D de dimensions $N_x \times N_y \times N_t$, où N_x et N_y correspondent aux nombres de capteurs suivant les directions x et y du réseau de capteurs, et N_t le nombre d'échantillons temporels (lié au temps d'enregistrement et donc à la profondeur). Un exemple de données tridimensionnelles est présenté sur la figure 1.16.

Cette manière de stocker les données multidimensionnelles (3D en général) paraît naturelle et est classique en sismique. Par contre, les traitements qui leurs sont appliqués sont des traitements par tranches successives (correspondant à des tranches de terrain) [Donias99]. Donc, si la notation est classique, l'utilisation de la nature 3D des données n'est pas développée dans le traitement de ces données [Zhu99]. Nous montrerons comment les outils d'analyse de tableaux 3D peuvent permettre d'améliorer les traitements par tranche. Ces signaux ne sont pas des signaux vectoriels, mais nous présenterons dans le chapitre consacré aux applications, des résultats obtenus en utilisant les techniques que nous avons développées pour les signaux vectoriels, sur ce type de données (cf. chapitres 4).

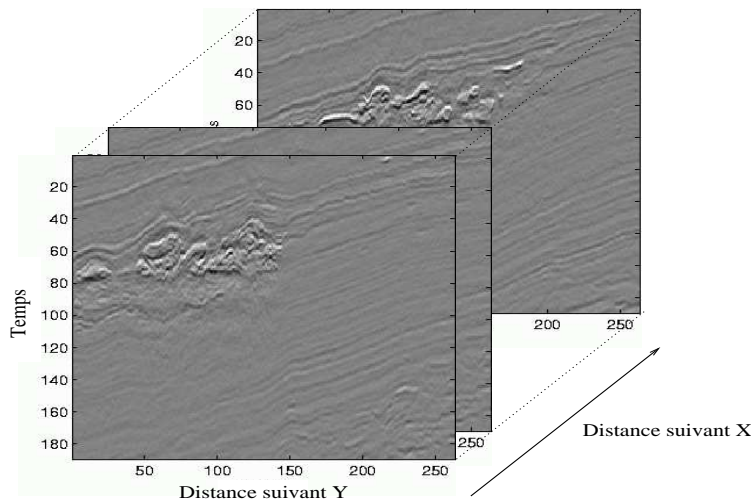


Fig. 1.16 – Section sismique multidimensionnelle réel. Les échantillons temporels décrivent la dimension *temps* et les deux autres axes la distance suivant X et Y. Le cube décrit un volume de terrain (Données fournies par TotalFinaElf).

1.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment les ondes sismiques sont recueillies sur les réseaux de capteurs. Nous avons brièvement présenté les types d'ondes sismiques susceptibles d'être enregistrées par les réseaux de capteurs multicomposantes ou multidimensionnels. Une présentation des propriétés de polarisation des ondes sismiques a été faite et dans une dernière partie nous avons proposé des modèles mathématiques pour le traitement de ces signaux sismiques. En particulier, nous avons introduit le stockage des enregistrements sismiques multidimensionnels et multicomposantes sous forme de tableaux tridimensionnels (ou trimodaux). Cette approche sera exploitée dans les méthodes de traitement de ces signaux proposées dans ce mémoire. Nous avons introduit les signaux vectoriels (ou multicomposantes) géophysiques, car ils sont particulièrement bien adaptés aux techniques que nous présenterons dans les prochains chapitres. Les outils que nous proposerons sont applicables aux signaux vectoriels de façon générale (comme par exemple les signaux électromagnétiques). Les signaux sismiques nous permettront d'illustrer l'application des traitements proposés.

Chapitre 2

Outils d'algèbre linéaire et multilinéaire

Ce chapitre a pour objectif de présenter les outils algébriques dont nous aurons besoin pour l'élaboration de traitements pour les signaux multicomposantes. Un rappel sur les décompositions matricielles les plus utilisées en traitement du signal est proposé en premier lieu. Ensuite, après l'introduction de plusieurs notations, l'extension de ces décompositions pour les tableaux de dimension supérieure à deux est exposée en détail. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas des données tridimensionnelles et centrons notre intérêt sur la présentation de la 3DSVD. Nous montrons ensuite comment les décompositions de tableaux multidimensionnels permettent une partition de l'espace vectoriel original en sous-espaces vectoriels orthogonaux entre eux. Ces considérations nous permettront d'établir une méthodologie de séparation d'ondes pour les données multicomposantes, utilisée dans le chapitre 3. Cette méthode est l'extension de la séparation par sous-espaces aux tableaux de données de dimension trois.

Dans ce chapitre, une présentation des concepts et techniques algébriques principalement utilisés en traitement des signaux sismiques est faite. Nous focalisons notre exposé sur la décomposition en valeurs singulières. Nous en présentons la définition ainsi que les propriétés qu'elle induit, telles que le rang ou la décomposition en sous-espaces vectoriels. Nous introduisons ensuite son extension au cas des tableaux de données de dimension supérieure à deux, et principalement ceux de dimension trois. Cette extension a été introduite en traitement du signal pour la première fois par L. De Lathauwer [DeLathauwer93] et utilisée dans le cadre de l'ICA (Independent Component Analysis). Elle fait partie des techniques de décomposition des tableaux et tenseurs en éléments propres. Un état de l'art de ces techniques est présenté dans [Comon00]. Le problème de la décomposition des tableaux tridimensionnels a été abordé à partir des années 60 avec [Tucker64, Tucker66] et a trouvé des applications dans divers domaines [Kroonenberg83, Comon94b, DeLathauwer97, Bro98]. Nous exposons les extensions de quelques techniques d'algèbre linéaire au cas multilinéaire des tableaux N dimensionnels. Nous nous focaliserons toutefois plus sur le cas des tableaux 3D car ils constituent la majorité des tableaux pour lesquels nous proposerons des traitements. Nous concluons ce chapitre par l'extension de la technique de décomposition en sous-espaces de l'espace d'observation.

Afin de garder une certaine homogénéité avec les notations utilisées au premier chapitre, nous utiliserons dans ce qui suit des matrices de taille $N_x \times N_t$ et des tableaux 3D de taille $N_c \times N_x \times N_t$.

2.1 Rappels d'algèbre linéaire

La décomposition en valeurs singulières est un outil très largement utilisé en traitement du signal [Deprettere88, Vaccaro91, Moonen95]. Cette décomposition consiste à trouver la base orthonormée dans laquelle peuvent s'exprimer les éléments (vecteurs ou colonnes) de la matrice considérée ; elle est également connue sous le nom d'analyse en composantes principales (ACP) et ses applications sont nombreuses (biomédical, sismique, séparation de sources, analyse de données, image, etc).

2.1.1 Espace de Hilbert

Nous travaillerons, dans ce manuscrit, dans des espaces vectoriels normés, munis d'un produit scalaire [Scharf91]. Les vecteurs représentant les séries temporelles (obtenues par numérisation des signaux), de taille N_t , font partie de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{N_t} . Les matrices, de taille $N_x \times N_t$ appartiennent elles à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$. Enfin, lorsque nous traiterons des tableaux tridimensionnels de taille $N_c \times N_x \times N_t$, ceux-ci appartiendront à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{N_c \times N_x \times N_t}$. Dans ce chapitre, nous donnons l'expression des outils dans le corps des réels \mathbb{R} , mais xterm tous peuvent être redéfinis pour le corps des complexes \mathbb{C} .

2.1.2 La décomposition en valeurs singulières (SVD)

Nous présentons la décomposition en valeurs singulières d'une matrice quelconque \mathbf{A} . Cet outil sera largement mis à contribution dans les traitements proposés au chapitre 3 et 4.

Définition

Toute matrice \mathbf{A} de $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ peut se décomposer comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (2.1)$$

où \mathbf{U} de $\mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ et \mathbf{V} de $\mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ sont des matrices orthogonales contenant respectivement les vecteurs singuliers gauches et droits de la matrice \mathbf{A} . L'opérateur T exprime la transposition. La matrice $\mathbf{\Sigma}$, de $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$, est pseudo-diagonale et possède sur sa diagonale les valeurs singulières de la matrice \mathbf{A} ordonnée de façon décroissante [Golub89]. Ceci peut se résumer comme :

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}, \\ \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}, \\ \sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{\alpha\alpha} \geq 0, \text{ avec } \alpha = \min(N_x, N_t), \text{ et } \sigma_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité. Cette décomposition est unique, et cela est assuré par la contrainte d'orthogonalité des matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} [Bronson94]. L'unicité est assurée à un facteur près et au signe près. Une fois cette décomposition réalisée, la lecture du rang de la matrice décomposée peut se faire facilement, car il est égal au nombre de valeurs singulières non nulles.

La décomposition en valeurs singulières peut également se noter comme :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^p \sigma_i \cdot (\underline{u}_i \circ \underline{v}_i). \quad (2.3)$$

Dans cette expression, p est le rang de la matrice \mathbf{A} et \circ le produit extérieur. Les u_i et v_i sont respectivement les colonnes et les lignes des matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} . Les σ_i sont les valeurs singulières associées à ces vecteurs singuliers. Le produit extérieur de deux vecteurs étant une matrice de rang 1 [Golub89], on voit, dans cette expression, que la SVD décompose la matrice \mathbf{A} en une somme pondérée de matrices de rang 1. Une matrice de rang p peut donc se décomposer, de façon unique, en une somme de p matrices de rang 1. Ce type de décomposition est également appelé *décomposition canonique*. Nous verrons plus loin la façon d'utiliser et d'interpréter cette décomposition pour la séparation de signaux sismiques.

2.1.3 Approximation de rang r d'une matrice

Il est possible d'utiliser la décomposition en valeurs singulières afin d'obtenir la meilleure approximation de rang r de la matrice considérée. La *meilleure approximation de rang r* d'une matrice, au sens des moindres carrés, est donnée par la troncature de la SVD [Scharf91]. Étant

donnée une matrice \mathbf{A} ($\in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$), de rang p , et sa SVD :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{\Sigma}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{(p-r)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{array} \right], \quad (2.4)$$

où la matrice $\mathbf{\Sigma}_r$ est diagonale et comporte les r premières valeurs singulières (rangées par ordre décroissant sur la diagonale), et $\mathbf{\Sigma}_{(p-r)}$ les $p-r$ autres valeurs singulières de la diagonale et des zéros ailleurs. Ainsi, la meilleure approximation de rang r de la matrice \mathbf{A} sera obtenue en conservant les vecteurs singuliers contenus dans \mathbf{U}_1 et \mathbf{V}_1 et les valeurs singulières de $\mathbf{\Sigma}_r$. Les autres valeurs seront mises à zéro. Ainsi, \mathbf{A}_r , l'approximation de rang r de \mathbf{A} est donnée par :

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}^T. \quad (2.5)$$

L'écart entre la matrice \mathbf{A} et son approximation obtenue par troncature de la SVD, \mathbf{A}_r , a pour norme :

$$e^2 = \text{tr} \left[(\mathbf{A} - \mathbf{A}_r)^T (\mathbf{A} - \mathbf{A}_r) \right] = \sum_{i=r+1}^p \sigma_i^2, \quad (2.6)$$

cet écart est orthogonal à \mathbf{A}_r :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}_r) \mathbf{A}_r^T = 0, \quad (2.7)$$

\mathbf{A}_r est l'approximation, au sens des moindres carrés, de \mathbf{A} [Scharf91].

2.1.4 Sous-espaces vectoriels et SVD

Les produits extérieurs des vecteurs singuliers d'une matrice engendrent une base de l'espace vectoriel contenant la matrice ($\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ pour une matrice \mathbf{A} de dimension $N_x \times N_t$). On peut alors définir des sous-espaces vectoriels sur l'espace initial de la matrice. Cet espace vectoriel peut être vu comme la somme de sous-espaces \mathbf{W}_i orthogonaux entre eux :

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{W}_k. \quad (2.8)$$

L'espace initial est généralement décomposé en deux sous-espaces :

$$\begin{aligned} \text{Le Range} : R(\mathbf{A}) &= \{\underline{x} : \underline{x} = \mathbf{A}\underline{\Theta}\}. \\ \text{Le Null space} : N(\mathbf{A}) &= \{\underline{\Theta} : \underline{x} = \mathbf{A}\underline{\Theta} = 0\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La propriété suivante est alors satisfaite :

$$\dim(R(\mathbf{A})) = \text{rang}(\mathbf{A}) = r. \quad (2.10)$$

En rapprochant ceci de la décomposition en valeurs singulières, r , le rang de la matrice \mathbf{A} , est égal au nombre de valeurs singulières non nulles de \mathbf{A} . La dimension du sous-espace nul est $p - r$. Ces sous-espaces sont définis par la SVD donnée plus haut (équation 2.4) :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\mathbf{A}) &= r, \\ \text{Range}(\mathbf{A}) &= \text{Range}(\mathbf{U}_1), \\ \text{Null}(\mathbf{A}) &= \text{Null}(\mathbf{V}_1^T). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ces définitions, classiques en algèbre linéaire, ont inspiré les méthodes dites «par sous-espaces». Ainsi, pour une matrice \mathbf{A} , dont on connaît la SVD, il est possible de «séparer» l'espace vectoriel en deux sous-espaces vectoriels orthogonaux entre eux :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{i=1}^p \sigma_i \cdot (\underline{u}_i \circ \underline{v}_i), \\ &= \sum_{i=1}^r \sigma_i \cdot (\underline{u}_i \circ \underline{v}_i) + \sum_{j=r+1}^p \sigma_j \cdot (\underline{u}_j \circ \underline{v}_j),\end{aligned}\tag{2.12}$$

où \circ est le produit extérieur. Cette décomposition de l'espace vectoriel de départ peut s'écrire comme :

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{A}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{A}_2 \rangle,\tag{2.13}$$

où $\langle \mathbf{A}_1 \rangle$ et $\langle \mathbf{A}_2 \rangle$ constituent la décomposition orthogonale de l'espace vectoriel de départ $\langle \mathbf{A} \rangle$ défini par la matrice \mathbf{A} . La somme directe d'espaces vectoriels est notée \oplus . Nous verrons au chapitre 3 la façon dont cette décomposition est utilisée pour faire de la séparation d'ondes. La distinction entre les valeurs singulières, et leurs vecteurs singuliers associés, qui permettront de construire ces sous-espaces (c.à.d. la détermination de r dans l'équation 2.12) se fait après étude de la courbe des variations des valeurs singulières (cf. Chapitre 3). Une fois déterminé le nombre de vecteurs singuliers constituant chaque sous-espace, on définit les *projecteurs* qui permettront de projeter tout vecteur sur ces sous-espaces. Ici, leur expression est :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_1 \rangle &\Rightarrow P_{\langle \mathbf{A}_1 \rangle} = \mathbf{U}_{\langle \mathbf{A}_1 \rangle} \mathbf{U}_{\langle \mathbf{A}_1 \rangle}^T, \\ \langle \mathbf{A}_2 \rangle &\Rightarrow P_{\langle \mathbf{A}_2 \rangle} = \mathbf{U}_{\langle \mathbf{A}_2 \rangle} \mathbf{U}_{\langle \mathbf{A}_2 \rangle}^T.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Dans ces expressions, les matrices $\mathbf{U}_{\langle \mathbf{A}_i \rangle}$ sont les matrices singulières dont seuls les vecteurs singuliers correspondant aux sous-espaces considérés ont été conservés. Les autres vecteurs singuliers ont été mis à zéro (même principe que la troncature de la SVD). Nous verrons dans le prochain chapitre comment ces projecteurs seront parties intégrantes des techniques de séparation d'ondes.

Après ces rappels d'algèbre linéaire, nous allons à présent exposer les outils nécessaires à l'étude des tableaux multidimensionnels. Nous étendrons également les notions que nous venons d'aborder pour les matrices au cas multidimensionnel (ou *multimodal*), et en particulier aux sous-espaces trimodaux qui nous permettront, dans le chapitre 3, de proposer des techniques de séparation d'ondes pour les mélanges trimodaux et plus largement pour les données multidimensionnelles. Nous nous focaliserons principalement sur les tableaux de dimension trois.

2.2 Éléments d'algèbre multilinéaire

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, les signaux que nous nous proposons d'étudier sont multicomposantes. Cela implique qu'ils sont naturellement «stockés» sous forme de tableaux de dimension trois (ou trimodaux). Nous présentons ici les outils qui vont nous permettre d'étendre les traitements matriciels classiques aux données sismiques de dimension trois. Ces outils peuvent être étendus à des tableaux de dimension supérieure à trois.

2.2.1 Tableaux multidimensionnels et espace de Hilbert

Un tableau de données est de dimension supérieure à deux si la nature de l'acquisition qui l'a généré est effectivement de dimension supérieure à deux. Ainsi, de façon générale, les signaux fonction d'au moins deux variables seront considérés comme multidimensionnels et pourront être ordonnés sous forme d'une matrice ou sous la forme d'un tableau de dimension N pour un signal fonction de N variables. On notera \mathcal{A} un tableau de dimension supérieure à deux :

$$\mathcal{A} = \{a_{i_1 i_2 \dots i_N}\}. \quad (2.15)$$

Dans la suite de l'exposé, un signal fonction de plus de deux variables sera vu comme un tableau de dimension supérieure à deux. Les tableaux les plus souvent rencontrés seront de dimension trois, lorsque le nombre de dimension sera égal ou supérieur à quatre, la même notation sera conservée mais il sera fait mention de la dimension effective des tableaux manipulés. Un tableau tridimensionnel \mathcal{A} à valeurs réelles et de taille $N_c \times N_x \times N_t$, définira un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^{N_c \times N_x \times N_t}$.

2.2.2 Opérations sur les tableaux de données multidimensionnels

Nous allons nous focaliser sur les tableaux de dimension trois (trimodaux). Tout ce que nous présentons peut être étendu aux tableaux de taille supérieure.

Les matrices dépliantes

Il est possible de réécrire le contenu d'un tableau de dimension N sous forme matricielle, de N façons différentes, si l'on procède au découpage du tableau par tranches. Cette opération, appelée «dépliage du tableau», donne autant de matrices que le tableau a de dimension. Les *matrices dépliantes* (pour *unfolding matrices*) obtenues à partir d'un tableau trimodal, de taille $N_c \times N_x \times N_t$, sont représentées schématiquement sur la figure 2.1. La définition et l'utilisation de ces matrices dépliantes sont issues de [DeLathauwer97]. On peut résumer ces trois matrices dépliantes par :

$$\mathcal{A} \text{ de } \mathbb{R}^{N_c \times N_x \times N_t} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_{(1)} \text{ de } \mathbb{R}^{N_c \times (N_x \cdot N_t)}, \\ \mathbf{A}_{(2)} \text{ de } \mathbb{R}^{N_x \times (N_t \cdot N_c)}, \\ \mathbf{A}_{(3)} \text{ de } \mathbb{R}^{N_t \times (N_c \cdot N_x)}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Cette opération est un réarrangement sous forme matricielle des tableaux tridimensionnels. Les trois façons de «déplier» peuvent être vues comme les trois façons de concaténer des tranches du cube, en prenant les tranches des trois façons possibles (suivant les trois dimensions).

Le produit de tableaux N-dimensionnels par des matrices

Afin d'alléger la notation des produits de tableau et d'éviter la multiplication des indices dans les expressions, nous utiliserons une notation simplifiée pour le produit de tableaux par

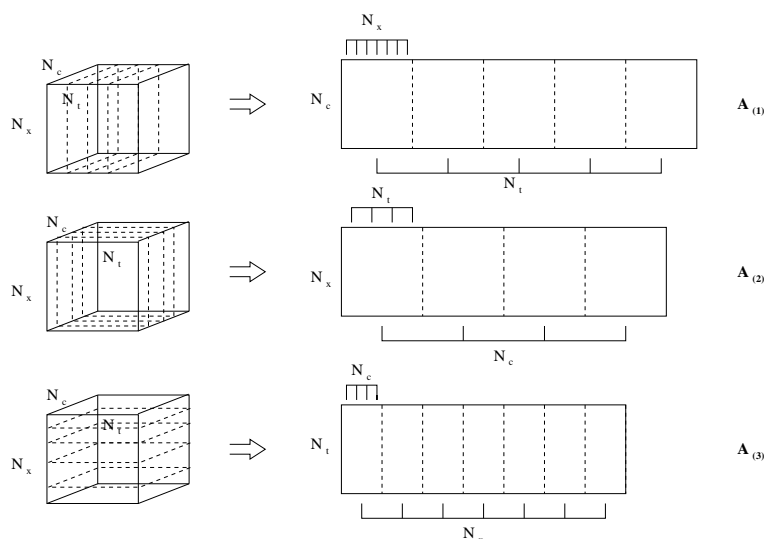


Fig. 2.1 – Matrices dépliantes d'un tableau de dimension trois.

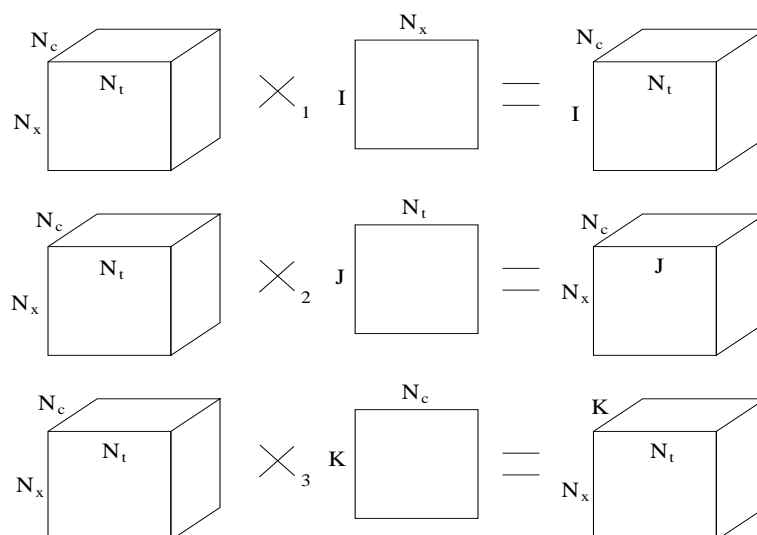


Fig. 2.2 – n -mode produits possibles entre un tableau de dimension trois ($N_c \times N_x \times N_t$) et une matrice.

des matrices. Ainsi, le n -mode produit (noté \times_n) d'un tableau \mathcal{A} de taille $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots \times I_N$ par une matrice \mathbf{B} de taille $J \times I_n$ est donné par :

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{B})_{(i_1, i_2, \dots, j, \dots, i_N)} = \sum_{i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n \dots i_N} \cdot b_{j i_n}. \quad (2.17)$$

Le résultat de cette opération est un tableau possédant autant de modes que le tableau de départ, mais dont la taille d'une de ces dimensions a été modifiée. Pour un tableau de dimension trois, on a donc trois n -modes produits possibles. Ils sont illustrés sur la figure 2.2. Il est possible de visualiser l'intérêt de cette notation sur l'exemple qui suit. La multiplication d'un tableau de dimension trois par trois matrices, suivant les trois modes du tableau, est

donnée par :

$$\mathcal{A} \times_1 \mathbf{B} \times_2 \mathbf{C} \times_3 \mathbf{D} = \sum_{i,j,k} a_{ijk} \cdot b_{i,m} \cdot c_{j,n} \cdot d_{k,o} = \mathcal{A}_{mno}. \quad (2.18)$$

Le n -mode produit est commutatif et distributif par rapport au produit matriciel. Nous utiliserons préférentiellement les n -modes produits par la suite. .

Rang des tableaux multidimensionnels

Comme dans le cas des matrices, un paramètre important est le rang du tableau. Le rang d'une matrice \mathbf{A} est le nombre minimal de matrices de rang 1 (ou *dyades*) qui, par combinaison linéaire, donnent la matrice \mathbf{A} . Pour un tableau trimodal \mathcal{A} (c.à.d. un tableau de dimension trois), le rang est égal au nombre minimal de tableaux de rang 1 qui redonnent le tableau par combinaison linéaire. Un tableau de rang 1 est égal au produit extérieur de trois vecteurs (ou *triade*). Si la détermination du rang d'une matrice est simple (en général par calcul du nombre de valeurs singulières à l'aide de la SVD), il ne l'est pas pour les tableaux trimodaux (et pour tous les tableaux de dimension supérieur à deux). En effet, seuls quelques résultats existent pour la valeur maximale possible du rang de tableaux de taille $2 \times 2 \times 2$ ou $3 \times 3 \times 3$. Ainsi, il a été montré que le rang d'un tableau de taille $2 \times 2 \times 2$ peut être égal à trois au maximum et il peut atteindre cinq pour un tableau de taille $3 \times 3 \times 3$. Il semble donc que le rang d'un tableau puisse atteindre une valeur supérieure à la plus grande de ses dimensions [Bro98]. Quelques rangs génériques de différents tableaux sont donnés dans [Comon00] pour plusieurs tailles et dimensions de tableaux. Le problème reste que, pour un tableau 3D de données provenant d'un enregistrement multicomposante, il nous sera impossible de déterminer numériquement le rang du tableau trimodal [Håstad90], car pour les tailles de tableaux que nous rencontrerons, le problème est dit «NP-complet». Il est toutefois possible d'obtenir une information sur le rang du tableau quand il est sous forme de matrices dépliantes. Un tableau de dimension N peut être «déplié» sous forme de matrices de N façons. On peut alors estimer le rang de chacune de ces matrices. C'est ce que nous appellerons le n -mode rang : $\text{rang}_n(\mathcal{A})$. D'où la définition suivante :

$$\text{rang}_n(\mathcal{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}_{(n)}). \quad (2.19)$$

Sans pouvoir connaître le rang d'un tableau \mathcal{A} , noté $\text{rang}(\mathcal{A})$, il existe tout de même quelques propriétés liant ce rang aux n -modes rangs :

$$\text{rang}(\mathcal{A}) \geq \text{rang}_n(\mathcal{A}). \quad (2.20)$$

Cette équation (2.20) indique que le rang d'un tableau peut être supérieur à la plus grande de ses dimensions. Le comportement des n -modes rangs aura un rôle important dans la décomposition d'un tableau en sous-espaces vectoriels. L'intérêt de traiter les volumes de données 3D à l'aide de techniques de décomposition de tableaux plutôt que par des techniques matricielles trouve son sens dans ces considérations sur le rang. En effet, la décomposition d'une matrice de taille $N_x \times N_t$ en éléments propres donne un nombre de matrices de rang

1 qui sera égal au maximum à $\max(N_x, N_t)$, si la matrice est de rang plein. Le fait que l'on puisse décomposer un tableau 3D de taille $N_c \times N_x \times N_t$ en plus de tableaux de rang 1 que la valeur $\max(N_c, N_x, N_t)$ traduit le fait que la décomposition des tableaux peut extraire plus d'information qu'une analyse par technique matricielle [Bro98]. Ces considérations justifient l'utilisation de la technique de décomposition de tableaux 3DSVD, que nous allons à présent introduire, pour le traitement des enregistrements sismiques multicomposantes.

À l'aide de ces notations et concepts, nous allons à présent voir comment peut se généraliser, aux tableaux multidimensionnels, la décomposition en valeurs singulières bien connues pour les matrices.

2.3 NDSVD : généralisation de la décomposition en valeurs singulières aux tableaux multidimensionnels

Initialement dénommée HOSVD, pour *Higher Order Singular Value Decomposition*, cette généralisation a été introduite par L. De Lathauwer [DeLathauwer93]. La nomenclature utilisée par l'auteur fait alors référence aux tenseurs d'ordre élevé (supérieur à deux). Nous introduisons ici une autre terminologie pour le même outil et préférons NDSVD pour la SVD d'un tableau de dimension N (ou tableau N modal); ceci pour éviter l'analogie avec les statistiques d'ordre supérieur, ou HOS (Higher Order Statistics), dont l'utilisation s'est répandue dans le domaine du traitement du signal. La version pour les tableaux 3D, que nous appellerons 3DSVD, fera l'objet d'une présentation plus détaillée car elle sera au centre de la méthode de séparation d'ondes proposée au chapitre 3. Nous allons donc présenter la décomposition en valeurs singulières des tableaux multidimensionnels ainsi que quelques unes de ses propriétés.

2.3.1 Les modèles de décomposition des tableaux multidimensionnels

L'analyse et la décomposition des tableaux de données d'ordre (ou dimension) supérieur à deux a fait l'objet de travaux depuis plusieurs années dans des disciplines telles que la psychométrie [Kroonenberg83], ainsi que la chimie ou la recherche dans l'industrie alimentaire [Bro98]. Plusieurs modèles ont été développés depuis les années 70 et les différentes méthodes existantes sont étudiées et présentées dans [Kroonenberg83, DeLathauwer97, Bro98, Comon00]. Nous allons ici nous intéresser à la HOSVD introduite par L. De Lathauwer [DeLathauwer93], que nous utiliserons pour introduire une méthode de séparation par sous-espaces dans le prochain chapitre. Nous présentons tout d'abord succinctement deux autres méthodes de décomposition de tableaux 3D : PARAFAC et les modèles de TUCKER.

PARAFAC (PARallel FACtor analysis)

Cette technique de décomposition également appelée CANDECOMP (pour «Canonical Decomposition») décompose le tableau 3D, \mathcal{A} , en une combinaison linéaire de tableau de

rang 1 :

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot (\underline{u}_i^{(1)} \circ \underline{u}_i^{(2)} \circ \underline{u}_i^{(3)}), \quad (2.21)$$

où p est le rang du tableau \mathcal{A} . Les vecteurs $\underline{u}_i^{(n)}$ correspondent aux i vecteurs singuliers dans les n directions. Ce modèle et son utilisation sont détaillés dans [DeLathauwer97, Bro98]. Une version pour les tableaux à valeurs complexes a été utilisée pour la séparation de mélanges trilineaires de sources [Bro99]. Nous n'utiliserons pas ce modèle dans la suite du manuscrit, préférant les modèles de TUCKER, car ceux-ci assurent la propriété d'orthogonalité entre des bases de décomposition suivant les trois modes du tableau, chose que ne fait pas le modèle PARAFAC [DeLathauwer97].

Les modèles de TUCKER

Le but de ce modèle est d'identifier les relations entre les trois modes. Tucker a proposé trois modèles dont le plus général (ou moins «contraint») est celui dit de TUCKER3, qui est donné par :

$$\mathcal{A}_{ijk} = \sum_{p=1}^s \sum_{q=1}^t \sum_{r=1}^g c_{pqr} \cdot u_{ip}^{(1)} \cdot u_{jq}^{(2)} \cdot u_{kr}^{(3)}. \quad (2.22)$$

Dans ce modèle, s , t et g sont les nombres d'éléments propres respectivement dans le premier, deuxième et troisième mode. Les matrices des éléments propres (les $u^{(\alpha)}$) sont considérées orthonormées. Le deuxième modèle proposé par Tucker, TUCKER2, est moins général, et se formule ainsi :

$$\mathcal{A}_{ijk} = \sum_{p=1}^s \sum_{q=1}^t \tilde{c}_{pqk} \cdot u_{ip}^{(1)} \cdot u_{jq}^{(2)}. \quad (2.23)$$

Cette formulation revient à une étude par «tranches» du volume 3D de données. Le dernier modèle, dit de TUCKER1, est donné par :

$$\mathcal{A}_{ijk} = \sum_{p=1}^s \tilde{c}_{pqk} \cdot u_{ip}^{(1)}. \quad (2.24)$$

Ce modèle n'opère donc que sur un seul des trois modes du tableau. Parmi ces trois modèles, TUCKER3 est assimilable à la SVD d'un tableau 3D. L'évaluation de la décomposition de \mathcal{A} suivant le modèle de TUCKER3 peut être réalisée par une technique de moindres carrés alternés (ALS pour «Alternating Least Squares») [Kroonenberg83]. La reformulation de ce modèle dans les termes de traitement du signal a été faite dans [DeLathauwer97] a mis en évidence une façon d'obtenir cette décomposition basée sur les SVD des matrices dépliantes du tableau.

2.3.2 NDSVD

Le modèle de TUCKER3 peut être vu d'une façon plus familière pour les «traiteurs de signaux» lorsqu'il est exprimé à l'aide de la notation utilisant les n -modes produits. L. De

Lathauwer a ainsi proposé une extension de la SVD pour les tenseurs d'ordre supérieur à deux (Higher Order Singular Value decomposition). La généralisation de ce puissant outil d'algèbre linéaire s'appréhende facilement lorsqu'on la réécrit avec les n -modes produits. Ainsi, la SVD d'une matrice est donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{V}^T, \quad (2.25)$$

elle s'exprime également, à l'aide de la notation des n -modes produits, comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \times_1 \mathbf{U} \times_2 \mathbf{V}. \quad (2.26)$$

On voit aisément dans l'expression 2.26, sachant qu'une matrice est un tableau de dimension deux, que la SVD revient à la multiplication d'un tableau-noyau (ici \mathbf{C} est un tableau de dimension 2, c.à.d. une matrice) suivant ses deux modes par des matrices orthogonales. On imagine donc que la généralisation de cette décomposition pour un tableau multidimensionnel sera donnée par la multiplication suivant tous ses modes (ou dimensions) d'un tableau-noyau par autant de matrices orthogonales qu'il y a de dimensions. Ceci s'exprime, pour un tableau \mathcal{A} N dimensionnel, par :

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}, \quad (2.27)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{C} & : \text{tableau-noyau de taille identique à } \mathcal{A}, \\ \mathbf{U}^{(i)} & : \text{matrice singulière (orthogonale) suivant le mode } i. \end{cases} \quad (2.28)$$

La NDSVD permet donc de faire une décomposition en éléments singuliers de tableaux ou de tenseurs de dimension élevée. Nous allons à présent concentrer notre attention sur le cas qui sera le plus fréquent dans la suite de ce manuscrit : les tableaux de dimension trois.

2.3.3 Cas particulier des tableaux 3D : la 3DSVD

Comme nous l'avons expliqué plus tôt, nous adopterons la notation 3DSVD pour la décomposition en éléments singuliers de tableaux de dimension trois. Nous allons à présent voir la définition et les propriétés de la 3DSVD.

Définition

Soit un tableau \mathcal{A} , de $\mathbb{R}^{N_c \times N_x \times N_t}$, sa 3DSVD est donnée par :

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}, \quad (2.29)$$

où :

- \mathcal{C} est un tableau comportant les valeurs singulières caractéristiques des interactions entre les vecteurs singuliers des trois différents modes. Il est de taille $N_c \times N_x \times N_t$.
- les matrices $\mathbf{U}^{(i)}$ contiennent les vecteurs singuliers suivant les trois directions i (ou modes) du tableau. Elles sont orthogonales et de tailles : $N_c \times N_c$ pour $\mathbf{U}^{(1)}$, $N_x \times N_x$ pour $\mathbf{U}^{(2)}$ et $N_t \times N_t$ pour $\mathbf{U}^{(3)}$.

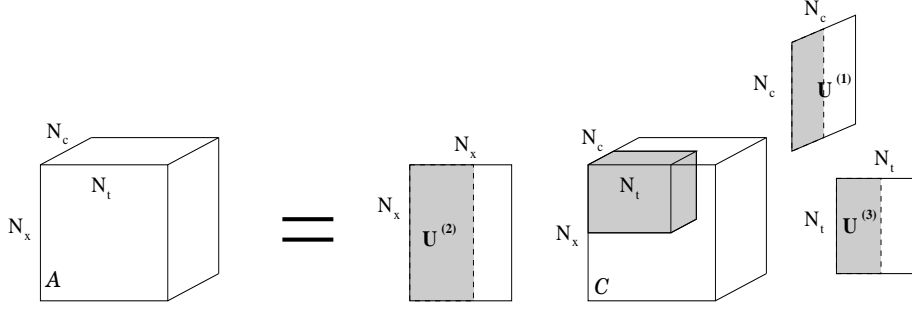


Fig. 2.3 – Représentation schématique de la 3DSVD d'un tableau 3D. Les parties grisées représentent l'équivalent du *Range* et du *Null space* pour les tableaux 3D.

Il est à noter que le tableau \mathcal{C} n'est pas pseudo-diagonal, c.à.d. qu'il comporte des valeurs non nulles hors de sa diagonale. Ce tableau possède en général des valeurs hors de sa diagonale, mais il obéit à la contrainte de tout-orthogonalité :

- orthogonalité entre deux sous-tableaux pris dans la même direction (ou même mode), et cela quel que soit le mode, $\langle \mathcal{C}_{i=\alpha}, \mathcal{C}_{i=\beta} \rangle = 0, \forall i$, avec $\alpha \neq \beta$
- décroissance de la norme des «tranches» de \mathcal{C} suivant les trois modes : $\|\mathcal{C}_{i=1}\| \geq \|\mathcal{C}_{i=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{C}_{i=N}\|, \forall i$.

Remarque : $\|\cdot\|$ est la norme de Frobenius. Elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{pour les matrices} & \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}, \\ \text{pour les tableaux } ND & \|\mathcal{A}\| = \sqrt{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} |a_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Il faut noter que les valeurs des termes du tableau \mathcal{C} ne sont pas toujours positives (contrairement aux valeurs singulières de la SVD d'une matrice) et peuvent être complexes dans le cas d'un tableau \mathcal{A} à valeurs complexes. L'étude des valeurs singulières dans le cas matriciel est simple, mais se révèle plus complexe dans le cas des tableaux 3D. Pour visualiser les valeurs singulières d'un tableau \mathcal{A} , nous examinerons les normes des «tranches» du tableau-noyau suivant les trois directions. Nous aurons alors trois courbes de valeurs singulières, contre une dans le cas des matrices. Nous qualifierons ces valeurs singulières de *trimodales*. L'étude de ces *valeurs singulières trimodales* sera un élément important de la méthode de séparation par sous-espaces proposée pour les tableaux 3D. Des courbes représentatives de ces valeurs singulières seront présentées lors de simulations dans le chapitre 3.

Nous allons à présent voir la façon d'obtenir les différents éléments de la décomposition d'un tableau 3D.

2.3.4 Estimation de la 3DSVD d'un tableau

Étant donné un tableau \mathcal{A} de $\mathbb{R}^{N_c \times N_x \times N_t}$, on peut construire trois matrices dépliantes à partir de \mathcal{A} : $\mathbf{A}_{(1)}$ de $\mathbb{R}^{N_c \times (N_x \cdot N_t)}$, $\mathbf{A}_{(2)}$ de $\mathbb{R}^{N_x \times (N_t \cdot N_c)}$ et $\mathbf{A}_{(3)}$ de $\mathbb{R}^{N_t \times (N_c \cdot N_x)}$. Ces trois matrices admettent chacune une décomposition en éléments singuliers, et il est possible de

montrer que chacune de ces décompositions peut s'exprimer comme :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{\Delta}_{(1)} \mathbf{V}^{(1)T} = \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{C}_{(1)} [\mathbf{U}^{(2)} \otimes \mathbf{U}^{(3)}]^T, \\ \mathbf{A}_{(2)} = \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{\Delta}_{(2)} \mathbf{V}^{(2)T} = \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{C}_{(2)} [\mathbf{U}^{(3)} \otimes \mathbf{U}^{(1)}]^T, \\ \mathbf{A}_{(3)} = \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{\Delta}_{(3)} \mathbf{V}^{(3)T} = \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{C}_{(3)} [\mathbf{U}^{(1)} \otimes \mathbf{U}^{(2)}]^T. \end{cases} \quad (2.31)$$

Ces trois égalités montrent que l'obtention des trois matrices $\mathbf{U}^{(i)}$ singulières de la décomposition du tableau \mathcal{A} (éq. 2.29) se fait par SVD des trois matrices dépliantes de \mathcal{A} . Ensuite, le tableau \mathcal{C} est obtenu par :

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)T} \times_2 \mathbf{U}^{(2)T} \times_3 \mathbf{U}^{(3)T}. \quad (2.32)$$

Cette estimation en deux étapes nous donne dans un premier temps les vecteurs singuliers du tableau dans les différents modes (par SVD des matrices dépliantes), suivi dans un deuxième temps des valeurs singulières ordonnées dans un tableau-noyau. Nous verrons des exemples de vecteurs singuliers trimodaux et valeurs singulières trimodales dans les simulations du chapitre 3.

Nous allons à présent nous intéresser à l'extension de la notion d'approximation de rang pour les tableaux 3D.

2.3.5 Approximation de rang(r_1, r_2, \dots, r_N)

Comme nous l'avons expliqué pour le cas des matrices, la SVD permet de déterminer la «meilleure approximation de rang r », au sens des moindres carrés, d'une matrice. Cette notion peut être étendue aux tableaux de dimension supérieure à deux et se formule alors comme un problème de détermination de la meilleure approximation de rang (r_1, r_2, \dots, r_N) . Il faut préciser que cette approximation de rang, qui consiste à trouver un sous-espace, de rang prédéterminé, qui approche au mieux (au sens des moindres carrés) le tableau de départ, ne peut pas être obtenue, pour les tableaux N dimensionnels, par troncature de la NDSVD [DeLathauwer97]. Il n'y a donc pas d'analogie exacte ici entre le cas 2D et le cas ND . L'obtention de l'approximation de rang(r_1, r_2, \dots, r_N) pour les tableaux ND se fait par des techniques dites ALS («Alternating Least Squares») ou moindres carrés alternés. Dans le cas d'un tableau 3D, la technique consiste à minimiser l'erreur quadratique entre le tableau original déplié et son approchée (troncature de la SVD de la matrice dépliantes obtenue à partir du tableau), et ceci alternativement suivant les trois modes. Pour plus de détails, on lira le chapitre 5 de [DeLathauwer97] et le chapitre 4 de [Kroonenberg83]. Nous ne détaillons pas ce point ici, et nous focalisons notre intérêt sur la décomposition en sous-espaces à l'aide la 3DSVD.

2.3.6 Sous-espaces vectoriels trimodaux et 3DSVD

Comme dans le cas matriciel, il est possible de décomposer l'espace vectoriel que définit un tableau trimodal contenant l'enregistrement d'un réseau de capteurs vectoriels. Nous voyons

ici comment cette notion peut être abordée et comment, à l'aide de la 3DSVD, nous pouvons définir une stratégie de décomposition de l'espace vectoriel original. Nous étudions également parallèlement les propriétés des vecteurs singuliers des matrices dépliantes obtenues à partir du tableau de données.

Espace vectoriel trimodal et données 3D

Nous avons vu dans la définition de la 3DSVD que les matrices dépliantes $\mathbf{A}_{(i)}$ (avec $i = 1, 2, 3$) du tableau \mathcal{A} jouent un rôle important et permettent d'obtenir les matrices singulières de la décomposition trimodale (3DSVD). Chacune de ces matrices $\mathbf{U}^{(i)}$ définit un espace vectoriel que nous noterons $\langle \mathbf{A}_{(i)} \rangle$. Les propriétés des sous-espaces vectoriels définis par ces matrices sont identiques à celles vues dans la première partie de ce chapitre. Les rangs des trois matrices dépliantes, notés r_i , sont les « i -mode rangs» du tableau 3D. Chacun des trois espaces vectoriels peut être décomposé en sous-espaces de la façon suivante :

$$\langle \mathbf{A}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{A}_{(i)} \rangle_1 \oplus \langle \mathbf{A}_{(i)} \rangle_2. \quad (2.33)$$

Ces sous-espaces ont la propriété d'être orthogonaux entre eux [Scharf91]. Si l'on cherche la décomposition de l'espace vectoriel décrit par le tableau total, il faut considérer en même temps les espaces vectoriels définis par les trois matrices dépliantes. La décomposition du tableau en deux sous-espaces vectoriels est possible en décomposant successivement les trois matrices dépliantes. Cela revient à une troncature de la 3DSVD. La décomposition ainsi obtenue pour le tableau \mathcal{A} peut s'écrire :

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle_1 \oplus \langle \mathcal{A} \rangle_2. \quad (2.34)$$

Pour réaliser la décomposition par 3DSVD du tableau \mathcal{A} , de taille $N_c \times N_x \times N_t$, on peut définir deux sous-espaces : le premier construit à partir de n vecteurs singuliers dans la première direction, p dans la deuxième et q dans la troisième; le second est alors constitué de $N_c - p$ vecteurs singuliers dans la première direction, $N_x - p$ dans la deuxième direction et $N_t - q$ dans la troisième. Ces deux sous-espaces $\langle \mathcal{A} \rangle_1$ et $\langle \mathcal{A} \rangle_2$ sont orthogonaux entre eux :

$$\langle \langle \mathcal{A} \rangle_1, \langle \mathcal{A} \rangle_2 \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Cette orthogonalité entre tableaux 3D est assurée par l'orthogonalité entre les vecteurs singuliers trimodaux $\mathbf{U}^{(i)}$ dans chacun des modes. On estime la partie de l'espace vectoriel de départ représentée par chacun des deux sous-espaces, en projetant le tableau de données de départ sur les deux sous-espaces.

Projecteurs

Par analogie avec le cas matriciel, il est possible de définir des projecteurs de l'espace original sur les sous-espaces que nous venons de définir. Les projecteurs pour la décomposition décrite dans l'équation 2.34 sont au nombre de trois et ils interviennent chacun sur un mode

de l'espace vectoriel original défini par \mathcal{A} . Un sous-espace trimodal sera alors donné par trois projecteurs provenant des SVD des trois matrices dépliantes du tableau original. Chaque matrice dépliant peut se décomposer en deux sous-espaces orthogonaux grâce à la SVD (éq. 2.13). Donc, pour une de ces matrices dépliantes $\mathbf{A}_{(i)}$, le projecteur du mode i , pour le sous-espace $\langle \mathbf{A}_{(i)} \rangle_1$, sera donné par :

$$P_1^{\mathbf{A}_{(i)}} = U_1^{(i)} U_1^{(i)T}. \quad (2.36)$$

Dans le cas d'un tableau 3D, on a trois modes : $i = 1, 2, 3$. Les trois projecteurs agissent dans les trois directions du tableau de données, ce qui donne pour les deux sous-espaces les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 \rangle &\Rightarrow \mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \times_1 P_1^{\mathbf{A}_{(1)}} \times_2 P_1^{\mathbf{A}_{(2)}} \times_3 P_1^{\mathbf{A}_{(3)}}, \\ \langle \mathcal{A}_2 \rangle &\Rightarrow \mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \times_1 P_2^{\mathbf{A}_{(1)}} \times_2 P_2^{\mathbf{A}_{(2)}} \times_3 P_2^{\mathbf{A}_{(3)}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec l'égalité suivante :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2. \quad (2.38)$$

Nous donnons le cas d'une séparation de l'espace de départ en deux sous-espaces car ce cas nous servira dans la méthode de séparation d'ondes au chapitre suivant. Toutefois, on peut séparer l'espace vectoriel de départ en plus de deux sous-espaces. On définit le projecteur, pour un tableau 3D, sur un sous-espace quelconque n comme :

$$\mathcal{P}_{\langle \mathcal{A}_n \rangle} : \times_1 P_n^{\mathbf{A}_{(1)}} \times_2 P_n^{\mathbf{A}_{(2)}} \times_3 P_n^{\mathbf{A}_{(3)}}. \quad (2.39)$$

Comme dans le cas des matrices, la somme de deux projecteurs permettant de décomposer un espace de départ en deux sous-espaces, donne l'opérateur identité. Si l'on somme les deux projetées, on retrouve le tableau original. Les deux projecteurs sont alors également orthogonaux entre eux :

$$P_{\langle \mathcal{A}_1 \rangle} P_{\langle \mathcal{A}_2 \rangle} = 0. \quad (2.40)$$

Toutes ces propriétés font que ces projecteurs, définis ici pour les tableaux tridimensionnels mais valables pour des tableaux N dimensionnels, sont la généralisation des projecteurs connus pour les matrices [Scharf91].

Le rang des sous-espaces ainsi défini sera contrôlé par le nombre de vecteurs singuliers choisis dans chaque direction. La propriété suivante sur le n -rang sera alors observée :

$$rang_n(\mathcal{A}) = rang_n(\mathcal{A}_1) + rang_n(\mathcal{A}_2), \quad (2.41)$$

les \mathcal{A}_i étant les projetées du tableau de départ sur les deux sous-espaces. Cette propriété peut également est une généralisation du cas matriciel. Si le tableau de données de départ \mathcal{A} est de rang (R, P, Q) , et si le premier sous-espace est de rang (r_1, r_2, r_3) , le deuxième sous-espace sera de rang $(R - r_1, P - r_2, Q - r_3)$. L'étude de ces rangs se fera à l'aide des valeurs singulières trimodales.

Nous verrons dans le chapitre 3 la façon dont les projecteurs trimodaux nous permettent de définir une méthode de séparation d'ondes par sous-espaces pour les tableaux tridimensionnels.

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques rappels d'algèbre linéaire et principalement la décomposition en valeurs singulières permettant de définir des sous-espaces orthogonaux entre eux. Des éléments d'algèbre multilinéaire ont ensuite été introduits, pour la manipulation des tableaux multidimensionnels principalement dans le cas 3D. Le point important de ce chapitre a été l'introduction de la 3DSVD, extension de la SVD pour les tableaux tridimensionnels. Les propriétés de cette décomposition ont été exposées ainsi que la façon de l'obtenir. Nous avons ensuite présenté l'aptitude de la 3DSVD à décomposer l'espace vectoriel des observations (tableau tridimensionnel original) en sous-espaces orthogonaux. Les outils définis dans ce chapitre vont directement être mis en application dans le chapitre 3 où ils seront à la base d'une technique de séparation d'ondes par sous-espaces.

Chapitre 3

Séparation d'ondes sismiques multicomposantes

Dans ce chapitre, nous présentons l'aptitude de la 3DSVD à faire de la séparation d'ondes multicomposantes. Après une présentation non-exhaustive des techniques de séparation d'ondes basées sur l'algèbre matricielle, nous présentons une nouvelle méthode de séparation d'ondes utilisant la décomposition en valeurs singulières de tableaux trimodaux présentée au chapitre 2. Nous définissons une méthode de séparation des ondes sismiques polarisées par application de la 3DSVD directement sur les données multicomposantes. Ce chapitre se propose de faire la présentation théorique de la nouvelle technique que nous appellerons «méthode de séparation d'ondes par sous-espaces trimodaux». La méthodologie et les prétraitements nécessaires pour son utilisation sont exposés. Des résultats de simulations sont présentés, qui montrent l'intérêt de cette technique et l'amélioration des résultats de séparation apportés par la prise en compte de l'ensemble des données simultanément dans le traitement. Une comparaison avec la technique 2D équivalente (utilisant la SVD) est proposée.

Nous avons introduit dans le chapitre précédent l'analyse en composantes principales pour les tableaux de dimension trois (3DSVD). Nous allons voir son utilisation en séparation d'ondes sur des données multicomposantes. La technique présentée est la généralisation d'un traitement classiquement utilisé pour les signaux bidimensionnels (signaux recueillis sur des antennes «classiques» à capteurs scalaires)[Glangeaud94]. Le terme de généralisation est utilisé car le traitement proposé contient intrinsèquement le traitement 2D et pourrait également être étendu à des volumes de données plus importants (de dimension 4 ou plus). Toutefois, les motivations qui ont amené à l'élaboration de ces traitements relèvent de besoins réels d'outils pour le traitement de signaux rencontrés fréquemment en sismique. Les cas de données possédant plus de trois dimensions sont encore rares (ils existent toutefois en sismique quand on utilise des capteurs multicomposantes placés en réseaux bidimensionnels) et ne sont pas assez développés à l'heure actuelle pour envisager des traitements adaptés. Ce chapitre expose en détails la méthode que nous proposons à l'aide de simulations sur données sismiques synthétiques. Nous appliquons directement la 3DSVD sur les données sismiques, ce qui est l'extension du traitement par SVD classiquement utilisé en sismique [Freire88, Jackson91, Teakle95, Mars95], et présentons les résultats de la méthode par sous-espaces trimodaux. Parallèlement, nous proposons un traitement consistant en l'extension de l'utilisation de la matrice spectrale [Mermoz69] pour les signaux multicomposantes. Cette méthode appelée «tableau spectral» est étudiée dans l'annexe A. La partie théorique de cette technique spectrale est présentée dans cette annexe. La matrice spectrale est très couramment utilisée en sismique [Mars88, Samson83, Glangeaud89, Fookes95, Gounon98] dans sa version matricielle. Nous présentons dans l'annexe A quelques simulations pour comparaison avec la technique par SVD exposée dans ce chapitre. Une version du traitement par TKL [Hemon78, Hsu90, Liu99] a également été développée pour le traitement des signaux multicomposantes [Lebihan00b]. Ce traitement par 3DTKL n'est pas présenté ici.

Après quelques rappels sur les techniques de séparation d'ondes en sismique, nous nous intéresserons au traitement des signaux sismiques monocomposantes par SVD. Cette technique sera ensuite étendue aux signaux multicomposantes à l'aide de la 3DSVD.

3.1 Traitements 2D en séparation d'ondes sismiques

Nous passons en revue ici uniquement quelques uns des traitements matriciels utilisés en sismique. Il existe un nombre important d'autres traitements [Yilmaz87, Mars87, Yilmaz01, Glangeaud97], que nous ne détaillons pas. Il est possible de classer ces traitements en catégories selon l'espace de représentation où se fait la séparation d'ondes. Le passage d'un espace à un autre est souvent lié à l'application d'une transformation de Fourier, ou d'autres transformées ($\tau - p$ [Dietrich88, Deans83], temps-fréquence [Flandrin93, Mars92], temps-échelle [Nguyen99b, Nguyen99a, Nguyen00]). Pour un rappel des techniques classiques existantes, nous conseillons la lecture du chapitre 1 de [Thirion95a] ainsi que la partie II de [Glangeaud97] et [Coppens01, Lacoume00]. Des techniques de séparation paramétriques ont également été

proposées pour les signaux sismiques multicomposantes [Esmersoy90, Essebar97]. Depuis une dizaine d'années, l'introduction des statistiques d'ordre supérieur en traitement du signal a également permis le développement de nouvelles méthodes de séparation d'ondes [Gaeta91, Lacoume92, Comon94a, Cardoso93, DeLathauwer97] qui ont trouvé application en sismique [Thirion95a, Thirion95b, Thirion96a]. L'application de ces méthodes de séparation d'ondes basées sur les statistiques d'ordre supérieur a donné par ailleurs des résultats sur les signaux sismiques multicomposantes et donné lieu à des publications par l'auteur [Lebihan98, Lebihan99, Lebihan00a, Lebihan00c, Lebihan01b]. Ces résultats ne sont pas présentés dans ce manuscrit.

Avant de présenter les traitements basés sur l'analyse en composantes principales des tableaux 3D, nous explicitons les techniques de séparation 2D classiques en sismique.

3.1.1 Séparation d'ondes par SVD

L'utilisation de la décomposition en valeurs singulières en sismique est apparue naturellement du fait qu'une section sismique obtenue à partir d'un réseau de capteurs scalaires est une matrice, de $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$, souvent rectangulaire car le nombre d'échantillons temporels est en général plus important que le nombre de capteurs ($N_t > N_x$). On peut donc légitimement penser que la décomposition en valeurs singulières directement appliquée sur une section sismique, comme celle représentée sur la figure 3.1, peut permettre de déterminer une base de vecteurs singuliers droits et gauches susceptibles de décrire les ondes présentes sur la section. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la SVD permet de décomposer

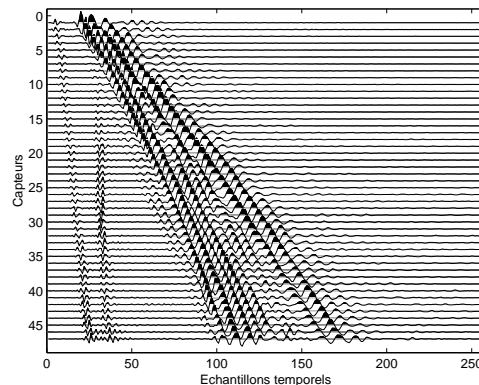


Fig. 3.1 – Section sismique 2D. Les capteurs décrivent la dimension *distance* (taille N_x) et les échantillons temporels décrivent la dimension *temps* (taille N_t). Données M. Dietrich.

l'espace des observations en deux sous-espaces orthogonaux entre eux («sous-espace signal» et «sous-espace bruit»). De là découle la possibilité de faire de la séparation d'ondes avec la SVD. En effet si, dans le cas d'une section sismique où seulement deux ondes sont présentes, la décomposition en deux sous-espaces fait que chacune des ondes du mélange initial se retrouve dans un des deux sous-espaces, la séparation des ondes est effectuée.

La détermination du nombre de vecteurs singuliers (et valeurs singulières associées) consti-

tuant le sous-espace signal est l'étape la plus «hasardeuse» car elle ne suit pas de règle bien établie et se fait à l'appréciation, par l'interpréteur, du résultat. Il existe toutefois des critères [Tas84] mais ils restent peu convaincants, particulièrement dans le cas de données réelles.

Nous allons voir quelques exemples, sur des section sismiques simulées, qui permettront de mettre en lumière les possibilités et les limites de la séparation par SVD appliquée à une section sismique. Nous présentons également une variante de la SVD pour les signaux multicomposantes s'appliquant capteurs à capteurs [Jackson91, Vidale86, Glangeaud01]. Cette version multicomposante correspond toutefois à un traitement matriciel et n'utilise pas simultanément toute l'information disponible sur l'enregistrement multicomposante.

SVD sur sections sismiques scalaires

Nous nous plaçons dans le cas d'une section sismique de $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$. La matrice $\mathbf{S}(x, t)$ correspondant à cette section est alors une matrice de nombres réels et sa décomposition par SVD s'écrit :

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T. \quad (3.1)$$

Nous avons également vu que cette décomposition est une décomposition en matrices de rang 1, que nous appellerons des *sections propres*, la façon suivante :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^p \sigma_i \cdot (\underline{u}_i \circ \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^p (\text{Section propre})_i. \quad (3.2)$$

Chaque *section propre* est constituée d'un vecteur singulier droit et d'un vecteur singulier gauche qui, par produit extérieur, donnent une matrice de taille identique à la section sismique de départ. Chaque section propre est pondérée par une valeur singulière qui peut s'identifier comme un terme d'amplitude. La somme de toutes les sections propres redonne la section sismique originale. La séparation de l'espace de départ en sous-espaces signal et bruit est donnée par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{signal} + \mathbf{S}_{bruit} = \sum_{i=1}^q \sigma_i \cdot (\underline{u}_i \circ \underline{v}_i) + \sum_{j=q+1}^p \sigma_j \cdot (\underline{u}_j \circ \underline{v}_j), \quad (3.3)$$

où q correspond au nombre de sections propres liées aux valeurs singulières significatives. En termes de sismique, les deux bases de vecteurs singuliers gauches et droits peuvent être vues comme des bases décrivant les ondelettes sismiques propres (pour la matrice \mathbf{V}) et les variations d'amplitudes propres de ces ondelettes le long de la section (pour la matrice \mathbf{U}). La section propre, $\underline{u}_i \circ \underline{v}_i$, décrit le comportement de la $i^{\text{ème}}$ ondelette propre sur l'ensemble des capteurs. Dans chaque section propre le vecteur ligne \underline{v}_j représente la variation temporelle de l'ondelette propre reçue sur chaque capteur. Les composantes u_{kj} de \underline{u}_j décrivent les variations d'amplitude de capteur à capteur. Les vecteurs \underline{v}_j et \underline{u}_j étant normalisés, la valeur singulière σ_j donne l'amplitude moyenne, racine carré de l'énergie, de la section propre. Afin d'illustrer le comportement de ce traitement et les spécificités de son utilisation, nous détaillons quelques exemples simulés d'application de la SVD sur des sections sismiques représentant des cas susceptibles d'être observés sur des enregistrements sismiques.

3.1.2 Simulations

Dans les simulations présentées, nous fixons les tailles des sections sismiques à $N_x = 10$ et $N_t = 128$. Les ondes utilisées pour ces simulations sont présentées sur la figure 3.2. L'*Onde*

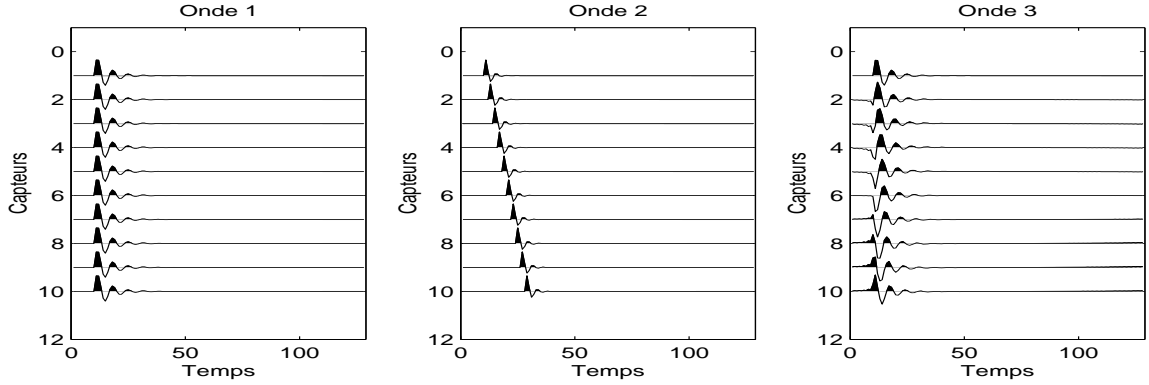


Fig. 3.2 – Ondes utilisées lors des simulations.

1 sera dénommée «de vitesse apparente infinie», car l'onde arrive sur tous les capteurs au même instant. Lorsque ce phénomène n'est pas directement réalisé sur des données réelles, il peut être obtenu après un prétraitement appelé «correction de vitesse». Nous verrons que ce prétraitement est nécessaire pour un bon fonctionnement de la séparation d'ondes par SVD. L'*Onde 2* possède une vitesse apparente finie. L'amplitude de ces deux ondes sur le réseau de capteurs sera supposée constante. L'*Onde 3* modélisera une onde «dispersive». La dispersion introduit un déphasage de l'onde en fonction de la distance (le long des capteurs). Cette modélisation est réaliste sur un faible nombre de capteurs, mais ne l'est plus sur la totalité d'un enregistrement sismique réel. En effet, le comportement des ondes dispersives est tel que leur contenu fréquentiel évolue avec la distance, ce qui se traduit par une variation du support temporel du signal. Nous ne modéliserons pas cet effet, et supposerons le support temporel constant. Lors de l'application de la SVD sur données réelles, cette hypothèse pourra rester valable en travaillant sur quelques traces sismiques et non pas toute la section sismique. Nous utiliserons ces trois ondes dans l'ensemble des simulations (fig. 3.2). Le bruit simulé sera gaussien ainsi que blanc spatialement et fréquentiellement. Les valeurs de rapport signal à bruit (RSB) données dans les simulations sont définies comme :

$$RSB = 10. \log \frac{\|Signal\|}{\|Bruit\|}, \quad (3.4)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de Frobenius de la section sismique contenant le signal ou le bruit (cf. chapitre 2).

Cas d'une onde de vitesse apparente infinie additionnée à du bruit

Nous nous plaçons dans le cas où le réseau de capteurs a enregistré une onde et du bruit additif. Nous avons donc l'*Onde 1* à laquelle est ajouté du bruit (fig. 3.3). Nous effectuons la

SVD de cette section sismique. La courbe des valeurs singulières est donnée sur la figure 3.4. On voit que la première valeur singulière est nettement plus forte que les autres. Cela veut dire que lorsqu'on va décomposer la section sismique en *sections propres*, une grande partie de l'amplitude de la section sera contenue dans la première d'entre elles.

En faisant le parallèle avec la SVD pour une matrice, les sections propres sont des matrices de rang 1 (cf. Chapitre 2). Ainsi, un évènement sismique sera décrit par une seule section propre si il est le produit extérieur d'un vecteur singulier gauche par un vecteur singulier droit de la SVD. Pour que cela se produise, il faut que l'onde sismique soit de vitesse apparente infinie sur le réseau de capteurs.

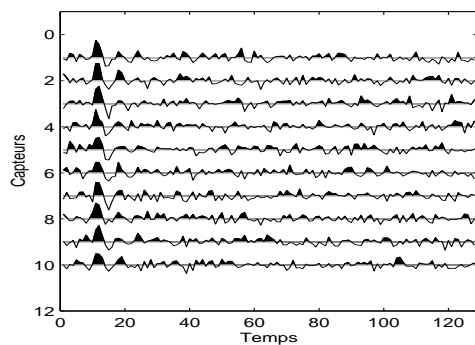


Fig. 3.3 – Cas d'une onde de vitesse apparente infinie (*Onde 1*) et du bruit. RSB=-5 dB.

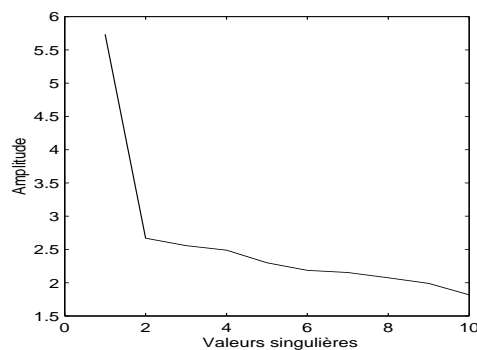


Fig. 3.4 – Valeurs singulières obtenues par SVD.

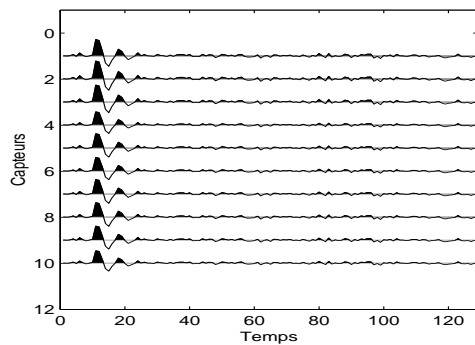


Fig. 3.5 – Sous-espace signal obtenu à partir d'une seule section propre correspondant à la première valeur singulière.

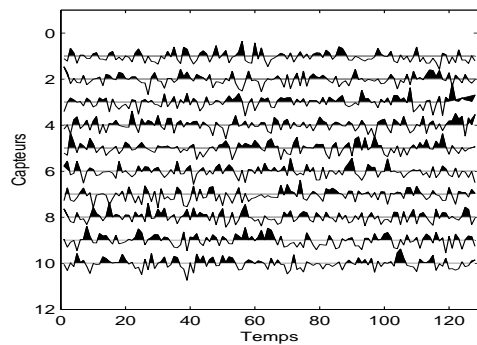


Fig. 3.6 – Sous-espace bruit obtenu à partir des neuf dernières sections propres.

Sur le sous-espace signal comportant une seule section propre (fig 3.5) l'onde est bien retrouvée. Il reste du bruit, dans ce sous-espace, résultant de légers alignements de composantes du bruit suivant la distance (verticalement). Cela se comprend également du fait que

la section sismique sans bruit est de rang 1, et la section de bruit seul est de rang plein avec toutes les valeurs singulières d'amplitudes assez proches. La somme des deux donne une matrice de rang plein, avec une première valeur singulière très forte par rapport aux autres. La décomposition de la section bruitée fera donc apparaître un peu de bruit sur la première section propre. Sur la figure 3.7, nous avons représenté le sous-espace signal avec les deux vecteurs singuliers gauches (matrice \mathbf{U} de la décomposition en SVD) et droits (matrice \mathbf{V}) utilisés pour former cette première section propre. On voit sur ces deux vecteurs, de petites

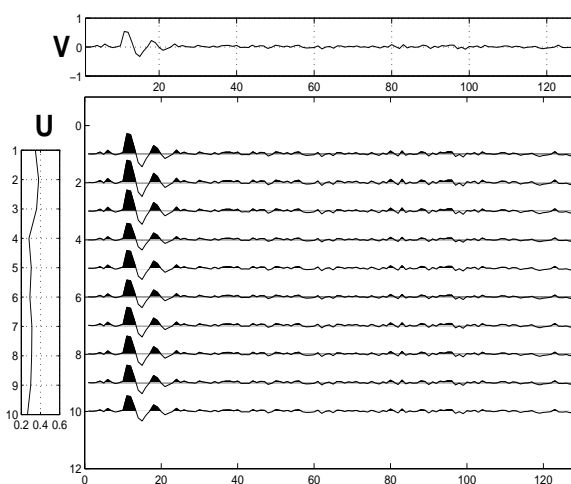


Fig. 3.7 – Cas d'une onde de vitesse apparente infinie bruitée. Sous-espace signal (fig. 3.5) obtenu à partir de la première section propre construite avec les premiers vecteurs singuliers de \mathbf{U} et \mathbf{V} .

fluctuations qui sont dues au bruit. Néanmoins, l'estimation de l'ondelette propre (premier vecteur de \mathbf{V}) et du comportement sur l'antenne (premier vecteur de \mathbf{U}) permet de retrouver l'onde sismique.

Ce premier exemple de simulation permet de voir un cas de figure favorable pour le traitement par SVD. Lorsque l'onde que l'on cherche à extraire possède une vitesse apparente infinie sur l'antenne, il suffit de prendre la première section propre pour former le sous-espace signal et ainsi extraire l'onde du bruit ambiant. Ceci nécessite un *a priori* fort, car il faut que l'onde soit «alignée» verticalement, ce qui suppose une connaissance de sa vitesse. Le prétraitement consistant à aligner une onde est assez classique et fréquent en sismique, ce qui permet l'utilisation de la SVD. Le traitement est tout de même conditionné par une bonne qualité d'alignement de l'onde. Nous allons voir comment se comporte le traitement lorsque l'onde n'a pas une vitesse apparente infinie sur l'antenne.

Cas d'une onde de vitesse apparente quelconque additionnée à du bruit

Dans cet exemple, c'est encore l'*Onde 1* qui est considérée, mais nous avons modifié sa vitesse apparente sur l'antenne. Elle n'est donc plus infinie et se caractérise par une inclinaison de l'onde dans l'image (fig. 3.8), représentant un temps de retard augmentant de façon constante le long de l'antenne. Une fois cette onde additionnée à du bruit (fig. 3.9), nous

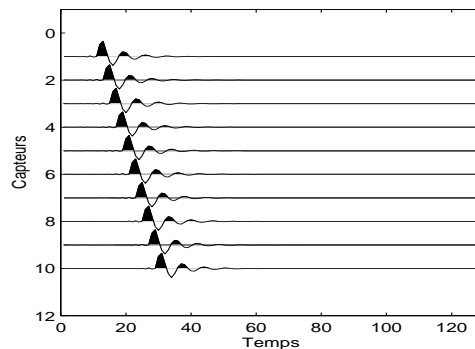


Fig. 3.8 – Cas d'une onde de vitesse apparente quelconque bruitée. *Onde 1* avec vitesse quelconque avant d'être additionnée au bruit.

faisons la SVD de cette section sismique simulée. Les valeurs singulières sont représentées sur la figure 3.10. Même avant l'addition de bruit, la matrice représentant l'*Onde 1* avec une certaine vitesse apparente est de rang plein. Elle ne peut donc pas être représentée avec une seule section propre car son amplitude est répartie sur toutes les valeurs singulières et il faut toutes les sections propres pour la reconstruire.

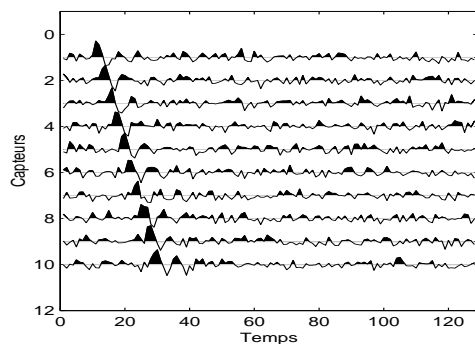


Fig. 3.9 – Cas de l'*Onde 1* de vitesse apparente quelconque additionnée à du bruit. RSB=-5 dB.

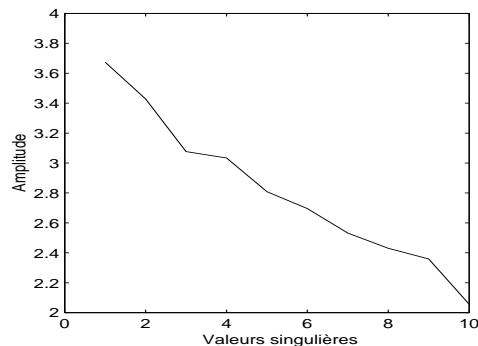


Fig. 3.10 – Valeurs singulières obtenues par SVD.

La séparation par sous-espace n'est pas efficace dans ce cas de figure, car elle ne permet pas d'isoler l'onde du bruit ambiant (fig. 3.11), même avec cinq sections propres (c.à.d. la moitié des sections propres car le rang est ici de 10). Le sous-espace signal contient une partie du signal et du bruit (fig. 3.11) et il en est de même pour le sous-espace bruit (fig. 3.12). La courbe de variation des valeurs singulières (fig. 3.10) ne possédant pas de «cassure» ou de décroissance plus rapide est un indice sur le mauvais fonctionnement du traitement par SVD. Par contre, dans le cas où la courbe des valeurs singulières a l'allure de la figure 3.4, la SVD permettra de faire une séparation entre signal et bruit. Nous allons voir à présent comment

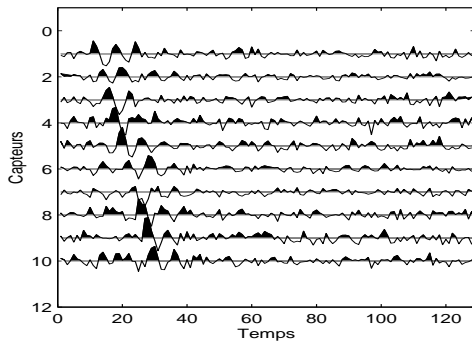


Fig. 3.11 – Sous-espace signal obtenu à partir des cinq sections propres correspondant aux premières valeurs singulières.

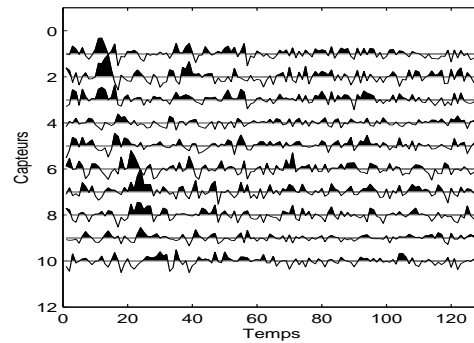


Fig. 3.12 – Sous-espace bruit obtenu à partir des cinq dernières sections propres.

se comporte la SVD dans le cas où une onde dispersive a été enregistrée sur le réseau de capteurs.

Cas d'une onde dispersive de vitesse apparente infinie

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous modélisons la dispersion par un déphasage constant de l'onde entre capteurs. Cette approximation est valable pour un faible nombre de capteurs. Nous verrons, au chapitre 5, comment se placer dans ces conditions sur données réelles. Nous supposons également qu'une onde dispersive reste à support temporel constant sur la distance que nous traitons, c.à.d. sur le nombre de capteurs considérés. Cette hypothèse est valable sur quelques capteurs et il est possible, dans le cas de données réelles, de se placer dans des conditions qui vérifient ces hypothèses. L'onde considérée est donc celle dénommée *Onde 3* sur la figure 3.2.

Une décomposition par SVD de la section sismique contenant uniquement l'*Onde 3* (fig. 3.13) nous permet de voir que deux valeurs singulières sont non nulles (fig. 3.14).

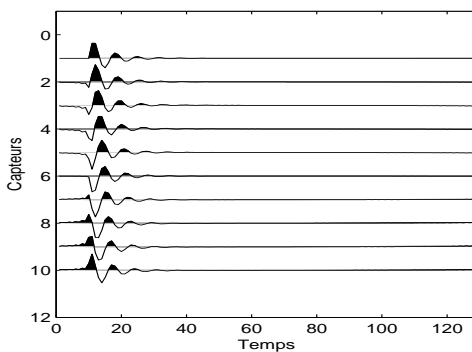


Fig. 3.13 – *Onde 3* sans bruit. Simulation d'une onde dispersive.

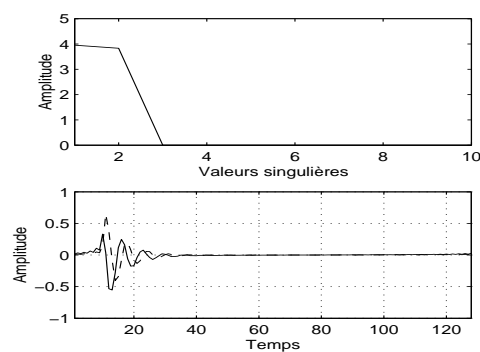


Fig. 3.14 – Valeurs singulières obtenues par SVD et deux premiers vecteurs singuliers de \mathbf{V} pour l'*Onde 3* seule.

Il faut donc deux sections propres pour reconstruire la section sismique contenant une onde dispersive seule. Autrement dit, une onde dispersive est représentée par une matrice de rang 2. On peut voir sur la figure 3.14 les deux premiers vecteurs singuliers de la décomposition de l'*Onde 3* seule. Ces deux «ondelettes propres» sont transformées de Hilbert l'une de l'autre. Il est possible de voir sur la figure 3.14 que les deux ondelettes sont en quadrature. Le fait que la SVD trouve ces deux ondelettes s'explique par le fait que la base des ondelettes propres estimée est une base orthogonale et également par le fait que l'onde dispersive est une onde à support temporel fixe. En effet, de ce fait, seules deux ondelettes propres sont nécessaires pour reconstruire le comportement de l'onde dispersive sur le réseau de capteurs et ces deux ondelettes forment une «paire de Hilbert» (elles sont transformées de Hilbert l'une de l'autre) du fait de l'orthogonalité entre une fonction et sa transformée de Hilbert.

Nous ne présentons pas le cas où l'onde dispersive est additionnée à du bruit, le comportement de la SVD est identique à celui observé dans le cas d'une onde de vitesse infinie, au détail près que deux sections propres seront toujours nécessaires pour reconstruire l'onde dispersive. La quantité de bruit qui sera estimée avec l'onde dispersive sera plus grande que pour une onde non dispersive du fait de la répartition de l'amplitude du bruit sur toutes les valeurs singulières. Nous allons voir à présent le cas où le réseau de capteurs a été illuminé par deux ondes additionnées à du bruit.

Cas d'un mélange de deux ondes de vitesse apparente différentes additionné à du bruit

Nous simulons ici un mélange de deux ondes dont une possède une vitesse apparente infinie (*Onde 1*) et l'autre une vitesse apparente quelconque (*Onde 2*).

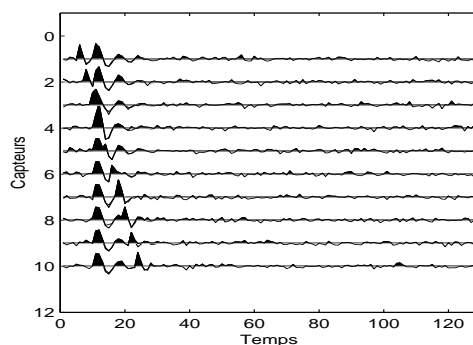


Fig. 3.15 – Données simulées avec deux ondes de vitesses différentes et du bruit. RSB=-1.5 dB.

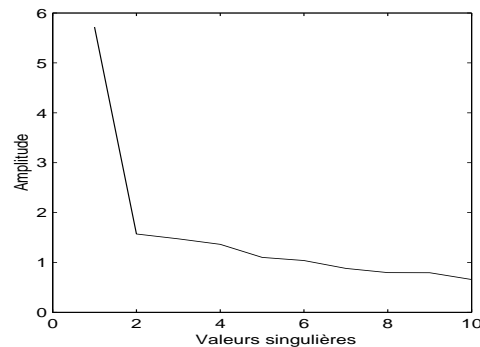


Fig. 3.16 – Valeurs singulières obtenues par SVD.

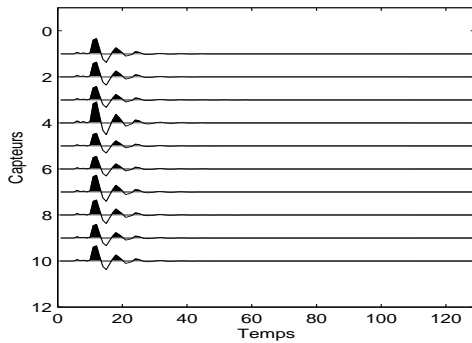


Fig. 3.17 – Sous-espace signal obtenu à partir d'une section propre correspondant à la première valeur singulière.

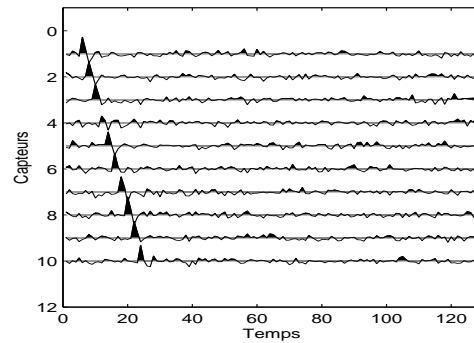


Fig. 3.18 – Sous-espace bruit obtenu par soustraction du sous-espace signal (fig. 3.17) de la section de départ (fig. 3.15).

La section que nous nous proposons de traiter par SVD est représentée sur la figure 3.15. Nous effectuons donc la SVD de cette section sismique. Les valeurs singulières sont représentées sur la figure 3.16. Sur cette courbe, on voit que la première valeur singulière est prédominante. On construit alors le sous-espace signal à l'aide d'une seule section propre (fig. 3.17). Le sous-espace bruit (fig. 3.18) est obtenu par soustraction du sous-espace signal de la section originale. Dans le sous-espace signal (fig. 3.17), on retrouve l'onde de vitesse infinie. Dans le sous-espace bruit (fig. 3.18), on retrouve la deuxième onde ainsi que le bruit (qu'il n'est pas possible de séparer l'un de l'autre du fait de la vitesse apparente de l'*Onde 2*, cf. cas de simulation traité plus haut). On remarque qu'au croisement des deux ondes (capteur numéro 4), l'*Onde 2* n'est pas correctement retrouvée dans le sous-espace bruit (fig. 3.18), et l'*Onde 1* est, elle, retrouvée avec une amplitude plus forte qu'elle n'avait avant le mélange (fig. 3.2). Ce problème est dû au fait que la décomposition par SVD confond les deux ondes lorsqu'elles se chevauchent. C'est une limitation de la technique par SVD, car il n'est pas possible de séparer deux événements ayant des temps d'arrivées identiques par cette méthode algébrique. Si deux ondes ont la même vitesse apparente sur le réseau de capteurs, la SVD ne peut pas réussir à les séparer car elle trouve une ondelette propre décrivant les deux ondes à la fois. Nous reviendrons sur ce problème lors de l'étude de la 3DSVD.

Nous avons montré, sur quelques exemples, le comportement de la SVD en fonction des caractéristiques des ondes recueillies sur le réseau de capteurs : vitesse apparente, dispersion, croisement avec une autre onde. Ce traitement permet de faire de la séparation d'ondes assez facilement sous la condition que l'onde à isoler concentre son amplitude sur une ou deux valeurs singulières. Cette contrainte, assez forte, fait que la SVD est en général utilisée après un prétraitement de correction de vitesse (alignement vertical sur la section) de l'onde à extraire. Avant de passer à l'étude de la 3DSVD, présentons une autre version du traitement par SVD utilisé pour les données multicomposantes, mais basée sur une technique matricielle.

3.1.3 SVD par polarisation sur sections sismiques multicomposantes

Dans le cas de signaux multicomposantes, on peut appliquer la SVD capteur à capteur. Si l'on se place dans le cas d'une antenne de N_x capteurs possédant chacun N_c composantes, il est possible de considérer, pour chaque capteur, les N_c signaux enregistrés comme une matrice de $\mathbb{R}^{N_c \times N_t}$ (pour N_t échantillons temporels par signal). On a alors N_x matrices de cette taille. Les SVD de ces N_x matrices pratiquées indépendamment constituent ce que l'on appelle le traitement de «SVD par polarisation». Chacune des SVD donnera une base d'ondelettes et caractérisera un comportement non plus sur le réseau de capteurs mais entre les composantes, et ce, à chaque capteur. L'expression de ces décompositions en valeurs singulières sera donnée par :

$$\mathbf{S}_{n_x}(c, t) = \mathbf{W}_{n_x} \mathbf{\Delta}_{n_x} \mathbf{V}_{n_x}^T, \quad (3.5)$$

où \mathbf{W}_{n_x} est la matrice des relations inter-composantes pour le capteur à la position n_x et \mathbf{V}_{n_x} la matrice des ondelettes propres pour le même capteur. Ce traitement s'avère intéressant car il permet d'estimer la polarisation (relation inter-composantes) de l'onde sismique contenue dans le sous-espace signal. Par contre, le fait qu'on ait au maximum quatre composantes par capteur (un hydrophone et trois géophones) réduit le nombre d'éléments propres qui constituent la base orthonormée de décomposition de chaque matrice. De ce fait, la «SVD par polarisation» se révélera inefficace dans les cas où la partie signal doit être représentée par plusieurs vecteurs singuliers (sous-espace signal de rang élevé). Cela dépendra également de l'allure de la courbe de valeurs singulières. Un inconvénient de ce traitement est qu'il ne tient pas compte de l'information que constitue le comportement de l'onde sismique sur l'antenne. En effet, en travaillant capteur à capteur, il est fait abstraction de l'information *distance*. Nous ne présentons pas de simulations pour ce traitement, son utilité ayant été montrée dans [Jackson91, Glangeaud01], où l'information inter-composantes est exploitée dans le traitement. Nous présenterons toutefois les résultats que cette technique permet d'obtenir dans le chapitre 5, sur des données provenant d'une acquisition marine par OBC (Ocean Bottom Cable).

Nous avons vu deux traitements matriciels des sections sismiques basés sur la SVD. Le premier cherche une base d'«ondelettes propres» et les «comportements le long de l'antenne». Le second cherche une base d'«ondelettes» et de «comportements inter-composantes». Nous verrons comment l'utilisation de la 3DSVD sur les données sismiques multicomposantes permet de combiner ces deux types de traitements en un seul, exploitant les informations *distance*, *temps* et *polarisation*.

Une étude comparative entre la SVD et d'autres méthodes est faite dans [Glangeaud94], pour les signaux sismiques. Nous allons maintenant aborder la partie de ce chapitre consacrée aux traitements des signaux vectoriels basés sur la décomposition en éléments propres des tableaux multidimensionnels (3DSVD).

3.2 Séparation d'ondes sismiques polarisées par méthode de sous-espaces trimodaux (application de la 3DSVD)

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est possible de décomposer l'espace vectoriel trimodal, que définit un tableau 3D, en sous-espaces vectoriels orthogonaux entre eux. Cette propriété va nous permettre de définir une technique de séparation d'ondes sismiques particulièrement adaptée aux signaux multicomposantes. Cet outil sera l'extension de la séparation par SVD sur sections sismiques monocomposantes à la séparation par sous-espaces par 3DSVD sur sections sismiques multicomposantes. Nous montrons ici comment la prise en compte de toutes les composantes des capteurs à la fois, c.à.d. le traitement du tableau de données dans son ensemble, permet d'accroître l'efficacité de la séparation d'ondes. Une comparaison sera donnée avec le traitement par SVD effectué indépendamment sur les composantes.

3.2.1 Modélisation du problème

Nous nous proposons de faire de la séparation d'ondes à l'aide de la 3DSVD directement appliquée sur le tableau de données. Soit un réseau de N_x capteurs vectoriels, possédant chacun N_c composantes. Chacune des composantes de chaque capteur est un signal de taille N_t . Le réseau de capteurs multicomposantes reçoit :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} \times_3 \underline{\mathbf{s}}(t) + \mathcal{N}, \quad (3.6)$$

où le tableau de données 3D est \mathcal{Y} . Il est de dimension $N_c \times N_x \times N_t$. Le tableau de mélange est noté \mathcal{A} , et il est, comme le tableau de données, de taille $N_c \times N_x \times N_t$. Le tableau \mathcal{N} représente le bruit que nous supposons blanc et gaussien dans les trois dimensions. Les éléments du tableau de mélange \mathcal{A} sont les coefficients des combinaisons linéaires des ondes du mélange contenues dans $\underline{\mathbf{s}}(t)$, et ce pour tous les capteurs et leurs composantes. Le produit \times_3 est le produit n -modal suivant la troisième dimension (cf. Chapitre 2). On peut reformuler ce mélange comme :

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_t} a_i^{n_c=1, n_x=1} \cdot \underline{\mathbf{s}}_i(t) & \dots & \sum_{i=1}^{N_t} a_i^{n_c=1, n_x=N_x} \cdot \underline{\mathbf{s}}_i(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_t} a_i^{n_c=N_c, n_x=1} \cdot \underline{\mathbf{s}}_i(t) & \dots & \sum_{i=1}^{N_t} a_i^{n_c=N_c, n_x=N_x} \cdot \underline{\mathbf{s}}_i(t) \end{bmatrix} + \mathcal{N}. \quad (3.7)$$

Dans cette formulation, $a_i^{n_c=1, n_x=N_x}$ est l'élément de \mathcal{A} qui se trouve à la position $n_c = 1$, $n_x = N_x$ et $n_t = i$. On voit dans cette modélisation du mélange, que le nombre d'ondes que nous allons estimer $\underline{\mathbf{s}}_i(t)$ est égal au nombre d'échantillons temporels N_t (du fait de la taille du tableau de données initiales). En fait, comme le traitement que nous proposons est basé sur de l'analyse en composantes principales, il s'apparente à un traitement utilisant les statistiques d'ordre 2. Ainsi la base d'ondes que nous estimerons sera une base d'ondes orthogonales entre elles (ou décorréelées). Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre,

cette base ne nous donne pas *a priori* de composantes ayant une signification physique; mais la division de la base en deux sous-espaces vectoriels nous permet de faire de la séparation d'ondes par l'estimation d'un sous-espace signal et un sous-espace bruit. Le but que nous nous fixons, dans le traitement de séparation d'ondes que nous présentons, est de trouver cette base d'ondes et de faire de la séparation d'ondes par sous-espaces. La décomposition du tableau de données va également nous donner accès aux paramètres du mélange, sous forme de bases orthonormées. On pourra ainsi identifier le comportement de chaque onde de la base propre sur le réseau de capteurs et entre les composantes de ces capteurs. Pour clarifier cela, nous redonnons l'expression de la décomposition du tableau \mathcal{Y} à l'aide de la 3DSVD :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{D} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}. \quad (3.8)$$

On voit dans cette expression que la base d'ondes propres (qui donnera une image des ondes du mélange $\underline{s}(t)$, cf. éq. 3.6) est dans la matrice $\mathbf{U}^{(3)}$. Le tableau de mélange \mathcal{A} est donc décomposable en $\mathcal{D} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)}$, et tous les éléments de cette décomposition peuvent être identifiés grâce à la 3DSVD.

3.2.2 Base propre du tableau de données

Dans la décomposition 3DSVD, les trois matrices singulières sont estimées en pratiquant des SVD sur les trois matrices dépliantes (cf. chapitre 2) données par :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{(1)} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_x N_t}, \\ \mathbf{Y}_{(2)} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_c N_x}, \\ \mathbf{Y}_{(3)} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t N_c}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Les matrices singulières de \mathcal{Y} sont obtenues à partir des SVD de ces trois matrices. Il convient donc de bien comprendre la nature de ces matrices. En se servant de la figure 2.1 du chapitre 2, on peut appréhender ces matrices :

- $\mathbf{Y}_{(1)}$, de taille $N_c \times N_x N_t$, a sur chacune de ses lignes tous les signaux enregistrés pour une composante. Les N_x signaux de taille N_t sont concaténés dans un long vecteur de taille $N_x N_t$. Les N_c lignes de la matrice sont les concaténations des N_c composantes.
- $\mathbf{Y}_{(2)}$, de taille $N_t \times N_c N_x$, a sur chacune de ses lignes tous les échantillons temporels, pour un instant donné, de tous les capteurs, et pour toutes les composantes. Une ligne est la concaténation de N_c vecteurs de taille N_x , correspondant chacun à la valeur de tous les signaux sur le réseau de capteurs à un instant donné. Chaque ligne est de taille $N_c N_x$. Il y a N_t lignes.
- $\mathbf{Y}_{(3)}$, de taille $N_x \times N_t N_c$, a ses lignes composées de la concaténation de N_t vecteurs de taille N_c , correspondant aux valeurs des signaux enregistrés sur les N_c composantes d'un capteur, et cela pour les N_t échantillons temporels. Chaque ligne correspondant à cette concaténation pour un des N_x capteurs.

Il est intéressant de regarder comment est «organisée» l'information dans ces matrices, car la décomposition de celles-ci va chercher des bases propres qui sont différentes selon les

matrices dépliantes. Il y a exclusivement trois façons de déplier un tableau 3D par tranches, ce qui donne les matrices $\mathbf{Y}_{(i)}$. Toute tentative de dépliement différent (mais toujours par tranche) conduirait à des matrices équivalentes aux trois matrices dépliantes présentées car leurs décompositions donneraient les mêmes bases.

Les matrices singulières de \mathcal{Y} obtenue par 3DSVD sont les matrices singulières gauches des matrices dépliantes (cf. chapitre 2). On pourra donc identifier les bases propres de ces matrices comme suit :

- $\mathbf{U}^{(1)}$, de taille $N_c \times N_c$, contient les relations inter-composantes propres estimées sur tout le réseau de capteurs.
- $\mathbf{U}^{(2)}$, de taille $N_x \times N_x$, a pour colonnes les vecteurs singuliers décrivant les comportements propres (dominants) sur le réseau de capteurs. Cette base est estimée en prenant en compte toutes les composantes des capteurs.
- $\mathbf{U}^{(3)}$, de taille $N_t \times N_t$, contient la base des ondes (ou ondelettes sismiques) propres. Cette base est calculée en tenant compte de toutes les composantes de tous les capteurs.

On voit que le calcul des trois bases de décomposition qui constituent le cœur de la décomposition en éléments propres du tableau de données \mathcal{Y} tient compte de façon effective, de l'information présente sur l'ensemble des composantes des capteurs du réseau. Là est l'intérêt d'utiliser cette technique dans le cas d'une antenne multicomposante.

3.2.3 Traitement par long-vecteurs ou par tableaux 3D ?

À ce point de l'exposé, il convient de faire une comparaison entre la méthode couramment utilisée en traitement des signaux vectoriels et celle que nous proposons. Même si aucune technique d'algèbre multilinéaire n'a été utilisée dans le traitement des signaux vectoriels à notre connaissance (et en particulier la séparation d'ondes), il est intéressant de comparer les approches classiques de type *long-vecteur* avec l'approche que nous proposons. Lorsque les auteurs sont confrontés à des signaux polarisés, enregistrés sur des réseaux multicomposantes, la façon de «modéliser» les signaux reçus fait souvent appel aux long-vecteurs [Nehorai94b, Nehorai94a, Anderson96, Compton81]. L'utilisation de cette convention est très subjective et la construction du long-vecteur n'obéit pas à des règles précises. Tous les signaux enregistrés sur un réseau multicomposante constituent un volume de données 3D, mais l'étude unique d'un long-vecteur obtenu à partir de ce volume ne permet pas d'obtenir une décomposition complète des ondes sur le réseau de capteurs. Le traitement par long-vecteur, quelle que soit la façon de construire celui-ci, est assimilable à l'étude d'une seule des matrices dépliantes du tableau 3D de données.

Par exemple, classiquement, un réseau de N_x capteurs ayant chacun N_c composantes et

enregistrant N_t échantillons temporels sera modélisé en long vecteur comme :

$$\mathbf{S}_{lv}(t) = \begin{bmatrix} \underline{s}_1(t)^T \\ \vdots \\ \underline{s}_{N_x}(t)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n_c=1}(t) \\ \vdots \\ s_{n_c=N_c}(t) \end{bmatrix}_{n_x=1} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} s_{n_c=1}(t) \\ \vdots \\ s_{n_c=N_c}(t) \end{bmatrix}_{n_x=N_x} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Tous les signaux enregistrés sur l'antenne vectorielle sont alors concaténés dans un grand vecteur, ce vecteur étant fonction du temps. La taille des données est alors $N_c N_x \times N_t$. En fait, ce conditionnement des signaux est équivalent à la transposée de la matrice dépliant $\mathbf{Y}_{(2)}$, soit :

$$\mathbf{S}_{lv}(t) = \mathbf{Y}_{(2)}^T. \quad (3.11)$$

Dès lors, les traitements qui seront appliqués au long-vecteur $\mathbf{S}_{lv}(t)$, et particulièrement les méthodes algébriques de type analyse en composantes principales, se restreindront à l'étude d'une matrice dépliant particulière. Pour ces raisons, l'étude des sections sismiques multicomposantes, et l'étude des réseaux de capteurs multicomposantes de manière général (en électromagnétique par exemple) est plus complète et génératrice de plus d'information sur les fronts d'ondes reçus par l'antenne lorsque l'on utilise l'approche par tableau 3D plutôt que l'approche long-vecteur [Lebihan01d]. En particulier, l'approche par ACP trimodale permet de décomposer les comportements des ondes en distance et en polarisation sur l'antenne, et ce, de façon simultanée. Voyons à présent la façon de faire de la séparation d'ondes grâce à la 3DSVD sur ce type d'antenne.

3.2.4 Sous-espaces et projecteurs

Une fois la décomposition du tableau de données \mathcal{Y} effectuée, la séparation d'ondes peut se faire, de façon analogue au cas 2D utilisant la SVD, par décomposition de l'espace vectoriel trimodal défini par les données originales en un sous-espace signal \mathcal{Y}_s et un sous-espace bruit \mathcal{Y}_b . Ce qui peut s'écrire :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_s + \mathcal{Y}_b. \quad (3.12)$$

Avec la décomposition de \mathcal{Y} donnée dans l'équation 3.8, l'expression du sous-espace signal est :

$$\mathcal{Y}_s = \mathcal{D}_s \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)} \times_2 \mathbf{U}_s^{(2)} \times_3 \mathbf{U}_s^{(3)}. \quad (3.13)$$

Ce sous-espace doit être vu comme une troncature de rang (r_1^s, r_2^s, r_3^s) du tableau de départ. Les valeurs de r_1^s , r_2^s et r_3^s sont les rangs du sous-espace signal dans les trois modes (ou directions) du tableau. On estime les trois matrices singulières par SVD des matrices dépliées de \mathcal{Y} . On obtient alors les trois $\mathbf{U}^{(i)}$, et on tronque ces trois matrices en gardant les r_i premiers

vecteurs singuliers pour chacune d'entre elles. On construit ensuite le tableau noyau \mathcal{D}_s grâce à ces matrices et au tableau de données original, par :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)T} \times_2 \mathbf{U}_s^{(2)T} \times_3 \mathbf{U}_s^{(3)T}. \quad (3.14)$$

On possède alors les trois matrices singulières et le tableau singulier, c.à.d. tous les éléments du sous-espace signal. On peut réécrire le sous-espace signal comme :

$$\mathcal{Y}_s = \mathcal{Y} \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)} \mathbf{U}_s^{(1)T} \times_2 \mathbf{U}_s^{(2)} \mathbf{U}_s^{(2)T} \times_3 \mathbf{U}_s^{(3)} \mathbf{U}_s^{(3)T}. \quad (3.15)$$

On peut voir, dans cette expression du sous-espace signal, que les trois projecteurs associés aux sous-espaces signal des trois matrices dépliantes de \mathcal{Y} sont présents [Lebihan01a]. On peut donc identifier le sous-espace signal comme une projection trimodale du tableau de départ, c.à.d. la projection suivant ces trois directions sur les sous-espaces signal des matrices dépliantes. La définition de ces trois sous-espaces est pilotée par l'étude des valeurs singulières des trois décompositions par SVD des matrices dépliantes. Il est également possible de caractériser la répartition d'amplitude dans le cube en étudiant le cube noyau \mathcal{D} . Comme nous l'avons vu au chapitre 2, il possède la propriété de décroissance de la norme de ses tranches dans les trois directions. On peut donc, pour construire le sous-espace signal, soit étudier les courbes des trois SVD des matrices dépliantes, soit étudier la décroissance de la norme des tranches de \mathcal{D} . Nous illustrerons ceci dans la partie simulation à venir. La construction du sous-espace signal effectuée, on obtient le sous-espace bruit par soustraction de la partie signal du tableau de départ :

$$\mathcal{Y}_b = \mathcal{Y} - \mathcal{Y}_s. \quad (3.16)$$

Le but de la séparation est d'isoler un événement sismique dans le sous-espace signal et de consigner le reste des événements dans le sous-espace bruit, en même temps que le bruit de mesure enregistré par les capteurs. La séparation par 3DSVD va donc nous permettre de faire de la séparation d'ondes polarisées. Nous pouvons résumer ses avantages :

- Prise en compte conjointe de l'information présente sur toutes les composantes de tous les capteurs.
 - Identification de la polarisation des ondes présentes dans le sous-espace signal.
 - Facilité de calcul de la décomposition 3DSVD car elle se ramène à plusieurs SVD de matrices dépliantes 2D.
 - Construction des sous-espaces signal et bruit analogue au cas 2D (troncature de SVD).
- et ses inconvénients :

- Même contrainte que la SVD en ce qui concerne le prétraitement d'alignement des ondes pour une bonne séparation des ondes.
- Détermination de la taille du sous-espace soumise à la même subjectivité que dans le cas 2D.

Comme il en est fait mention plus haut, le problème de réalignement des ondes, ou du moins de l'onde que l'on cherche à caractériser, est un problème que l'on retrouve avec le traitement par 3DSVD. De même, le fait que ce traitement soit basé sur une analyse en

composantes principales entraîne que l'identification d'un "tableau singulier", composé d'un vecteur singulier de chaque mode et de la valeur singulière associée, et d'une onde sismique polarisée n'a pas de raison *a priori* d'être représentatif des ondes issues de l'analyse physique (ondes P, S, de surface, guidées) car les ondes ne sont pas nécessairement orthogonales. Seul le fait que les deux sous-espaces construits sont orthogonaux est garanti et l'on doit jouer sur le nombre d'éléments propres composant le sous-espace signal pour s'approcher au mieux de la réalité physique des ondes présentes dans le mélange. Comme dans le cas 2D, la contrainte que l'on impose sur la base des ondes sismiques (contenues dans les colonnes de $\mathbf{U}_s^{(3)}$) est l'orthogonalité. C'est d'ailleurs la même contrainte qui est imposée aux deux autres bases décrivant les comportements propres sur l'antenne et les polarisations propres. Il serait possible, à l'aide d'outils utilisant les statistiques d'ordre supérieur, de trouver une base d'ondes sismiques non plus décorréelées mais indépendantes. L'indépendance à l'ordre quatre permettra alors d'obtenir une base d'ondes sismiques qui, en général, permet de rendre mieux compte de la réalité physique des ondes. Ce type de travaux s'inscrivent dans les perspectives des travaux présentés ici.

Avant de passer aux simulations montrant la méthodologie mise en œuvre et les résultats obtenus par la 3DSVD, nous présentons une approche par sous-cubes qui sera utile dans l'application du traitement sur des signaux réels.

3.2.5 Approche par sous-tableaux : lissage multimodal

Lors du traitement des données sismiques réelles, plusieurs écarts aux conditions imposées par la 3DSVD peuvent affecter les résultats du traitement. Les ondes ne sont pas alignées (vitesse apparente non infinie), les volumes de données sont assez importants et comportent beaucoup d'événements sismiques, et le comportement des ondes (en particulier des ondes de surface) ne se prête pas forcément au traitement par 3DSVD. Pour toutes ces raisons, il est parfois nécessaire de traiter le tableau par morceaux, c'est-à-dire par sous-tableaux. Les divers sous-tableaux possibles ne sont pas détaillés ici, nous donnons le cas général. Il faudra adapter la taille des sous-tableaux aux données à traiter.

Soit un tableau de dimension $N_c \times N_x \times N_t$, on définit la taille du sous-tableau comme étant : $\alpha \times \beta \times \gamma$ (avec $\alpha \leq N_c$, $\beta \leq N_x$ et $\gamma \leq N_t$). On va alors prendre le premier sous-tableau et calculer les sous-espaces signal et bruit qui lui sont associés. Ensuite on déplace le sous-tableau d'un échantillon dans une direction et on réitère l'opération ; et ainsi de suite jusqu'à avoir couvert tous les indices de la première direction. À ce moment là, on incrémente l'indice de la deuxième direction et ainsi de suite jusqu'à avoir décrit tout le tableau avec le sous-tableau. Une fois tous ces sous-espaces signal estimés, on fait une moyenne sur le nombre que l'on veut de sous-tableaux (prenons ici n_1 , n_2 et n_3 respectivement dans les trois directions), et on fait cette moyenne glissante également sur tout le cube. L'expression de la

partie du sous-espace signal centré à la position ijk , et de taille $n_1 \times n_2 \times n_3$, est alors :

$$\{\mathcal{Y}_s\}_{ijk} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left[\sum_{p=i-\frac{n_1}{2}}^{i+\frac{n_1}{2}} \sum_{q=i-\frac{n_2}{2}}^{i+\frac{n_2}{2}} \sum_{r=i-\frac{n_3}{2}}^{i+\frac{n_3}{2}} \{\mathcal{Y}_s\}_{pqr} \right], \quad (3.17)$$

où $\{\mathcal{Y}_s\}_{pqr}$ est un sous-espace signal estimé sur le sous-tableau centré en pqr et de taille $n_1 \times n_2 \times n_3$. L'estimation du sous-espace bruit se fait, une fois le sous-espace signal estimé par la technique de moyennage trimodal, par soustraction de celui-ci au tableau de départ. Cette méthode est équivalente au moyennage des sous-antennes bien connu en traitement d'antenne, sauf que dans notre cas, il est possible d'effectuer un moyennage dans trois directions (ou trois modes). Nous verrons dans la partie application l'effet et l'intérêt de ce moyennage dans l'estimation du sous-espace signal constitué d'ondes dispersives ainsi que dans le traitement des cubes sismiques 3D.

3.2.6 Simulations

Nous proposons une étude non exhaustive de différents cas de figures susceptibles d'être rencontrés lors de l'utilisation de la 3DSVD sur données sismiques multicomposantes. Nous fixons à trois le nombre de composantes vectorielles dans ces simulations et leur donnons les dénominations **a**, **b** et **c**, par souci de généralité. La relation entre ces trois composantes est la polarisation. Nous présentons la polarisation sous forme d'un vecteur \underline{p} dont les éléments donnent les rapports d'amplitude entre les composantes. Ce vecteur sera normé dans les simulations. Nous supposons ces vecteurs de polarisation constants dans le temps ainsi qu'en distance, et à valeurs réelles. Les volumes de données simulés sont de taille $N_c \times N_x \times N_t = 3 \times 10 \times 128$ (3 composantes, 10 capteurs, 128 échantillons temporels). Les ondes simulées dans cette étude sont les mêmes que celles utilisées lors de l'étude de la SVD (figure 3.2), et que nous rendrons «polarisées». La polarisation consistera ici en de simples rapports d'amplitudes entre les composantes pour le cas de polarisations linéaires et en des rapports d'amplitudes et des déphasages pour les polarisations elliptiques. Nous faisons l'hypothèse de stationnarité de la polarisation en distance (c.à.d. le long d'une section sismique). Les rapports signal à bruit (RSB) donnés sont estimés par le rapport des normes de Frobenius (cf. Chapitre 2) des tableaux signal et bruit :

$$RSB = 10. \log \frac{\|\mathcal{S}ignal\|}{\|\mathcal{B}ruit\|}, \quad (3.18)$$

L'information de RSB n'est pas souvent accessible en traitement des signaux sismiques, nous nous plaçons donc dans des cas de RSB faible par souci de généralité et afin de montrer la robustesse du traitement à la corruption des données par le bruit.

Cas d'une onde de vitesse infinie polarisée linéairement additionnée à du bruit

Ici, nous nous intéressons au cas d'une onde (*Onde 1*) polarisée linéairement. La polarisation de cette onde est portée par le vecteur : $\underline{p} = [0.5472 ; -0.1642 ; 0.8208]^T$. Le bruit

additionné est de distribution normale, centré, de variance unité et à composantes statistiquement indépendantes. L'onde polarisée avant de l'ajouter au bruit est présentée sur la figure 3.19. Nous effectuons donc la 3DSVD du mélange *Onde 1* plus bruit (fig. 3.20).

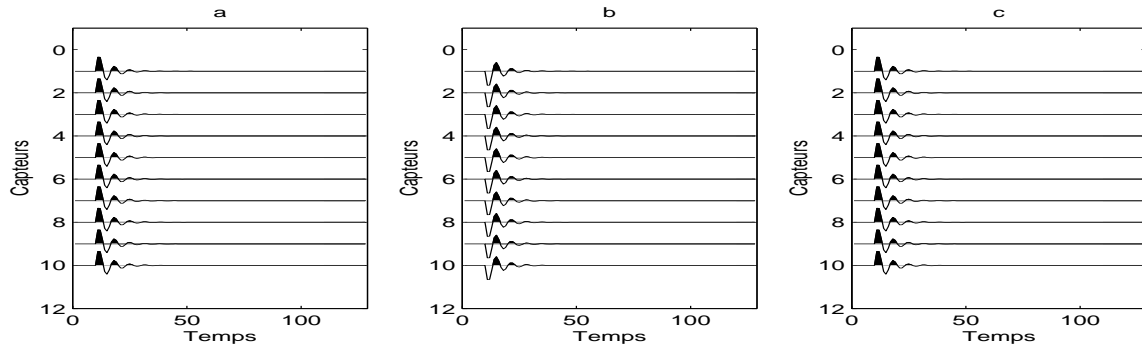


Fig. 3.19 – Cas d'une onde polarisée de vitesse apparente infinie bruitée. Trois composantes (a, b et c) de l'onde simulée avant addition du bruit. Polarisation portée par $\underline{p} = [0.5472 ; -0.1642 ; 0.8208]^T$.

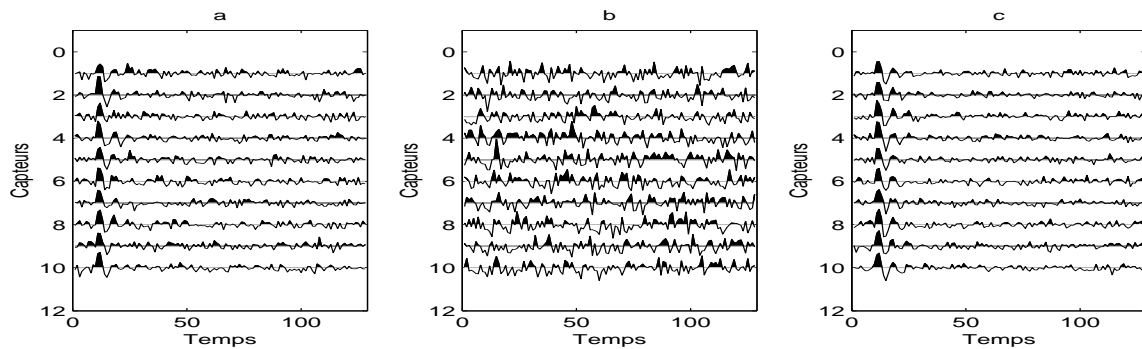


Fig. 3.20 – Cas d'une onde polarisée de vitesse apparente infinie bruitée. Mélange composé de l'onde polarisée et du bruit. RSB=-5 dB.

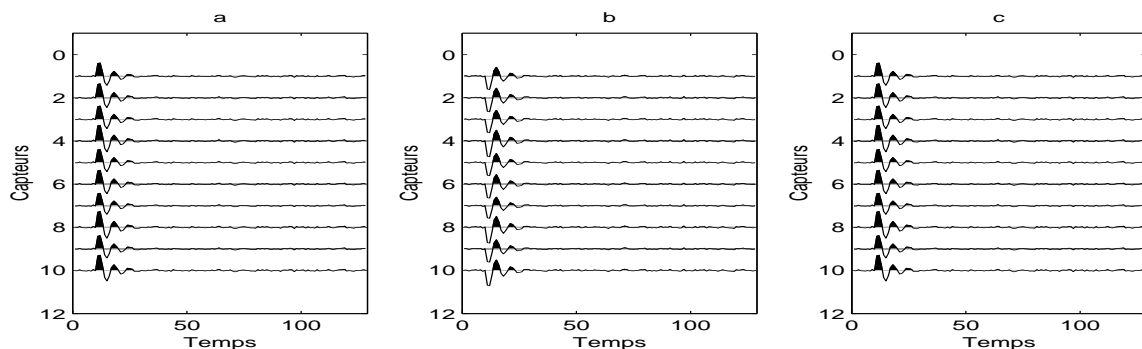


Fig. 3.21 – Cas d'une onde polarisée de vitesse apparente infinie bruitée. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang(1, 1, 1) de la 3DSVD.

Dans ce cas, l'onde est correctement retrouvée en prenant un sous-espace signal de rang(1, 1, 1), *i.e.* une ondelette sismique, un comportement sur l'antenne et un vecteur pola-

risation. Ces valeurs de rangs dans les trois directions se déduisent des courbes des valeurs singulières trimodales (fig. 3.22). On voit en effet sur ces courbes de valeurs singulières que,

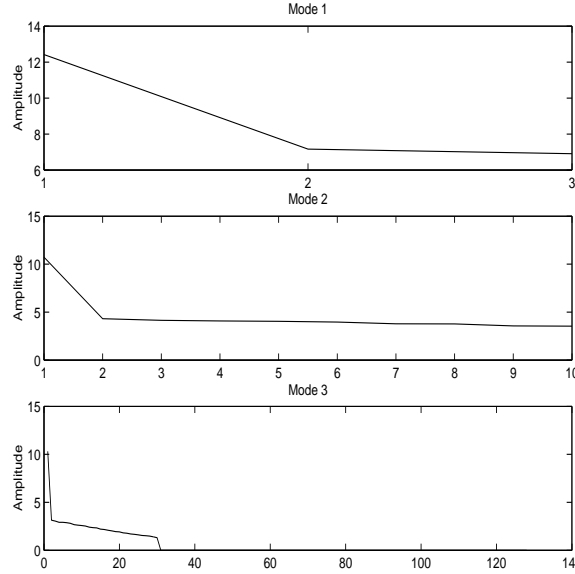


Fig. 3.22 – Cas d'une onde polarisée de vitesse apparente infinie bruitée. Valeurs singulières trimodales.

dans les trois directions, la première est prédominante. Les répartitions des valeurs singulières justifient un choix de troncature de rang(1, 1, 1) de la 3DSVD des données pour former le sous-espace signal. Sur cette simulation, nous voyons comment le traitement tient compte de l'information disponible sur toutes les composantes. En effet, dans le mélange initial, sur la composante **b**, le signal est noyé dans le bruit (fig. 3.20). Cette composante est cependant bien estimée par la 3DSVD (fig. 3.21), et ce du fait de l'utilisation de l'information présente sur les deux autres composantes (**a** et **c**) où le signal se distingue mieux du bruit. Une utilisation de la SVD sur la composante **c** du mélange seule n'aurait pas permis de retrouver le signal.

Un autre apport du traitement par 3DSVD provient du fait que l'on peut estimer, lorsqu'elle est linéaire, la polarisation de l'onde isolée dans le sous-espace signal. En effet, si l'on regarde le vecteur de polarisation estimé, c'est-à-dire la première colonne de la matrice $\mathbf{U}^{(1)}$ dans la décomposition par 3DSVD (éq. 3.8), les valeurs obtenues sont :

$$\hat{\underline{p}}^{\mathbf{U}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.5959 \\ 0.1293 \\ -0.7926 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

On estime donc la polarisation de façon assez juste, hormis le signe. Ce problème est dû à la SVD qui estime les vecteurs singuliers à cette indétermination près. Le signe d'un des autres vecteurs singuliers (colonne de $\mathbf{U}^{(2)}$ ou $\mathbf{U}^{(3)}$) compensera cette indétermination et la composition des vecteurs pour former le sous-espace signal ne sera pas affectée. Ce problème de signe n'est pas gênant car un vecteur polarisation est toujours défini au signe près.

Remarque : Nous ne présentons pas le cas où une onde possède une vitesse apparente quelconque sur l'antenne. Ce cas de figure entraîne les mêmes conséquences sur le traitement que dans le cas de la SVD (nécessité de prendre beaucoup de vecteurs singuliers, voire tous, pour décrire l'onde).

Cas d'une onde dispersive de vitesse apparente infinie polarisée elliptiquement

Nous nous plaçons dans le cas d'une onde de polarisation elliptique et dispersive. L'ellipticité de la polarisation fait que les signaux sont déphasés d'une composante à l'autre. Ce déphasage est constant en distance (c.à.d. suivant la direction N_x). La dispersion est visible sur les sections originales (fig. 3.23) : elle se caractérise par un déphasage entre les signaux le long des capteurs. La vitesse de groupe est ici infinie (vitesse du paquet d'onde) et la vitesse de phase est différente de la vitesse de groupe (rotation de la phase dans le paquet d'ondes). Le mélange composé de l'onde dispersive et de bruit est présenté sur la figure 3.24.

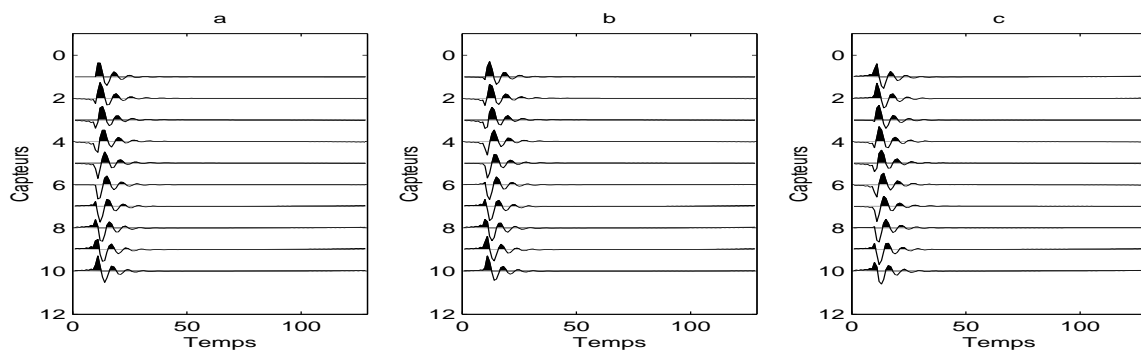


Fig. 3.23 – Cas d'une onde dispersive (*Onde β*) polarisée elliptiquement et bruitée. Simulation de l'onde dispersive avant d'être additionnée au bruit.

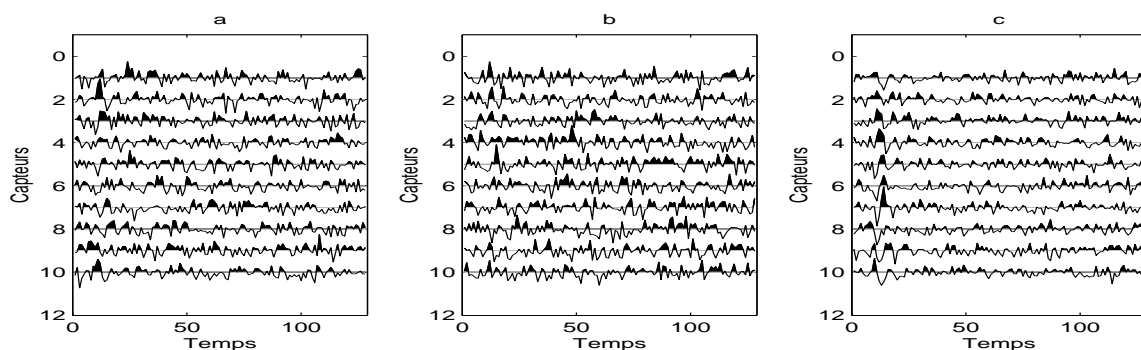


Fig. 3.24 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement et bruitée. Mélange composé de l'onde dispersive polarisée et du bruit. RSB=-10 dB.

Sur cet exemple, nous avons choisi une troncature de rang(2, 2, 2) de la 3DSVD du mélange (fig. 3.24). Ce choix est motivé par les courbes de valeurs singulières trimodales (fig. 3.26). Le fait que deux vecteurs singuliers soient nécessaires pour reconstruire une onde dispersive est

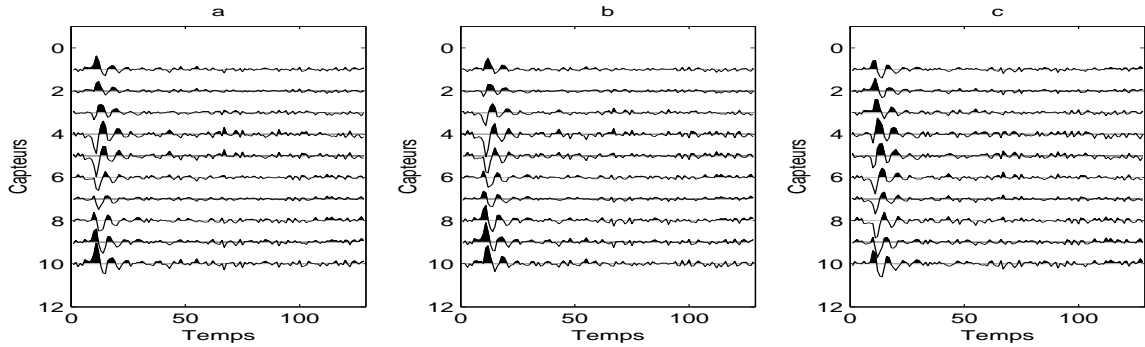


Fig. 3.25 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement et bruitée. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang(2, 2, 2) des données de départ.

dû aux mêmes raisons que dans le cas du traitement par SVD (cf. cas de séparation d'onde dispersive par SVD). Les deux premières colonnes de la matrice $\mathbf{U}^{(3)}$ sont donc également transformées de Hilbert l'une de l'autre.

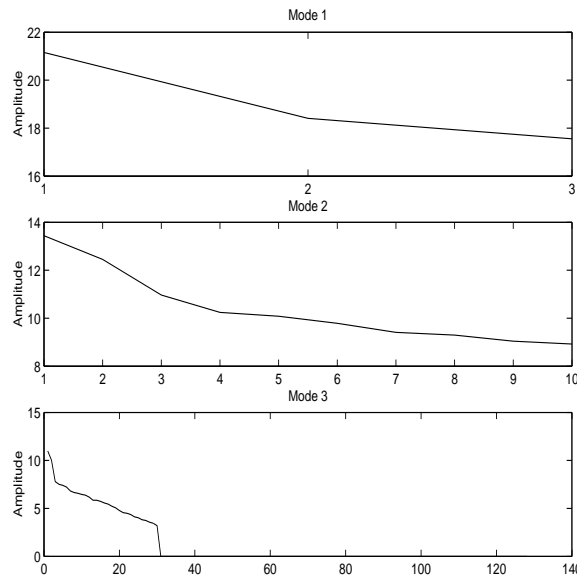


Fig. 3.26 – Cas d'une onde polarisée elliptiquement et bruitée. Valeurs singulières trimodales.

Le sous-espace signal estimé se trouve sur la figure 3.25. On peut voir qu'il permet de retrouver l'onde qui pourtant était noyée dans le bruit dans le mélange initial (fig. 3.24). Sur ce mélange initial, l'onde est visible uniquement sur la composante c. Le résultat obtenu (fig. 3.25) montre bien comment la 3DSVD permet de retrouver toutes les composantes d'un signal, même quand certaines sont largement noyées dans le bruit de fond. Cette propriété n'est pas affectée par le fait que l'onde à extraire du bruit soit dispersive, ni par la forme de sa polarisation (elliptique ou linéaire). Ces deux propriétés (polarisation elliptique et dispersion) ont pour conséquence de forcer le sous-espace signal à être constitué de plus de vecteurs singuliers que dans le cas d'une polarisation linéaire et d'une onde non dispersive. Il est à noter

qu'un traitement par SVD effectué indépendamment sur les trois composantes n'aurait pas permis l'extraction de l'onde, et particulièrement sur les composantes **a** et **b**. Cette propriété de la 3DSVD est en fait son atout majeur vis-à-vis de la SVD et montre l'adéquation de la 3DSVD aux signaux multicomposantes.

Cet exemple montre également que l'estimation d'une polarisation elliptique est possible en utilisant la 3DSVD. Cette estimation n'est pas affectée par la dispersion de l'onde. Nous allons à présent étudier le cas où deux ondes polarisées sont présentes sur l'enregistrement multicomposante.

Cas du mélange de deux ondes de vitesses et polarisations différentes

Dans le cas où deux ondes sont présentes dans le mélange, la 3DSVD nécessite un recalage (correction de vitesse) de l'onde que l'on veut caractériser, et donc placer dans le sous-espace signal. Nous avons simulé deux ondes de vitesses différentes, dont une de vitesse infinie (*Onde 1*) et l'autre de vitesse quelconque (*Onde 2*). Les deux ondes ont des polarisations différentes et leurs vecteurs de polarisation sont : $\underline{p}_1 = [0.54 ; -0.16 ; 0.82]^T$ pour l'*Onde 1* et $\underline{p}_2 = [0.60 ; -0.12 ; 0.78]^T$ pour l'*Onde 2*. L'*Onde 1* polarisée est représentée sur la figure 3.21, et l'*Onde 2* sur la figure 3.27. Les trois composantes du mélange des deux ondes et du

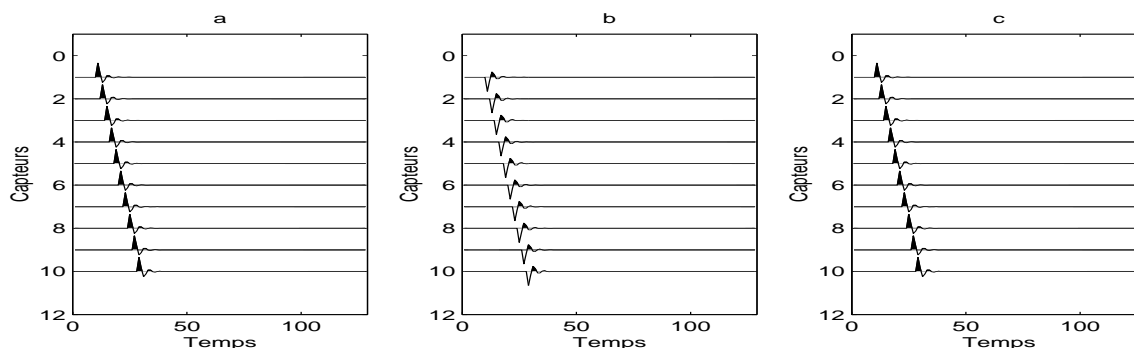


Fig. 3.27 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations et vitesses différentes. Composantes de l'*Onde 2* avant mélange

bruit sont sur la figure 3.28. On voit déjà, sur cette figure 3.28, que l'on peut partiellement reconnaître l'*Onde 1* dans le bruit sur les composantes **a** et **b**. En observant ces données de départ, on peut déjà imaginer que des SVD effectuées séparément sur les trois composantes ne conduiraient à l'estimation d'aucune onde. Nous avons appliqué la 3DSVD sur ces données. Le sous-espace signal est présenté sur la figure 3.29 et le sous-espace bruit sur la figure 3.30.

Le sous-espace signal est la troncature de rang(1, 1, 1) des données de départ. Ces valeurs de rang sont prises en observant les valeurs singulières trimodales de la figure 3.31. Dans le sous-espace signal, l'*Onde 1* est bien présente, par contre, l'*Onde 2* est perdue dans le bruit dans le sous-espace bruit. Pour ce qui est des vecteurs de polarisation, l'estimation de \underline{p}_1 ,

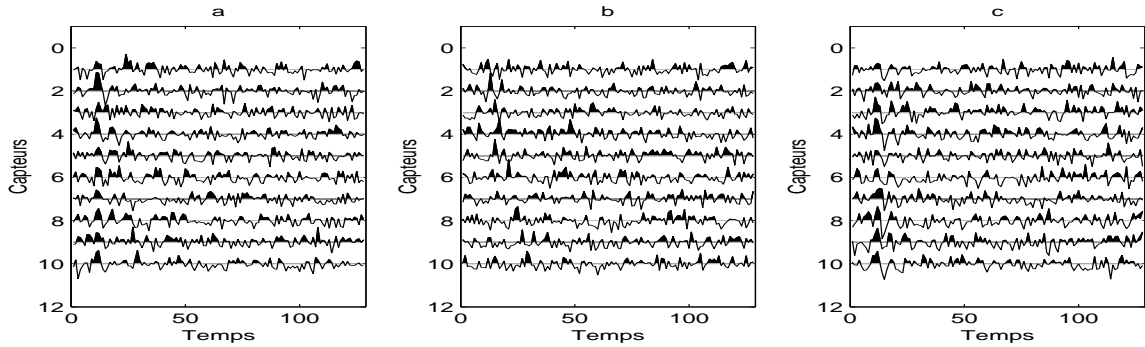


Fig. 3.28 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations et vitesses différentes. Trois composantes du mélange de l'Onde 1 avec l'Onde 2 et du bruit. RSB=-10 dB.

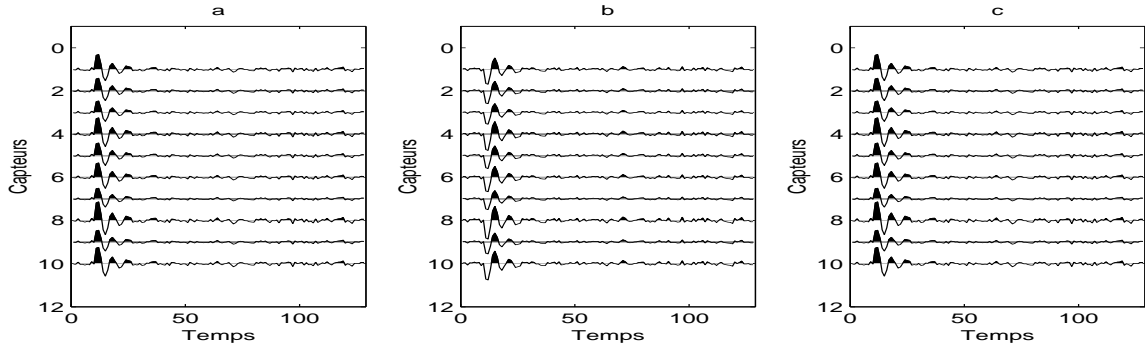


Fig. 3.29 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations et vitesses différentes. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang (1, 1, 1) de la décomposition du tableau de données par 3DSVD.

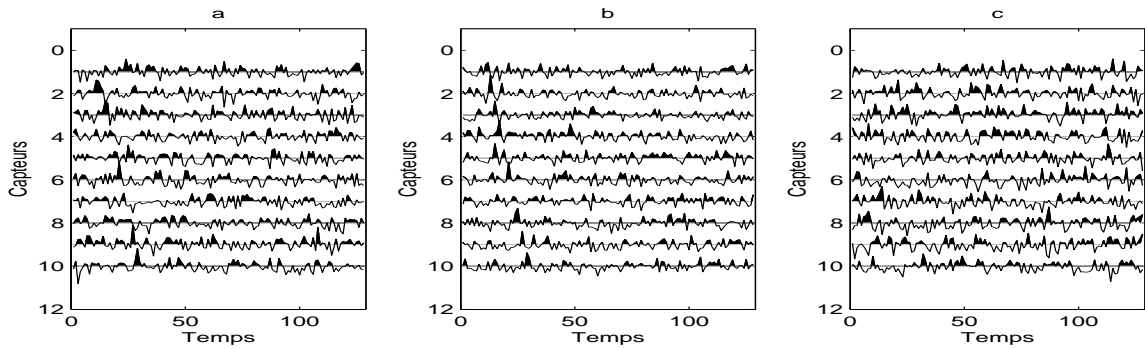


Fig. 3.30 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations et vitesses différentes. Sous-espace bruit obtenu par soustraction de la troncature de rang (1, 1, 1) aux données initiales.

notée $\underline{p}_1^{U(1)}$ obtenue est :

$$\hat{\underline{p}}_1^{U(1)} = \begin{bmatrix} -0.6788 \\ 0.0160 \\ -0.7341 \end{bmatrix} \quad \text{alors que} \quad \underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 0.5472 \\ -0.1642 \\ 0.8280 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

L'estimation de \underline{p}_1 est assez bonne, et permet de retrouver une bonne «allure» de la

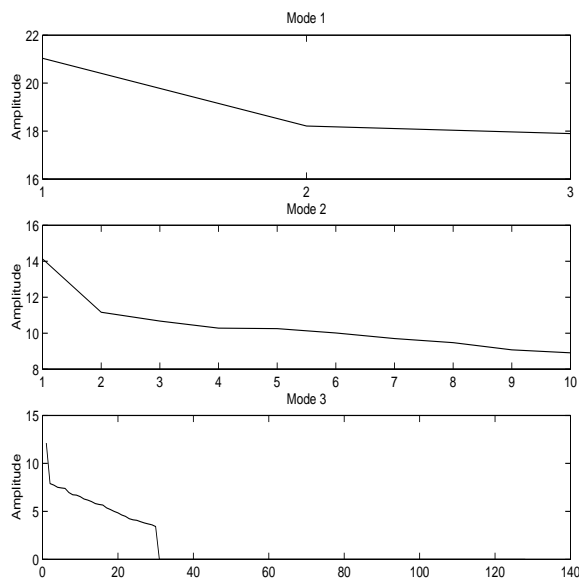


Fig. 3.31 – Cas de deux ondes de polarisations et de vitesses différentes additionnées à du bruit. Valeurs singulières trimodales.

polarisation de l'*Onde 1*. Par contre, une mesure de \underline{p}_2 n'est pas possible dans un même temps. Cet exemple montre que la 3DSVD permet de retrouver l'onde de vitesse apparente infinie et sa polarisation, même quand elle est additionnée à une autre onde et du bruit. Par contre, la deuxième onde n'est pas identifiable, et l'étude des valeurs singulières trimodales montre qu'on ne peut pas l'extraire du bruit, car son amplitude est répartie sur toutes les valeurs singulières. Cela se voit sur les valeurs singulières du mode 3 (fig. 3.31), où après la première valeur singulière très forte, le plateau des autres valeurs traduit une répartition de l'amplitude de l'*Onde 2* sur plusieurs valeurs singulières. Ce plateau n'autorise pas une reconstruction de l'*Onde 2*. Il résulte du mélange qu'elle forme avec le bruit dans le sous-espace bruit.

Nous allons voir à présent le comportement de la 3DSVD dans le cas où des ondes de même vitesse sont présentes dans le document sismique multicomposante.

Cas de deux ondes de vitesses identiques et polarisations différentes

Nous nous plaçons dans le cas où les deux ondes du mélange sont l'*Onde 1* avec sa vitesse apparente infinie et l'*Onde 2* dont la vitesse apparente a été corrigée et est maintenant également infinie. Les vecteurs polarisations sont les suivants : $\underline{p}_1 = [0.5 ; -0.9 ; 0.7]^T$ pour l'*Onde 1* et $\underline{p}_2 = [-0.3 ; -0.5 ; 0.1]^T$ pour l'*Onde 2*. La figure 3.32 représente les trois composantes de l'*Onde 2* polarisée avant le mélange. Les deux ondes polarisées et de même vitesse apparente ont été sommées et additionnées à du bruit pour former le mélange de départ (fig. 3.33).

Sur les composantes des données de départ, il n'est pas possible de distinguer les deux ondes du fait de leurs temps d'arrivées très proches et du rapport d'amplitude entre les deux.

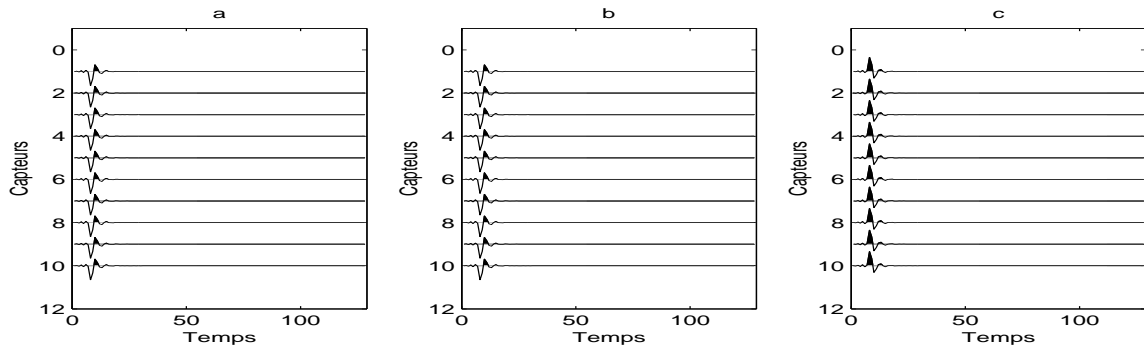


Fig. 3.32 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations différentes et de vitesses identiques. Trois composantes de l’*Onde 2*, dont la vitesse apparente a été rendue infinie, avant le mélange.

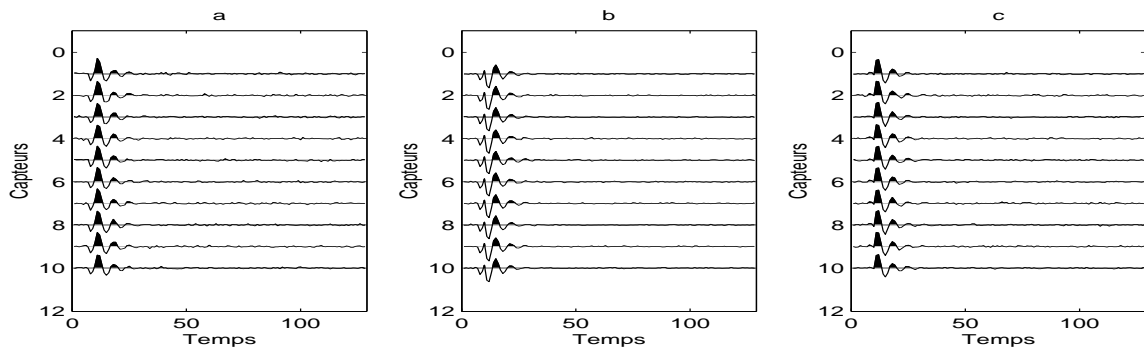


Fig. 3.33 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations différentes et de vitesses identiques. Trois composantes du mélange composé de la somme de l’*Onde 1*, de l’*Onde 2* et de bruit. $RSB=-1$ dB.

L’*Onde 1* a une amplitude plus importante que l’*Onde 2*. La 3DSVD de ces données a été effectuée, et le sous-espace signal, obtenu par troncature de rang(1, 1, 1) est présenté sur la figure 3.34. On voit dans ce sous-espace que l’*Onde 1* est présente et bien estimée.

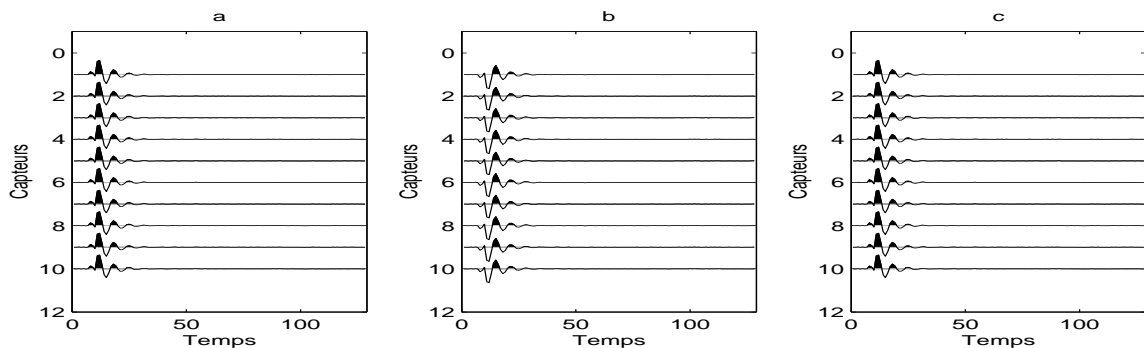


Fig. 3.34 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations différentes et de vitesses identiques. Sous-espace signal formé par la troncature de rang(1, 1, 1) des données de départ.

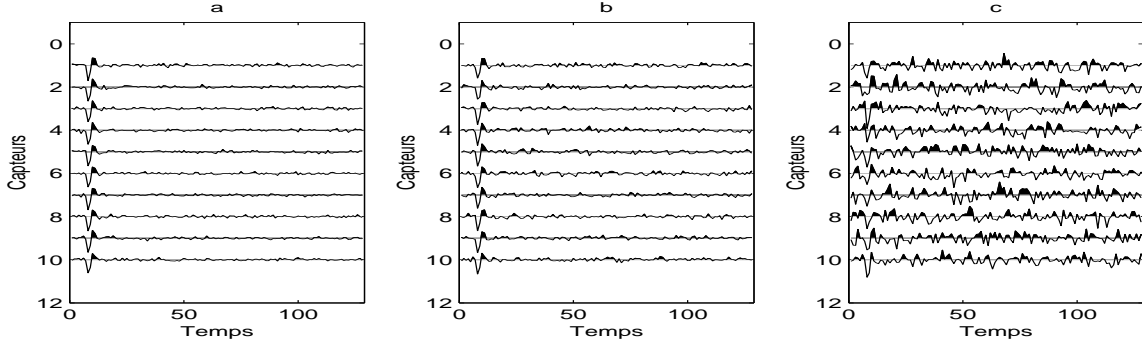


Fig. 3.35 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations différentes et de vitesses identiques. Sous-espace bruit par traitement 3DSVD (soustraction de la troncature de rang (1, 1, 1) des données initiales).

Pour ce qui est de la polarisation de l'*Onde 1*, on obtient :

$$\hat{\underline{p}}_1^{\mathbf{U}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.37 \\ 0.74 \\ -0.56 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

L'estimation du vecteur de polarisation de l'*Onde 1* est assez bonne, et n'est pas trop perturbée par la présence de la deuxième onde de même vitesse. Le sous-espace bruit est présenté sur la figure 3.35, on y distingue l'*Onde 2* très clairement sur les composantes **a** et **b**, et plus faiblement sur la composante **c** du fait de sa faible amplitude par rapport au bruit. Le vecteur polarisation de l'*Onde 2* est quand à lui mal estimé :

$$\hat{\underline{p}}_2^{\mathbf{U}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.83 \\ -0.54 \\ -0.16 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Ceci est normal car le traitement estime, pour l'*Onde 2*, un vecteur de polarisation qui est orthogonal à celui de l'*Onde 1*, or les polarisations des deux ondes ne sont pas orthogonales dans ce mélange. L'allure de l'*Onde 2* est tout de même bien retrouvée dans le sous-espace bruit (fig. 3.35) car celui-ci est obtenu par soustraction de la troncature de rang (1, 1, 1) aux données de départ. Comme cette troncature donne une estimation correcte de l'*Onde 1* (fig. 3.34), le sous-espace bruit contient une bonne estimation de l'*Onde 2*, additionnée au bruit.

Les valeurs singulières trimodales sont représentées sur la figure 3.36.

Sur les courbes de valeurs singulières trimodales, il apparaît que dans le mode 3, deux valeurs singulières sont dominantes, ce qui traduit que le traitement voit deux ondelettes sismiques propres. Par contre, dans le mode 2, une seule valeur singulière est forte, ce qui traduit un seul comportement dominant sur l'antenne. Ceci est logique du fait des vitesses identiques des ondes du mélange. Dans le mode 1, il n'est pas directement visible que deux polarisations propres sont présentes. Une valeur singulière est dominante dans ce mode 1 et correspond à l'*Onde 1*. Cela garantit une bonne estimation de cette onde malgré la présence de la deuxième onde de même vitesse.

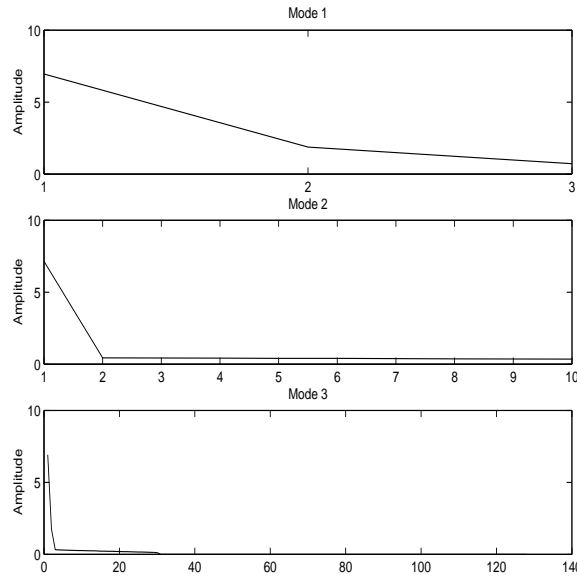


Fig. 3.36 – Cas du mélange de deux ondes de polarisations différentes et de vitesses identiques. Valeurs singulières trimodales.

Le résultat obtenu ici présente une amélioration notable par rapport aux résultats possibles avec la SVD (voir la section «comparaison des résultats obtenus par SVD et 3DSVD»). En effet, deux ondes de vitesses identiques ne peuvent être séparées par SVD. La 3DSVD utilise l'information de polarisation (différentes pour les deux ondes) pour permettre la séparation. La prise en compte des informations présentes sur toutes les composantes prend bien son sens ici, où la différence entre les deux polarisations est exploitée par le traitement 3DSVD. Les vitesses des ondes étant identiques, cette caractéristique ne permet pas de les séparer.

Remarque : il faut noter que l'utilisation de la «SVD par polarisation», décrite à la section 3.1.3, permet de réaliser la séparation de ces ondes de même vitesse et de polarisations différentes.

Nous allons voir, à présent, à titre de comparaison, les résultats obtenus par la SVD classique sur des cas de figure présentés dans les simulations de la 3DSVD.

3.2.7 Comparaison des résultats obtenus par SVD et 3DSVD

Nous reprenons ici les deux dernières simulations que nous venons de voir avec la 3DSVD et montrons l'impossibilité de la SVD à effectuer de la séparation d'ondes et l'estimation de la polarisation dans ces deux types de configurations : «Deux ondes de vitesses et polarisations différentes» et «Deux ondes de vitesses identiques et polarisations différentes». Notre but est de montrer que l'introduction de la polarisation dans les traitements de signaux vectoriels permet d'améliorer les résultats de séparation et peut se révéler essentielle pour la réussite de la séparation.

SVD/3DSVD : deux ondes de vitesses et polarisations différentes

Le mélange initial est présenté sur la figure 3.28. À titre de comparaison, nous avons effectué des traitements par SVD sur les trois composantes séparément, en construisant les sous-espaces signal avec une seule section propre (troncature de rang 1 de la SVD de la section sismique). Les résultats obtenus pour le sous-espace signal sont présentés sur la figure 3.37.

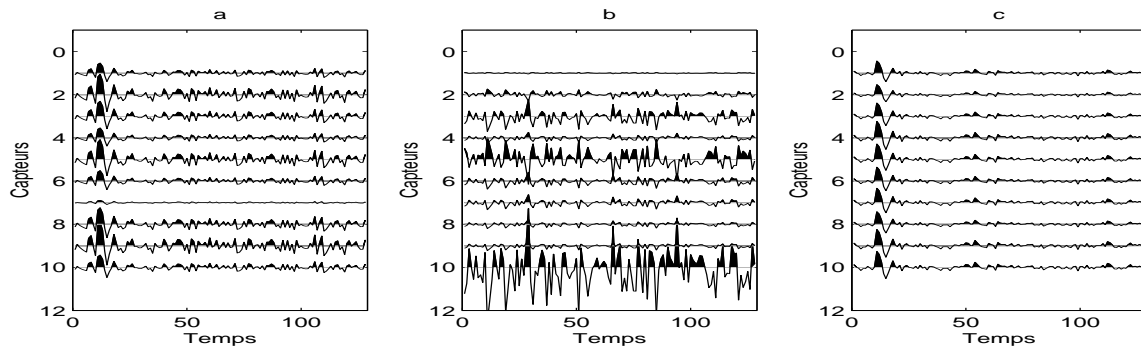


Fig. 3.37 – Cas du mélange de deux ondes de vitesses et polarisations différentes. Sous-espaces signal obtenus par SVD séparément sur chaque composante (troncature de rang 1).

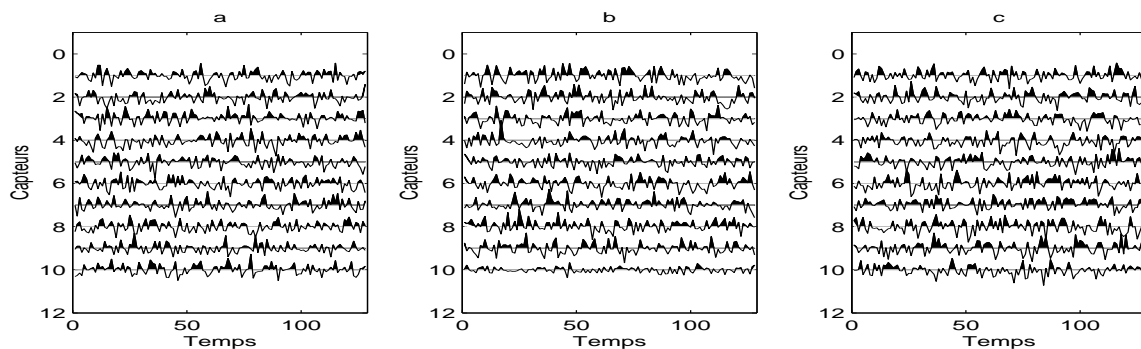


Fig. 3.38 – Cas du mélange de deux ondes de vitesses et polarisations différentes. Sous-espaces bruit obtenus par SVD séparément sur chaque composante.

Sur les sections obtenues par SVD pour le sous-espace signal (fig. 3.37), l'Onde 1 est partiellement retrouvée sur les composantes a et c, mais ne l'est pas du tout sur la composante b. Ce résultat est à comparer à celui obtenu par la 3DSVD (fig. 3.29). La 3DSVD avait permis de retrouver la contribution de l'onde sur les trois composantes, mais la SVD ne le peut pas. La défaillance de la SVD sur la composante b est due au fait que dans le mélange initial (fig. 3.28), sur cette composante, le bruit est prédominant. La 3DSVD tient compte des signaux présents sur les deux autres composantes, mais pas la SVD, ce qui fait que la SVD ne peut pas retrouver l'Onde 1 sur une composante où l'onde n'est pas visible. La comparaison du sous-espace bruit obtenu par SVD (fig. 3.38) avec celui obtenu par 3DSVD (fig. 3.30) montre l'intérêt d'estimer les ondes de façon correcte sur toutes les composantes. En effet, ceci permet ensuite de retrouver les évènements sismiques restant dans le sous-espace bruit.

Cet exemple montre que l'un des intérêts de l'utilisation de la 3DSVD réside dans le fait que la 3DSVD peut extraire la contribution d'une onde sur une composante même si, sur cette composante, elle est très faiblement présente. Ce résultat est évidemment obtenu si elle est dominante sur au moins une des autres composantes. La 3DSVD se sert, en quelques sortes, de l'information présente sur une composante pour estimer le contenu des autres composantes. Bien sûr, une incohérence (différence de forme d'ondes) trop importante entre les signaux des différentes composantes ne permettrait pas d'obtenir de résultats intéressants avec cette technique. La 3DSVD pourra donc se révéler utile dans les applications sismiques dans le cas où l'on veut extraire une onde de toutes les composantes d'un enregistrement. Le traitement permettra de trouver la contribution (ou projection) de cette onde sur toutes les composantes, même dans le cas où certaines de ces contributions sont faibles. Nous verrons l'intérêt de cette propriété de la 3DSVD dans un exemple de traitement de données de type OBC (cf. Chapitre 5).

SVD/3DSVD : deux ondes de vitesses identiques et polarisations différentes

Pour ce cas, les données de départ sont présentées sur la figure 3.33. Les sections sismiques des sous-espaces signal sont obtenues, par SVD sur chaque section de départ, par troncature de rang 1. Les composantes de la partie signal estimée sont représentées sur la figure 3.39.

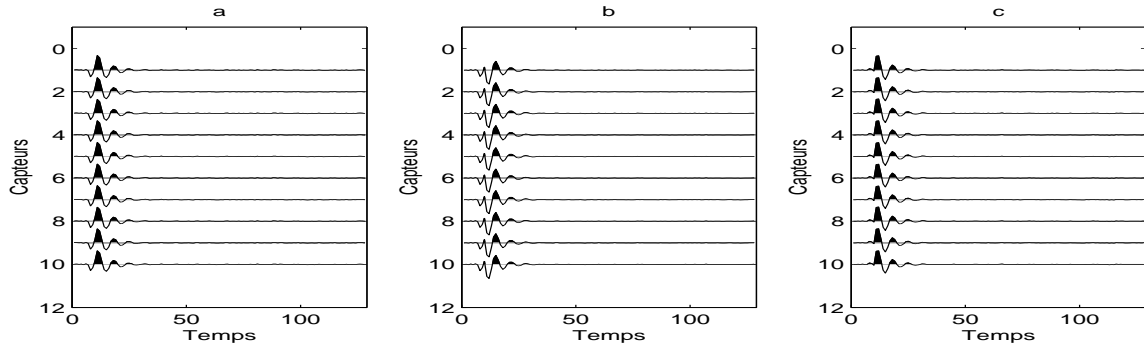


Fig. 3.39 – Cas du mélange de deux ondes de même vitesse et de polarisations différentes. Sous-espaces signal obtenus par SVD séparément sur chaque composante.

On voit sur les sous-espaces signal obtenus par SVD que le fait d'avoir deux ondes qui ont la même vitesse entraîne qu'elles se retrouvent toutes les deux dans le sous-espace signal et leur séparation n'est pas possible en utilisant la SVD. La 3DSVD permettait elle, en exploitant les relations inter-composantes (polarisation), de séparer les deux ondes du mélange (fig. 3.34).

Dans la partie bruit (fig. 3.40), les événements estimés n'ont pas de signification, alors que dans le cas de la 3DSVD, on pouvait voir apparaître la deuxième onde (fig. 3.35). Dans cet exemple, on voit que deux ondes de même vitesse (et ce, quels que soient leurs contenus spectraux et leur temps d'arrivée) ne sont pas séparables par SVD. Par contre, la prise en compte de l'information de polarisation, et donc l'utilisation de la 3DSVD, permet de séparer deux ondes de même vitesse, sous condition qu'elles aient des polarisations et des ondelettes

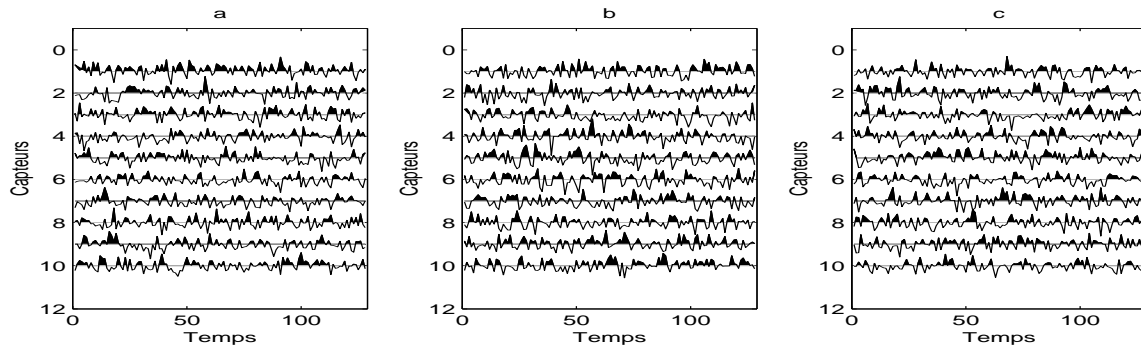


Fig. 3.40 – Cas du mélange de deux ondes de même vitesses et de polarisations différentes. Sous-espaces bruit obtenus par SVD séparément sur chaque composante.

sismiques différentes.

Nous avons vu dans ces divers exemples de simulations les apports principaux de la 3DSVD pour la séparation par sous-espaces sur données sismiques vectorielles. Une étude plus approfondie pourrait être menée pour quantifier exactement l'apport de ce traitement vis-à-vis de sa version matricielle, mais nous nous sommes restreints, par souci de concision, aux améliorations les plus significatives que peut apporter la 3DSVD dans le traitement des données sismiques multicomposantes. L'intérêt de cette technique sera validé sur données réelles au chapitre 5.

3.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle méthode dédiée au traitement des signaux sismiques vectoriels ou multicomposantes. La méthode de traitement proposée est basée sur la décomposition en éléments propres du tableau de données de dimension trois. Ainsi nous avons présenté la 3DSVD, qui permet de faire de l'analyse en composantes principales sur le tableau de données effectivement enregistré par un réseau de capteurs vectoriels. Cette méthode se révèle efficace en terme de séparation d'ondes par sous-espaces et permet l'estimation et la prise en compte d'un paramètre spécifique aux capteurs vectoriels : la polarisation. Nous avons montré que ce paramètre peut se révéler discriminant dans la séparation d'ondes. Au vu des résultats du traitement par 3DSVD, l'apport de l'information contenue dans les relations inter-composantes des capteurs est précieuse et permet d'améliorer l'efficacité de la séparation d'ondes. La méthode proposée fonctionne si les ondes à séparer présentent des caractères distinctifs. Ces caractères distinctifs doivent intervenir dans un des modes du tableau de données 3D au minimum. Une autre contrainte de ce traitement par 3DSVD est qu'il nécessite un prétraitement d'alignement de l'onde que l'on cherche à extraire. Cette étape rendant la vitesse apparente de l'onde infinie est courante en traitement des signaux sismiques et reste nécessaire pour une application simplifiée de la 3DSVD, c.à.d. un choix des valeurs singulières trimodales assez rapide et sans ambiguïté.

Même si numériquement le traitement proposé est plus coûteux en temps de calcul, il est plus intéressant d'utiliser cette méthode qui traite les composantes de façon globale plutôt que de pratiquer des traitements composante à composante. Comme nous l'avons dit au début de ce manuscrit, nous proposons des méthodes opérationnelles pour la sismique, c'est pourquoi l'étape suivante dans l'étude des traitements proposés est leur application sur données réelles. C'est une étape nécessaire à la validation de l'applicabilité de nos traitements, qui sera faite dans le chapitre 5 par l'application de la 3DSVD sur des données issues de différentes campagnes sismiques.

Chapitre 4

Quaternions et traitement des signaux vectoriels

Ce chapitre propose une nouvelle approche des signaux sismiques multicomposantes. L'utilisation des quaternions y est introduite pour coder chaque échantillon temporel d'un signal reçu sur un capteur multicomposante (3C ou 4C). Les quaternions étant l'extension des nombres complexes dans l'espace tridimensionnel, nous montrons comment ils permettent de rendre compte des signaux enregistrés sur plusieurs types de capteurs : scalaires, vectoriels 2D, vectoriels 3D et vectoriels 4D (c.à.d. un capteur vectoriel 3D couplé avec un capteur scalaire). Après une introduction aux quaternions et à leurs propriétés, nous proposons une nouvelle façon de manipuler les signaux vectoriels et présentons quelques définitions classiques pour les signaux scalaires étendues ici aux signaux à valeurs quaternioniques. Nous exposons succinctement quelques concepts d'analyse de ces signaux : Transformée de Fourier quaternionique, fonctions de corrélation et quelques grandeurs caractéristiques. Finalement nous reformulons le problème de séparation d'ondes par sous-espaces, sur un réseau de capteurs vectoriels, à l'aide des quaternions. Nous présentons la décomposition en valeurs singulières des matrices à valeurs quaternioniques (SVDQ) et montrons ses capacités en séparation d'ondes sismiques vectorielles. Ce chapitre est prospectif et, de l'opinion de l'auteur, doit servir de base à une étude plus approfondie de la potentialité des quaternions à fournir des outils de traitement des signaux vectoriels, qu'ils soient comme ici d'origine sismique ou autre (par exemple électromagnétiques).

Les idées présentées dans ce chapitre découlent de quelques constatations simples sur les relations existant entre les signaux vectoriels et les nombres complexes et hypercomplexes. Si les nombres complexes permettent de décrire habilement les opérations dans le plan, il en est de même pour les quaternions (ou nombres hypercomplexes) dans l'espace 3D (et 4D). De là vient l'idée de représenter les signaux qui traduisent des vibrations dans l'espace tridimensionnel par ces nombres hypercomplexes. Cette approche intuitive vient également du fait qu'un quaternion est un nombre constitué d'une partie réelle et de trois parties imaginaires suivant les règles d'orthogonalité des composantes d'un trièdre direct. Avec une similarité frappante, les capteurs OBS (Ocean Bottom Seismometer) ou OBC (Ocean Bottom Cable), utilisés en sismique marine, sont formés d'une composante scalaire (hydrophone) et de trois composantes vectorielles (géophones) formant un trièdre. Cette deuxième constatation renforce l'idée que coder chaque échantillon temporel enregistré par un capteur vectoriel à l'aide d'un quaternion peut permettre de synthétiser l'écriture de ces signaux et de définir de nouveaux traitements qui leurs soient dédiés.

Les nombres hypercomplexes (dénomination parfois donnée aux quaternions qui sont en fait un cas particulier des nombres hypercomplexes) ont été introduits en traitement du signal il y a une dizaine d'années [Schütte90, Ell92], et plus récemment dans le traitement d'images [Sangwine97]. Une version modifiée des quaternions, appelés «nombres bicomplexes», a également été utilisée en traitement du signal, pour la réduction de temps de calcul des coefficients de filtres [Toyoshima98] ou dans la recherche d'une solution analytique au problème de séparation de sources [Zarzoso00]. Ils ont été utilisés en parallèle par les physiciens pour l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux bidimensionnels, permettant de regrouper le champ électrique et magnétique en une seule entité [Hashimoto00]. Ces nombres bicomplexes ont la propriété d'être commutatifs vis à vis de la multiplication, ce que ne sont pas les quaternions. La non commutativité des quaternions permet toutefois de transcrire les relations de type «trièdre direct» entre les composantes d'un capteur vectoriel, et c'est pourquoi nous préférons les quaternions aux nombres bicomplexes dans ce manuscrit. De plus, les nombres bicomplexes ont le désavantage de ne pas toujours posséder un inverse, alors que les quaternions possèdent un inverse du moment qu'ils sont non nuls [Ell92]. Avant de nous intéresser à l'utilisation des quaternions en traitement des signaux vectoriels, nous revenons sur quelques propriétés de base de ces nombres.

4.1 Les quaternions

Les quaternions ont été découverts par Lord Hamilton en 1843 [Hamilton43] et sont l'extension des nombres complexes. Un quaternion est un nombre formé d'une partie réelle et de trois parties imaginaires :

$$q = a + bi + cj + dk, \quad (4.1)$$

où a, b, c et d sont des réels, et les nombres i, j et k sont des nombres imaginaires obéissant aux lois suivantes :

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \\ ij &= k, \quad ji = -k, \\ ki &= j, \quad ik = -j, \\ jk &= i, \quad kj = -i, \\ ijk &= -1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nous passons brièvement en revue quelques propriétés des quaternions.

4.1.1 Opérations élémentaires

L'addition de deux quaternions s'écrit :

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \tag{4.3}$$

La multiplication entre deux quaternions est définie comme :

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \\ &+ j(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) + k(a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

On peut voir, à l'aide de cette expression, que le produit de deux quaternions n'est pas commutatif :

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1. \tag{4.5}$$

La non commutativité du produit est spécifique aux quaternions mais, comme on le verra plus loin dans l'exposé, autorise tout de même la généralisation d'outils classiques en traitement du signal au cas des signaux vectoriels.

Comme pour les nombres complexes, il est possible de définir un conjugué :

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk. \tag{4.6}$$

L'égalité $q = \bar{q}$ est obtenue pour $b = c = d = 0$. Le quaternion est alors un nombre réel. On définit la norme d'un quaternion par :

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}. \tag{4.7}$$

Lorsque cette norme est égale à un, on parle de *quaternion unitaire*. Dans le cas où la partie scalaire a est nulle, on parle de *quaternion pur*. L'inverse d'un quaternion est donné par :

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \tag{4.8}$$

L'existence de cet inverse pour tout quaternion non nul fait du corps des quaternions une algèbre de division.

4.1.2 Relation entre les quaternions et les nombres complexes

En observant la constitution d'un quaternion, on peut voir qu'il contient en fait trois cas particuliers isomorphes aux nombres complexes, pour un quaternion $q = a + bi + cj + dk$:

$$\begin{cases} c = d = 0 \Rightarrow q_i = a + ib \in \mathbb{C}_i, \\ b = d = 0 \Rightarrow q_j = a + jc \in \mathbb{C}_j, \\ b = c = 0 \Rightarrow q_k = a + kd \in \mathbb{C}_k. \end{cases} \quad (4.9)$$

Ces trois sous-ensembles \mathbb{C}_i , \mathbb{C}_j et \mathbb{C}_k sont tous les trois isomorphes au corps des complexes et orthogonaux entre eux (du fait des relations entre les nombres imaginaires i , j et k). Ainsi, ils définissent trois plans complexes orthogonaux entre eux et couvrent l'espace 3D quand ils sont réunis dans un seul quaternion. L'utilisation de ces sous-ensembles a permis l'étude des systèmes 2D linéaires invariant dans le temps [Ell92]. Il existe un autre cas particulier de quaternions :

- Si $b = c = d = 0$, on a : $q = a$ qui est un scalaire de \mathbb{R}

Ces divers cas nous montrent que l'algèbre des quaternions contient celui des complexes et des réels. Il est à noter que la généralisation des quaternions existe, ce sont les octonions (ou nombres de Cayley), et l'algèbre qui leur est associée contient également les quaternions, les complexes et les réels. Les nombres hypercomplexes de toutes dimensions appartiennent à des algèbres de Clifford [Kantor89]. L'utilisation de ces algèbres en traitement du signal a été récemment introduite pour définir la transformée de Fourier des signaux multidimensionnels [Bülow99, Felsberg98]. Toutefois, il faut noter que le passage d'une algèbre à une autre ne se fait pas sans pertes. En effet, le passage des réels aux complexes cause la perte de la propriété d'«ordre», le passage des complexes aux quaternions entraîne la perte de la «commutativité» de la multiplication, et le passage des quaternions aux octonions se traduit par la perte de l'«associativité». Notre approche se basant sur la géométrie du capteur pour définir l'algèbre qui lui est le plus naturellement relié, nous ne connaissons pas de capteurs possédant huit composantes et ne voyons pas à l'heure actuelle comment les octonions pourraient être utilisés pour les signaux vectoriels. C'est pourquoi nous nous limiterons à l'étude des signaux multicomposantes à l'aide des quaternions.

4.1.3 Notations pour les quaternions

Il existe différentes façons de représenter les quaternions, et les diverses façons de les approcher permettent de comprendre leur lien avec les nombres complexes et d'en tirer une interprétation géométrique.

Représentation scalaire-vecteur

Il est possible de séparer un quaternion en sa partie scalaire et sa partie vectorielle :

$$q = S(q) + V(q), \quad (4.10)$$

$V(q)$ est un vecteur à trois composantes et représente la position d'un point dans l'espace. Cet espace a pour repère les trois axes i, j et k qui forment un repère orthonormé direct (trièdre direct). Avec cette notation, on peut voir les différentes opérations sur les quaternions comme :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = (S(q_1) + S(q_2)) + (V(q_1) + V(q_2)), \\ q_1 q_2 = S(q_1)S(q_2) + S(q_1)V(q_2) + S(q_2)V(q_1) + V(q_1)V(q_2). \end{cases} \quad (4.11)$$

Un point dans un espace Euclidien, de dimension 3, ou un vecteur peuvent se représenter par un quaternion pur :

$$p = ix + jy + kz. \quad (4.12)$$

Cette propriété est à la base du codage utilisé par S.J. Sangwine pour les images couleurs. Un pixel peut être considéré comme un point dans le cube Rouge-Vert-Bleu (RVB). Chaque pixel est alors codé comme un quaternion pur : $r.i + v.j + b.k$, et est ainsi repéré dans l'espace 3D qu'ils définissent. Avec cette notation, le produit de deux quaternions purs sera donné par :

$$p_1 p_2 = - \langle p_1, p_2 \rangle + p_1 \wedge p_2, \quad (4.13)$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire et $' \wedge '$ est le produit vectoriel des deux quaternions purs. La non commutativité dans le produit de deux quaternions est portée par le produit vectoriel qui n'est pas commutatif lui-même. Il est également possible, avec cette notation, de définir la notion de quaternions parallèles entre eux et orthogonaux entre eux [Ell92].

Représentation polaire

Comme dans le cas des nombres complexes, il est possible de définir une notation polaire pour les quaternions. On peut l'appréhender en considérant la formule d'Euler qui reste valable pour les quaternions donnée par :

$$q = |q| (\cos \phi + \mu \sin \phi), \quad (4.14)$$

où μ est un quaternion pur et unitaire ($|\mu| = 1$ et $S(\mu) = 0$). Il est possible de représenter alors le quaternion dans un plan dont les axes sont l'axe des réels et l'axe défini par μ dans l'espace 3D. Ce diagramme est appelé «Diagramme d'Argand», et il permet de donner une représentation de l'angle ϕ de la formule d'Euler similaire au cas complexe [Sangwine98]. Il est possible de réécrire l'expression d'Euler pour un quaternion comme :

$$q = |q| e^{\mu \phi}, \quad (4.15)$$

les expressions des diverses composantes de cette représentation sont données par :

$$\mu = \frac{V(q)}{|V(q)|}, \quad (4.16)$$

qui est appelé l'*axe principale* de q .

$$\phi = \tan^{-1} \frac{|V(q)|}{S(q)}, \quad (4.17)$$

appelé l'*angle principale* du quaternion. Cette formulation des quaternions est proche de celle des complexes, mais son interprétation est plus délicate.

Représentation de Cayley-Dickson

Il est possible de représenter un quaternion, non plus comme un nombre possédant quatre parties qui sont chacune un nombre réel, mais comme un nombre en deux parties, dont chacune est un complexe. Ainsi, on peut écrire q comme :

$$q = a + ib + jc + kd = (a + ib) + (c + id)j = \alpha + \beta j, \quad (4.18)$$

où α et β sont des nombres complexes. On voit avec cette notation, que \mathbb{H} est isomorphe à \mathbb{C}^2 . Nous verrons l'utilité de cette notation lors de l'étude des matrices de quaternions.

Il existe d'autres représentations des quaternions, comme celle proposée dans [Bülow99] qui associe à un quaternion un module et trois phases, ou encore les représentations sous formes de matrices (réelles ou complexes) utilisées entre autres en mécanique quantique pour les matrices de spin de Pauli [Cohen73].


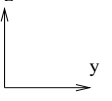
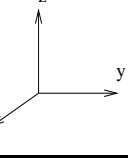
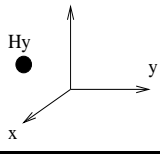
4.2 Représentation quaternionique des signaux vectoriels

Nous proposons une nouvelle façon de modéliser les signaux vectoriels afin de pouvoir leur associer des traitements spécifiques. L'approche que nous utilisons se base sur une analogie entre la géométrie des capteurs et certaines algèbres.

4.2.1 Dispositif d'enregistrement et algèbre associée

Nous proposons de considérer les signaux enregistrés sur des capteurs vectoriels et de déterminer quelle algèbre doit être associée à chaque dispositif d'enregistrement. Pour appréhender cette approche, il suffit de considérer un échantillon temporel d'un signal enregistré sur un capteur. Ensuite, selon le type de capteur (mono ou multicomposantes), on identifie l'algèbre à lui associer en examinant le nombre de paramètres nécessaires à la description de cet échantillon temporel. Les cas possibles sont résumés dans le tableau 4.1.

Pour un capteur mesurant une quantité scalaire, où toute notion de directivité est absente de la mesure, on possède un paramètre (son amplitude), à un instant donné t , pour décrire le signal $s(t)$ par un nombre réel. Dans le cas de signaux enregistrés sur des capteurs à deux composantes orthogonales entre elles, il convient de «fusionner» les deux signaux en un seul, à valeurs complexes. À un instant donné t , le signal est un point dans le plan défini par les deux axes de mesures que sont les capteurs directionnels. Dans ce cas particulier du 2D, la courbe de Lissajou (ou courbe de polarisation) décrira l'évolution temporelle du signal dans le plan complexe. Pour les signaux vectoriels 3D, il faut faire appel aux nombres hypercomplexes, en l'occurrence aux quaternions purs (partie vectorielle d'un quaternion). Là encore, la justification est que tout échantillon temporel pourra être représenté par un quaternion car un quaternion pur décrit un point dans l'espace 3D. Il est à noter que l'on obtiendra une courbe de Lissajou 3D si on trace les positions successives des échantillons d'un signal vectoriel 3D dans l'espace. Dans le cas d'un capteur 4D formé d'un capteur scalaire

Capteur	Dispositif	Algèbre associée	Signal
Scalaire 1D	Hy 	Réels : \mathbb{R}	$s(t) = w(t)$
Vectoriel 2D		Complexes : \mathbb{C}	$s(t) = y(t) + iz(t)$
Vectoriel 3D		Quaternions purs : \mathbb{H}	$s(t) = ix(t) + jy(t) + kz(t)$
Vectoriel 4D	Hy 	Quaternions : \mathbb{H}	$s(t) = w(t) + ix(t) + jy(t) + kz(t)$

Tab. 4.1 – Correspondance entre types de capteurs et algèbres associées.

et de trois capteurs vectoriels (OBS en sismique), l'utilisation des quaternions est également bien adaptée. Ayant déterminé les algèbres adaptées aux différents types de signaux vectoriels, nous allons aborder quelques outils permettant leur analyse.

4.2.2 Espace de Hilbert sur le corps des quaternions

Classiquement en traitement du signal, on considère que les signaux observés font partie d'un espace de Hilbert, c.à.d. un espace vectoriel linéaire normé muni d'un produit scalaire. Les deux espaces couramment utilisés sont \mathbb{R}^N pour les signaux réels de N échantillons et \mathbb{C}^N pour les signaux complexes. Nous nous plaçons ici dans un espace vectoriel droit, *i.e.* on multiplie les scalaires par la droite lors de produits scalaire-vecteur. On considère alors qu'un signal dans cet espace vectoriel, noté \mathbb{H}^N , est un vecteur $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ contenant les N échantillons (à valeurs quaternioniques) du signal. Nous définissons le produit scalaire sur cet espace comme la fonction à valeurs quaternioniques dont l'expression est donnée par :

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i y_i, \quad (4.19)$$

où \underline{x} et \underline{y} sont de taille $N \times 1$. Ce produit scalaire a les propriétés suivantes :

- $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{H}^N$, et $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$ ssi $\underline{x} = \underline{0}$,
- $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{H}^N$.

Dans cet espace, la norme d'un vecteur, $\|\underline{x}\|$, est définie par :

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}, \quad (4.20)$$

et cette norme nous permet de définir une métrique pour mesurer la distance entre deux vecteurs \underline{x} et \underline{y} :

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \left[\overline{(\underline{x} - \underline{y})}^T (\underline{x} - \underline{y}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

Cette métrique possède les propriétés classiques connues pour les espaces euclidiens réels ou complexes [Scharf91].

Matrices de quaternions Lorsqu'on organise les échantillons des signaux à valeurs quaternioniques dans des vecteurs $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$, ceux-ci appartiennent à \mathbb{H}^N . Si on range P vecteurs dans une matrice $\mathbf{X} = [\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \ \dots \ \underline{x}_P]$, celle-ci appartient à $\mathbb{H}^{N \times P}$. Cet espace contient les matrices constituées de P vecteurs de taille $N \times 1$, ou, de manière équivalente, les matrices constituées des NP quaternions de la forme $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$. Nous verrons plus loin dans l'exposé quelques propriétés de ces matrices et leurs implications dans les problèmes de séparations d'ondes polarisées.

4.2.3 Grandeurs caractéristiques des signaux vectoriels

Nous présentons ici les outils de base d'étude des signaux vectoriels. Dans notre étude, ces signaux sont considérés déterministes. L'étude des signaux aléatoires vectoriels ne sera pas présentée ici, mais la définition des grandeurs caractérisant de tels signaux est possible (fonction caractéristique, moments) [Vakhania99]. Dans le cas des signaux certains, nous examinons à présent quelques grandeurs classiques en traitement du signal. Les définitions que nous donnons sont générales pour tous les signaux vectoriels.

Ordre 1 : Moyenne empirique

La moyenne empirique d'un signal vectoriel \underline{x} de \mathbb{H}^N est définie par :

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x_i), \quad (4.22)$$

avec dans le cas des nombres complexes (signaux vectoriels 2D) :

$$S(x_i) = \Re(x_i) \text{ et } V(x_i) = \Im(x_i).$$

La signification de cette moyenne est facilement appréhendable géométriquement. En effet, dans le cas des signaux vectoriels 2D (signaux complexes) cette moyenne sera en fait le barycentre de la figure de Lissajou décrite dans le plan complexe. Pour le cas des signaux vectoriels 3D (quaternions purs), m_x sera également le barycentre de la figure de Lissajou, mais cette fois-ci dans l'espace 3D. Dans le cas 4D, la signification est la même, la moyenne est alors un barycentre dans un espace de dimension quatre. Dans tous les cas, la moyenne est un point «moyen» autour duquel les valeurs du signal sont situées. Ce point se trouve dans des espaces de dimensions différentes selon la nature du signal : sur une droite pour un signal scalaire, dans un plan pour un signal vectoriel 2D et dans un espace 3D ou 4D pour les signaux vectoriels 3D et 4D.

Ordre 2 : Énergie

La variance d'un signal vectoriel est définie par :

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i - m_x]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i^c|^2, \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\Re [x_i^c]^2 + \Im_i [x_i^c]^2 + \Im_j [x_i^c]^2 + \Im_k [x_i^c]^2 \right],\end{aligned}\quad (4.23)$$

où les x_i^c sont les échantillons des signaux centrés et \Im_i , \Im_j et \Im_k sont les différentes parties imaginaires ($\Im_j = \Im_k = 0$ dans le cas complexe, signaux vectoriels 2D). Cette quantité est une simple généralisation du cas scalaire, et traduit l'énergie des signaux vectoriels, et ce, en prenant en compte toutes leurs composantes (de deux à quatre selon les cas).

Ordre 2 : inter et autocorrélation

La fonction d'intercorrélacion de deux signaux vectoriels est donnée par :

$$\Gamma_{x,y}(\tau) = \sum_{i=1}^N x_i \overline{y_{i-\tau}}. \quad (4.24)$$

Cette définition est inspirée de celle donnée par S.J. Sangwine et T.A. Ell dans [Sangwine99] pour les images couleurs. En utilisant la notation introduite dans l'équation 4.10, on a l'expression de cette fonction comme :

$$\begin{aligned}\Gamma_{x,y}(\tau) &= \sum_{i=1}^N [S[x_i] + V[x_i]] [S[y_{i-\tau}] - V[y_{i-\tau}]], \\ &= \Gamma_{S[x],S[y]}(\tau) - \Gamma_{S[x],V[y]}(\tau) - \Gamma_{V[x],S[y]}(\tau) - \Gamma_{V[x],V[y]}(\tau).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Dans cette expression, $\Gamma_{S[x],S[y]}(\tau)$ est à valeurs réelles, tandis que $\Gamma_{S[x],V[y]}(\tau)$, $\Gamma_{V[x],S[y]}(\tau)$ et $\Gamma_{V[x],V[y]}(\tau)$ sont à valeurs quaternioniques. Cette formule est générale et couvre les signaux vectoriels complexes et quaternioniques. Examinons un cas particulier qui permet d'appréhender cette fonction :

Cas des signaux vectoriels 3D Dans ce cas, les signaux prennent des valeurs quaternioniques purs et $S[x_i] = S[y_i] = 0 \forall i$. L'expression de ces signaux est alors :

$$\begin{cases} x(n) = x_1(n)i + x_2(n)j + x_3(n)k, \\ y(n) = y_1(n)i + y_2(n)j + y_3(n)k.\end{cases}\quad (4.26)$$

La fonction d'intercorrélacion est donnée par :

$$\begin{aligned}\Gamma_{x,y}^{3D}(\tau) &= - \sum_{n=1}^N V[x(n)] V[y(n-\tau)], \\ &= [\Gamma_{x_1,y_1}(\tau) + \Gamma_{x_2,y_2}(\tau) + \Gamma_{x_3,y_3}(\tau)] - i(\Gamma_{x_2,y_3}(\tau) - \Gamma_{x_3,y_2}(\tau)) \\ &\quad - j(\Gamma_{x_3,y_1}(\tau) - \Gamma_{x_1,y_3}(\tau)) - k(\Gamma_{x_1,y_2}(\tau) - \Gamma_{x_2,y_1}(\tau)),\end{aligned}\quad (4.27)$$

soit :

$$\Gamma_{x,y}^{3D}(\tau) = \Gamma_{\langle x,y \rangle}(\tau) - \Gamma_{x \wedge y}(\tau). \quad (4.28)$$

La fonction d'autocorrélation pour les signaux vectoriels 3D se décompose en deux parties. La première, $\Gamma_{\langle x,y \rangle}(\tau)$, est en fait la somme des fonctions d'intercorrélations des différentes composantes des deux signaux vectoriels 3D \underline{x} et \underline{y} . Le deuxième terme $\Gamma_{x \wedge y}(\tau)$ est à valeurs quaternioniques (pures) et peut s'appréhender comme un vecteur dans un espace 3D. Cette deuxième partie de la fonction d'intercorrélations sera d'autant plus faible que les signaux se ressembleront. Inversement, la première partie $\Gamma_{\langle x,y \rangle}(\tau)$ sera d'autant plus forte que les signaux \underline{x} et \underline{y} se ressembleront. Une bonne façon d'observer le comportement de l'autocorrélation est l'utilisation de la notation polaire :

$$\Gamma_{x,y}^{3D}(\tau) = q_{\Gamma}(\tau) e^{\mu_{\Gamma}(\tau) \phi_{\Gamma}(\tau)}, \quad (4.29)$$

avec le module donné par :

$$q_{\Gamma}(\tau) = |\Gamma_{x \wedge y}(\tau)| + |\Gamma_{\langle x,y \rangle}(\tau)|. \quad (4.30)$$

L'axe principal de la fonction d'intercorrélations sera alors :

$$\mu_{\Gamma}(\tau) = \frac{\Gamma_{x \wedge y}(\tau)}{|\Gamma_{x \wedge y}(\tau)|}, \quad (4.31)$$

et la phase principale :

$$\phi_{\Gamma}(\tau) = \tan^{-1} \frac{|\Gamma_{x \wedge y}(\tau)|}{\Gamma_{\langle x,y \rangle}(\tau)}. \quad (4.32)$$

Par cette notation, et notamment grâce à l'étude de l'axe principal et du module de la fonction d'intercorrélations, on peut juger de la ressemblance entre deux signaux aux différents retards.

Nous donnons également une expression de la fonction d'autocorrélation dans le cas le plus général des signaux vectoriels :

$$\Gamma_{x,x}(\tau) = \sum_{n=1}^N x(n) \overline{x(n-\tau)} = \Gamma_{x,x}^r(\tau) + \Gamma_{x,x}^i(\tau) + \Gamma_{x,x}^j(\tau) + \Gamma_{x,x}^k(\tau) + \Gamma_{x \wedge x}(\tau), \quad (4.33)$$

où $\Gamma_{x,x}^r(\tau)$ représente l'autocorrélation de la partie réelle, et les $\Gamma_{x,x}^i(\tau)$, $\Gamma_{x,x}^j(\tau)$ et $\Gamma_{x,x}^k(\tau)$ les autocorrélations des différentes parties imaginaires. La partie $\Gamma_{x \wedge x}(\tau)$ définit une direction orthogonale au plan défini par le signal $x(t)$ et sa version retardée $x(t-\tau)$. La valeur de cette partie de l'autocorrélation sera fonction de la ressemblance entre le signal et sa version retardée. La fonction d'autocorrélation est donc à valeurs quaternioniques. Classiquement, elle est utilisée dans la mesure des retards entre un signal de référence et un signal propagé (détection). Cette opération est donc également possible pour les signaux vectoriels. L'intérêt d'utiliser une corrélation quaternionique réside dans le fait que cette fonction utilise les informations de toutes les composantes dans l'estimation du retard.

Nous ne présentons pas d'applications de la fonction d'intercorrélations ici, notre but est de montrer l'existence des outils classiques du traitement du signal, pour les signaux vectoriels. Dans cet esprit, il est également possible de généraliser aux signaux vectoriels un autre outil très utilisé en traitement du signal : la Transformée de Fourier.

4.2.4 Transformée de Fourier quaternionique

La transformée de Fourier quaternionique a été introduite par T.A. Ell dans [Ell92], pour l'étude des systèmes bidimensionnels linéaires invariants dans le temps. Une définition quasi semblable a été introduite, de façon indépendante, par T. Bülow [Bülow99] pour l'étude fréquentielle des signaux scalaires de dimension deux ou plus. Finalement, S. Sangwine a donné une définition plus générale [Sangwine00] lors de l'étude spectrale des images couleurs. Nous nous inspirons de cette dernière définition. Il est à noter que dans la bibliographie, la transformée de Fourier quaternionique est définie pour des signaux bidimensionnels (c.à.d. des images). Ici, nous proposons de définir une Transformée de Fourier pour des signaux monodimensionnels à valeurs quaternioniques : les signaux sismiques vectoriels. Nous ne faisons qu'une présentation succincte de la TFQ (Transformée de Fourier Quaternionique) et de son inverse (TFQI). Le problème qui nous intéresse étant la séparation d'ondes, la TFQ pourra être utile dans le cas de mélanges convolutifs de signaux vectoriels. Dans l'esprit des traitements algébriques présentés dans ce manuscrit, la TFQ doit être vue comme l'outil permettant, dans un travail futur, d'étendre la matrice spectrale aux signaux vectoriels.

Nous nous intéressons donc à la définition de la transformée de Fourier d'un signal $\underline{x}(t)$ de \mathbb{H}^N .

Définition

La Transformée de Fourier Quaternionique (TFQ) d'un signal à valeurs quaternioniques $\underline{x}(n)$ est la fonction à valeurs quaternioniques $\tilde{\underline{x}}(\nu)$ définie comme :

$$\tilde{\underline{x}}(\nu) = \alpha \sum_{n=1}^N \underline{x}(n) e^{-\frac{\mu 2\pi n \nu}{N}}, \quad (4.34)$$

où μ est un quaternion pur unitaire et définit l'axe de la transformation. Dans le cas des signaux vectoriels 2D, on a $\mu = i$ et on retombe sur la transformée des signaux à valeurs complexes. Le choix de l'axe de transformation est arbitraire, mais afin de ne pas privilégier une composante par rapport aux autres, on choisit l'axe :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k). \quad (4.35)$$

Dans le cas de la Transformée de Fourier d'une image couleur, cet axe correspond à l'axe médian du cube RVB [Sangwine00]. La non commutativité du produit quaternionique fait qu'il existe deux définitions possibles pour la TFQ, mais elles ne présentent pas de différences fondamentales du fait de la relation suivante :

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}. \quad (4.36)$$

La TFQ n'est affectée par l'ordre de la multiplication qu'en termes du sens (et pas de la direction) d'orientation de la transformation.

Transformation inverse

La Transformée de Fourier quaternionique inverse (TFQI) permettant de passer du domaine spectral au domaine temporel pour les signaux vectoriels est définie comme :

$$\underline{x}(n) = \beta \sum_{\nu=1}^N \tilde{\underline{x}}(\nu) e^{\frac{\mu 2\pi n \nu}{N}}, \quad (4.37)$$

avec

$$\alpha\beta = \frac{1}{N}. \quad (4.38)$$

Les différentes propriétés de cette transformation de Fourier pour les signaux quaternioniques sont abordées dans [Ell92] et [Bülow99].

Une étude plus approfondie de la TFQ serait nécessaire pour comprendre le contenu fréquentiel qu'elle exprime. Nous ne présentons pas cette étude ici et la réservons aux perspectives de travail sur les signaux vectoriels. Comme dit plus haut, l'existence d'un passage du domaine temporel au domaine fréquentiel pour les signaux quaternioniques nous intéresse dans l'optique de faire de la séparation de mélanges convolutifs de signaux vectoriels, car ces mélanges deviennent des mélanges instantanés dans le domaine spectral. Entre autres, l'extension de la matrice spectrale aux signaux vectoriels sera alors facilement réalisable à l'aide de la TFQ.

Nous allons à présent voir comment faire de la séparation d'ondes directement sur les sections sismiques multicomposantes à l'aide d'outils d'algèbre quaternionique et d'une méthode par sous-espaces.

4.3 Méthode de séparation d'ondes par sous-espace pour les sections sismiques vectorielles

L'objectif principal de cette thèse est de construire des outils de traitements pour les signaux vectoriels (ou multicomposantes), et particulièrement des méthodes de séparation d'ondes. Nous avons montré dans le chapitre 3 comment on pouvait, à l'aide de techniques d'algèbre multilinéaire, faire de la séparation d'ondes par méthode de sous-espaces sur données multicomposantes. Nous montrons ici comment, grâce à la correspondance que nous avons établie entre les différentes algèbres et les dispositifs vectoriels (cf. tableau 4.1), il est possible de faire de la séparation d'ondes par sous-espaces dans le cas de signaux complexes ou quaternioniques.

Nous présentons donc deux méthodes de séparation par sous-espaces basées sur deux décomposition en valeurs singulières pour les matrices à valeurs complexes et les matrices à valeurs quaternioniques.

4.3.1 SVD d'une matrice complexe

Toute matrice \mathbf{A} de $\mathbb{C}^{N \times P}$ admet une décomposition en valeurs singulières donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (4.39)$$

avec :

- $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{P \times P}$, matrices carrées unitaires.
- $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(N,P)})$, matrice pseudo-diagonale, dont les éléments sont positifs et ordonnés de façon décroissante sur la diagonale.

Les σ_i sont les valeurs singulières de \mathbf{A} et les colonnes de \mathbf{U} (respectivement de \mathbf{V}) sont les vecteurs singuliers gauches (respectivement droits).

4.3.2 Méthode de séparation par sous-espaces pour les signaux vectoriels 2D

Nous nous plaçons dans le cas de l'étude d'un réseau de capteurs vectoriels 2D (une composante verticale et une composante horizontale pour chaque capteur). Le nombre de capteurs est N_x et le nombre d'échantillons temporels par capteur est N_t . Chaque composante (verticale et horizontale) recueille donc une matrice de données de taille $N_x \times N_t$. Nous formons la matrice à valeurs complexes correspondant à l'enregistrement effectué par le réseau de capteurs 2D comme suit :

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{S}_H(x, t) + i\mathbf{S}_V(x, t), \quad (4.40)$$

avec $\mathbf{S}_H(x, t)$ et $\mathbf{S}_V(x, t)$ correspondant aux enregistrements des composantes horizontales et verticales du réseau de capteurs et i le nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$. La matrice totale $\mathbf{S}(x, t)$ est une matrice de $\mathbb{C}^{N_x \times N_t}$. Cette méthode consistant à utiliser les nombres complexes pour coder une image à deux composantes a été utilisée pour l'étude des images couleurs codées en «teinte» et «saturation» [Thornton95, McCabe00].

Ici, nous allons utiliser la décomposition des sections sismiques complexes pour faire de la séparation par sous-espaces. La procédure est la même que dans le cas réel : on estime la décomposition en valeurs singulières de la section sismique (éq. 4.39) et on construit le sous-espace à l'aide des premiers vecteurs singuliers correspondant aux valeurs singulières les plus fortes. Le sous-espace signal est obtenu par soustraction du sous-espace signal des données de départ. On rappelle l'expression du sous-espace signal dans le cas où il est formé des α premières sections propres :

$$\mathbf{S}_{signal}(x, t) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sigma_i \cdot (\underline{\mathbf{u}}_i \circ \overline{\underline{\mathbf{v}}_i}), \quad (4.41)$$

et les composantes horizontales et verticales du sous-espace signal sont alors contenus dans les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{H_{signal}}(x, t) = \Re[\mathbf{S}_{signal}(x, t)], \\ \mathbf{S}_{V_{signal}}(x, t) = \Im[\mathbf{S}_{signal}(x, t)]. \end{cases} \quad (4.42)$$

Le sous-espace bruit est obtenu par :

$$\mathbf{S}_{bruit}(x, t) = \mathbf{S}(x, t) - \mathbf{S}_{signal}(x, t), \quad (4.43)$$

et ses composantes verticales et horizontales sont obtenues de façon identique à celles du sous-espace signal. La séparation par sous-espaces en utilisant cette façon de «coder» les signaux vectoriels est intéressante car elle permet d'estimer les formes d'ondes sur un enregistrement 2D, ainsi que la polarisation de l'onde contenue dans le sous-espace signal, et ce, même dans le cas de polarisations elliptiques. Nous présentons un exemple dans lequel nous avons une onde dispersive de polarisation elliptique et de vitesse infinie additionnée à un bruit (fig. 4.1). La dispersion est modélisée par un déphasage entre traces de la section sismique. La polarisation de l'onde est supposée constante sur toute l'antenne.

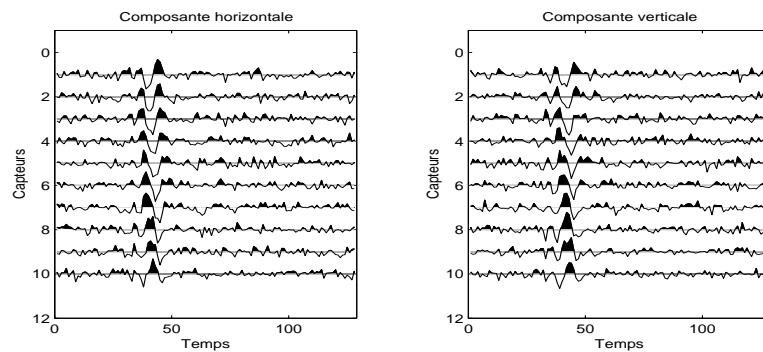


Fig. 4.1 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement bruitée. Composantes horizontales (à gauche) et verticales (à droite) du mélange.

On procède à la séparation d'ondes par sous-espaces. Le sous-espace signal est obtenu à l'aide d'une section propre (troncature de rang 1 de la SVD). Ce choix est motivé par la courbe des valeurs singulières (fig. 4.2). Le sous-espace signal obtenu est présenté sur la figure 4.3. Le résultat nous permet de retrouver la forme d'onde et également la dispersion de celle-ci.

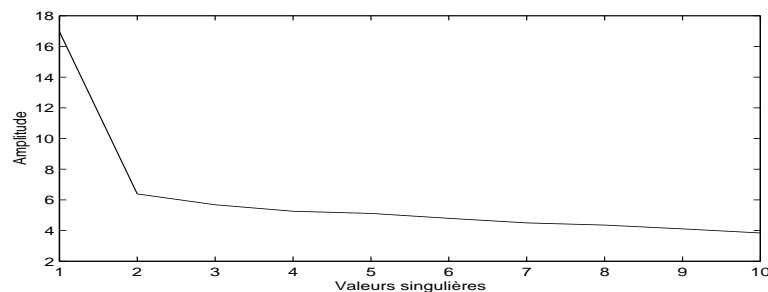


Fig. 4.2 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement bruitée. Courbe des valeurs singulières de la SVD de la section sismique complexe.

Cet exemple montre comment la SVD complexe permet de retrouver une onde, même si celle-ci est dispersive et à polarisation elliptique. De plus, il n'est pas nécessaire, en utilisant la

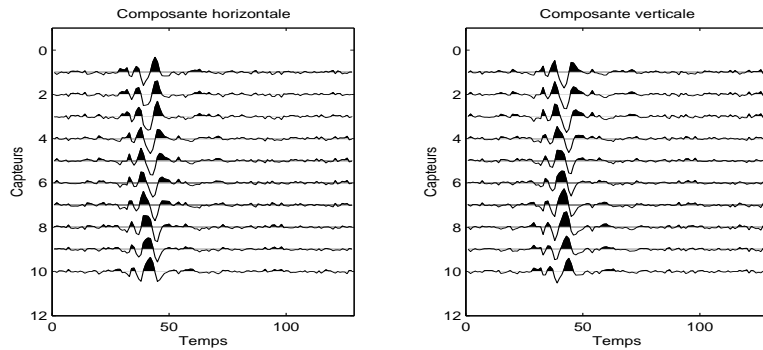


Fig. 4.3 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement bruitée. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang 1 de la SVD complexe.

SVD complexe pour les signaux vectoriels 2D, de prendre deux sections propres pour reconstruire une onde dispersive (cf. Chapitre 3). La SVD complexe permet de reconstruire une onde dispersive avec une seule section propre (une seule valeur singulière), alors que l'utilisation de méthodes par SVD réelle n'autorise la reconstruction de telles ondes qu'avec un sous-espace signal de rang 2 (cf. Chapitre 3). Nous ne détaillons pas plus l'étude de ce traitement adapté aux enregistrements vectoriels 2D, et préférons nous étendre sur les méthodes basées sur les quaternions. Une validation sur données réelles de la SVD complexe serait toutefois nécessaire pour confirmer les potentialités de cette méthode. Un point important est tout de même la validation de la façon d'appréhender les signaux vectoriels 2D à l'aide des nombres complexes. Ainsi, un grand nombre d'algorithmes, agissant dans le domaine temporel, existent dans leur version complexe et sont directement applicables aux signaux vectoriels 2D. Les techniques de séparation d'ondes peuvent ainsi être appliquées sur ces signaux : STOTD [DeLathauwer97], JADE [Cardoso93], etc. Les signaux temporels complexes prennent, de notre point de vue, une signification très explicite quand ils représentent des signaux vectoriels, car ils traduisent les relations de phase et d'amplitude entre deux composantes d'un signal polarisé.

Nous allons voir à présent comment il est possible de traiter les signaux vectoriels 3D et 4D à l'aide d'une nouvelle version de la décomposition en valeurs singulières.

4.3.3 SVD quaternionique (SVDQ)

Nous devons ici introduire plusieurs concepts et notations afin d'arriver à la définition d'une décomposition en valeurs singulières pour les matrices à valeurs quaternioniques (ou vectoriels 3D et 4D). Ces matrices nous permettront de représenter les signaux vectoriels recueillis sur des antennes de capteurs 3D ou 4D. Nous nous basons ici sur les travaux de F. Zhang [Zhang97] et W. So [So99a, So99b, So99c]. L'approche présentée consiste à reformuler le problème de diagonalisation d'une matrice quaternionique en un problème de diagonalisation d'une matrice complexe. Pour cela, nous introduisons les isomorphismes permettant de se ramener à un problème sur le corps des complexes.

Représentation complexe pour les vecteurs quaternioniques

Soit un vecteur de \mathbb{H}^N , noté \underline{x} , dont l'écriture par la notation de Cayley-Dickson est :

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \cdot j, \quad (4.44)$$

où \underline{x}_1 et \underline{x}_2 sont des éléments de \mathbb{C}^N . On peut définir une bijection $v : \mathbb{H}^N \rightarrow \mathbb{C}^{2N}$, comme suit :

$$v(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ -\overline{\underline{x}_2} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

La bijection v ayant la propriété de linéarité :

$$v(\alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2) = \alpha v(\underline{x}_1) + \beta v(\underline{x}_2), \quad (4.46)$$

α et β prenant des valeurs réelles, complexes ou quaternioniques. Cette notation conserve les propriétés des opérations sur les vecteurs quaternioniques. Elle nous permettra d'identifier les vecteurs singuliers des matrices quaternioniques lors de leur décomposition en valeurs singulières.

Représentation complexe pour les matrices quaternioniques

Soit une matrice de $\mathbb{H}^{N \times M}$, notée \mathbf{A} , dont l'expression est :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot j, \quad (4.47)$$

où \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont des matrices à valeurs complexes. La *matrice complexe adjointe* de \mathbf{A} , notée χ_A , est la matrice complexe de $\mathbb{C}^{2N \times 2M}$:

$$\chi_A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ -\overline{\mathbf{A}_2} & \overline{\mathbf{A}_1} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

cette matrice a, entre autres, les propriétés suivantes :

- $\chi_{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \chi_{\mathbf{A}}\chi_{\mathbf{B}}$,
- $\chi_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \chi_{\mathbf{A}} + \chi_{\mathbf{B}}$,
- $\chi_{\overline{\mathbf{A}}} = \overline{\chi_{\mathbf{A}}}$,
- $\chi_{\mathbf{A}}$ est de rang $2r$ si \mathbf{A} est de rang r .

La *matrice complexe adjointe* conserve également le caractère hermitien, unitaire et normal d'une matrice quaternionique. L'isomorphisme permettant de travailler sur le corps des complexes lorsque l'on doit manipuler des matrices quaternioniques a été utilisé pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients quaternioniques [Costa99], ainsi que pour réduire les coûts de calcul des algorithmes de diagonalisation de type Jacobi [Mackey95].

La non commutativité du corps des quaternions rend le problème de l'estimation des valeurs propres d'une matrice quaternionique non trivial. Ainsi il existe deux solutions dans la

détermination du spectre d'une matrice quaternionique \mathbf{A} : les valeurs propres droites $\sigma_r(\mathbf{A})$ et les valeurs propres gauches $\sigma_l(\mathbf{A})$. Elles sont solutions des deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda \in \sigma_r(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \mathbf{A}\underline{x} = \underline{x}\lambda, \\ \lambda \in \sigma_l(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \mathbf{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}. \end{cases} \quad (4.49)$$

Nous n'abordons pas ici le cas des valeurs propres gauches et nous concentrons sur les valeurs propres droites. Ces valeurs propres droites sont dites valeurs propres *standards*. Les développements théoriques sont plus aboutis concernant ces valeurs propres. Il reste encore quelques problèmes théoriques non résolus pour les valeurs propres gauches [So99b], et il n'existe pas d'algorithme permettant de les calculer.

Les valeurs propres droites d'une matrice quaternionique sont directement identifiables par une approche utilisant les nombres complexes. En effet, il est possible de démontrer [Lee49] que :

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{x}\lambda \Leftrightarrow \chi_{\mathbf{A}}v(\underline{x}) = \lambda v(\underline{x}), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}^+. \quad (4.50)$$

Le problème des valeurs propres standards se résume alors à l'identification des valeurs propres de $\chi_{\mathbf{A}}$. Du fait de sa structure, la *matrice complexe adjointe* possède $2r$ valeurs propres quand la matrice quaternionique \mathbf{A} en possède r . Sachant qu'il est possible de déterminer les valeurs propres d'une matrice quaternionique, par cette approche utilisant des matrices complexes, nous pouvons définir la décomposition en valeurs singulières d'une telle matrice.

Décomposition en valeurs singulières quaternionique (SVDQ) [Zhang97]

Soit une matrice \mathbf{A} , de $\mathbb{H}^{N \times M}$, de rang r . Il existe deux matrices quaternioniques unitaires \mathbf{U} de $\mathbb{H}^{N \times N}$ et \mathbf{V} de $\mathbb{H}^{M \times M}$ telles que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathbf{V}^T}, \quad (4.51)$$

avec $\mathbf{D}_r = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r)$, dans laquelle les d_i sont les valeurs singulières positives de \mathbf{A} .

Rang d'une matrice quaternionique [Wolf36]

Le rang d'une matrice \mathbf{A} , de $\mathbb{H}^{N \times M}$, est égal à r si et seulement si \mathbf{A} possède r valeurs singulières non nulles et si le rang de la matrice complexe adjointe qui lui est associée, $\chi_{\mathbf{A}}$, est égal à $2r$.

Calcul de la SVDQ [So99a]

Afin d'estimer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice quaternionique \mathbf{A} de taille $N \times M$, il convient tout d'abord de calculer $\chi_{\mathbf{A}}$, de taille $2N \times 2M$. Ensuite, on effectue la SVD de cette matrice complexe :

$$\chi_{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_{\chi_{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{V}_{\chi_{\mathbf{A}}}^H, \quad (4.52)$$

Les matrices de vecteurs singuliers de cette décomposition ont la structure suivante :

$$\mathbf{U}_{\chi_{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{u_1^1}{-u_2^1} & \frac{u_1^2}{-u_2^2} & \cdots & \frac{u_1^{2N}}{-u_2^{2N}} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{V}_{\chi_{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{v_1^1}{-v_2^1} & \frac{v_1^2}{-v_2^2} & \cdots & \frac{v_1^{2N}}{-v_2^{2N}} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

où les vecteurs $\underline{u}^i = [\underline{u}_1^i; -\overline{\underline{u}_2^i}]^T$ et $\underline{v}^i = [\underline{v}_1^i; -\overline{\underline{v}_2^i}]^T$ sont les $i^{\text{èmes}}$ vecteurs singuliers gauches et droits. Chacun de ces vecteurs singuliers est à valeurs quaternioniques et est exprimé, dans cette décomposition de $\chi_{\mathbf{A}}$, sous sa forme complexe explicitée plus haut (éq. 4.45). Dans le cas où \mathbf{A} est de rang r , la matrice des valeurs singulières a la structure suivante :

$$\mathbf{D}_{\chi_{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

avec $\mathbf{D}_{2r} = \text{diag}(d_1, d_1, d_2, d_2, \dots, d_r, d_r)$. Afin de retrouver la décomposition de la matrice \mathbf{A} , on prend les valeurs singulières situées aux positions impaires : 1, 3, 5 ..., afin de ne sélectionner qu'une fois chaque valeur singulière. On sélectionne ensuite les vecteurs singuliers associés. On reconstruira alors les matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} de la décomposition en valeurs singulières quaternioniques de \mathbf{A} .

Nous avons vu la définition et la façon de calculer la SVDQ d'une matrice dont les éléments sont des quaternions, nous allons voir à présent comment cette décomposition peut permettre de faire de la séparation d'ondes par sous-espaces sur des données sismiques vectorielles 3D et 4D.

4.3.4 Méthode de séparation par sous-espaces pour les signaux vectoriels 3D ou 4D

Le principe de la méthode de séparation par sous-espaces sur matrices quaternioniques est la même que pour les matrices complexes ou les matrices réelles. Considérons une acquisition sismique effectuée sur un réseau de N_x capteurs. Chaque capteur possède trois composantes (la démarche pour un réseau de capteurs à quatre composantes serait exactement la même) recueillant chacune N_t échantillons temporels. On peut alors, comme présenté dans le tableau 4.1, «coder» les données enregistrées par ce réseau vectoriel 3D dans une matrice de $\mathbb{H}^{N_x \times N_t}$, notée $\mathbf{S}(x, t)$ et donnée par :

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{S}_{H_1}(x, t).i + \mathbf{S}_{H_2}(x, t).j + \mathbf{S}_V(x, t).k, \quad (4.55)$$

où $\mathbf{S}_{H_1}(x, t)$, $\mathbf{S}_{H_2}(x, t)$ et $\mathbf{S}_V(x, t)$ correspondent aux enregistrements des composantes H_1 , H_2 et V (cas d'un réseau de capteurs chacun formé de deux capteurs horizontaux et d'un capteur vertical). De façon analogue aux cas des réseaux de capteurs scalaires ou vectoriels 2D (complexes), le but est de découper l'espace vectoriel défini par $\mathbf{S}(x, t)$ en deux parties : un sous-espace signal et un sous-espace bruit. Avec, pour but final, de séparer les événements sismiques et de retrouver en même temps leurs paramètres de polarisation. On obtient le

sous-espace signal par troncature de la SVDQ de la section sismique quaternionique, et le sous-espace bruit par soustraction du sous-espace signal des données initiales.

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{S}_{signal}(x, t) + \mathbf{S}_{bruit}(x, t). \quad (4.56)$$

C'est la généralisation de la méthode par sous-espaces au corps des quaternions. Dans chacun des sous-espaces, les ondes sont estimées par leur forme d'onde, leur comportement sur l'antenne et leur polarisation (relations entre les trois parties imaginaires de la section quaternionique). On estime donc pour chaque sous-espace trois sections sismiques :

$$\mathbf{S}_{signal}(x, t) = i \cdot \mathbf{S}_{signal}^i(x, t) + j \cdot \mathbf{S}_{signal}^j(x, t) + k \cdot \mathbf{S}_{signal}^k(x, t). \quad (4.57)$$

Comme ce traitement exploite les statistiques d'ordre 2 des signaux, nous avons les mêmes contraintes dans la séparation que dans les cas scalaires et vectoriels 2D présentés précédemment. Les limitations de la séparation par sous-espaces calculée à partir d'une SVD (quelle qu'elle soit) restent l'orthogonalité entre les vecteurs singuliers. L'intérêt de l'utilisation de la matrice à valeurs quaternioniques réside dans le fait qu'elle tient compte, dans l'estimation de ces vecteurs singuliers, de la relation inter-composantes (ou polarisation) des ondes présentes dans le mélange. Ainsi, elle rendra compte, dans le sous-espace signal, de la polarisation de l'onde sismique estimée. Cette méthode peut être vue comme une alternative à celle proposée dans le chapitre 3 et basée sur la 3DSVD. Nous verrons plus loin une rapide comparaison entre les résultats de ces deux méthodes.

Nous présentons des simulations illustrant l'intérêt de la SVDQ pour la séparation de signaux sismiques vectoriels.

Cas d'une onde de vitesse infinie polarisée linéairement additionnée à du bruit

Sur la figure 4.4, une onde polarisée linéairement et de vitesse infinie sur l'antenne additionnée à du bruit est présentée. Cette onde est l'*Onde 1* du chapitre 3 (fig. 3.2) à laquelle nous avons donné une polarisation (cf. simulations 3DSVD). Le réseau est constitué de capteurs à trois composantes et les signaux sont donc codés à l'aide de quaternions purs. Les différentes parties imaginaires de la section sismique quaternionique sont représentées, correspondant aux différentes composantes (notée **a**, **b** et **c** dans le chapitre 3). Après estimation de la SVDQ, la courbe des valeurs singulières (fig. 4.5) montre une valeur singulière dominante. Le sous-espace signal est donc construit à l'aide d'une seule valeur singulière et donc une seule section propre quaternionique (fig. 4.6). Le sous-espace signal permet de retrouver l'onde qui était additionnée à du bruit et une estimation de sa polarisation est alors possible. Le traitement des trois composantes séparément par SVD ne conduit pas à de tels résultats et est surtout plus long à mettre en œuvre. Ici, une seule SVDQ nous permet, à l'aide d'une section propre de retrouver l'onde et sa polarisation.

Nous allons voir comment se comporte la méthode de séparation par sous-espace utilisant la SVDQ quand l'onde que l'on cherche à extraire est dispersive et possède une polarisation qui n'est pas linéaire.

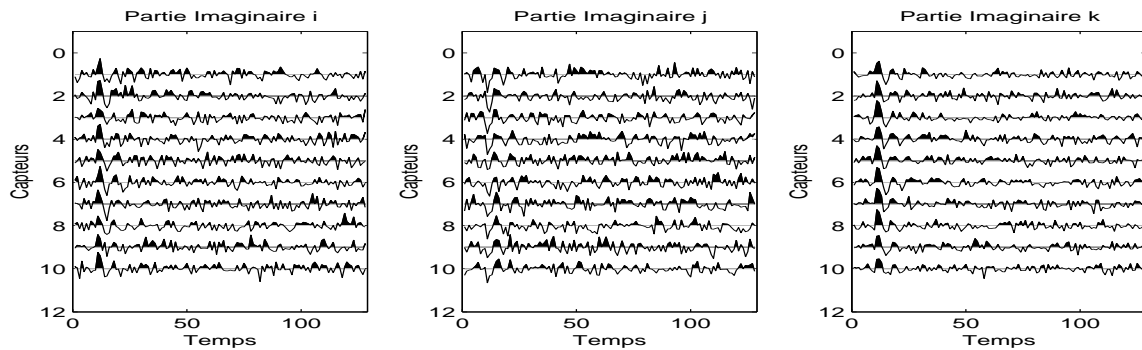


Fig. 4.4 – Cas d’une onde polarisée linéairement additionnée à du bruit. Les trois sections sont les parties imaginaires de la section quaternionique. Mélange de départ. RSB=-6 dB.

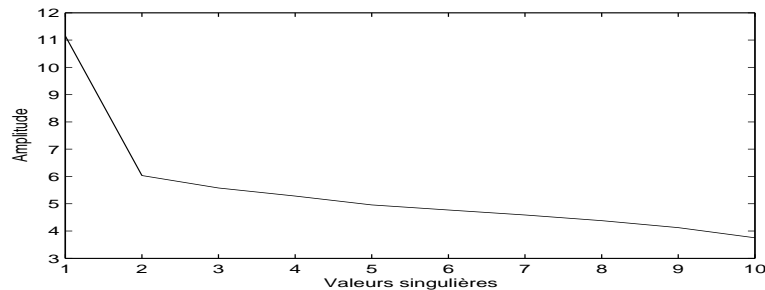


Fig. 4.5 – Cas d’une onde polarisée linéairement et bruitée. Valeurs singulières de la décomposition SVDQ.

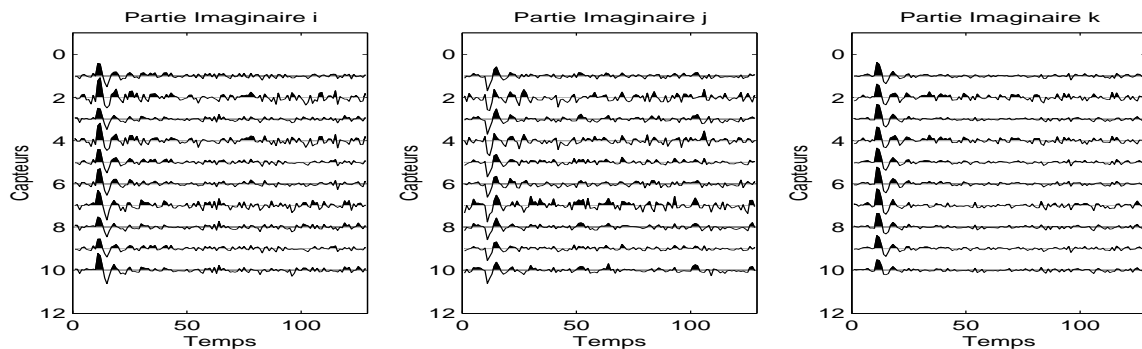


Fig. 4.6 – Cas d’une onde polarisée linéairement additionnée à du bruit. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang 1 de la SVDQ.

Cas d’une onde dispersive de vitesse infinie polarisée elliptiquement additionnée à du bruit

Une onde dispersive de polarisation elliptique à laquelle on a ajouté du bruit est représentée sur la figure 4.7. L’onde elliptique est la même que celle présentée dans la simulation du chapitre 3 (fig. 3.23), c’est en fait l’Onde 3. Le bruit est particulièrement fort sur la deuxième composante (partie imaginaire j) où on ne distingue même plus l’onde. Après calcul de la SVDQ, la courbe des valeurs singulières (fig. 4.8) montre que la première valeur singulière

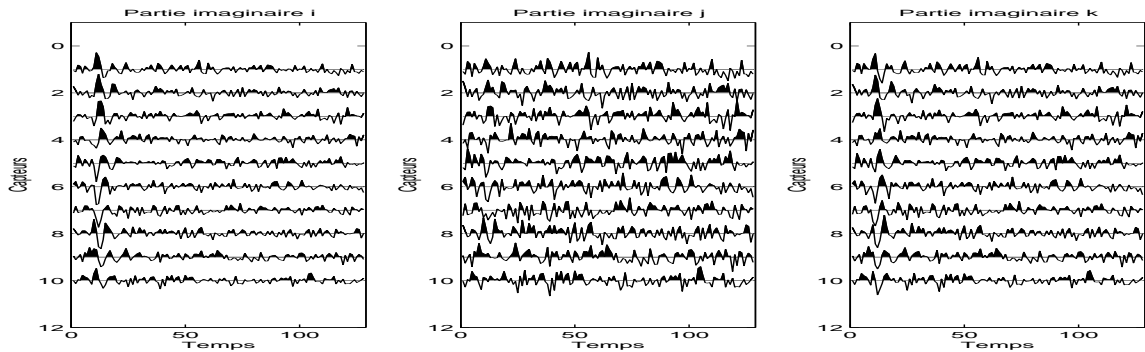


Fig. 4.7 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement et additionnée à du bruit. Mélange de départ. RSB=8 dB.

est prédominante. Le sous-espace signal obtenu par troncature de rang 1 de la SVDQ est présenté sur la figure 4.9.

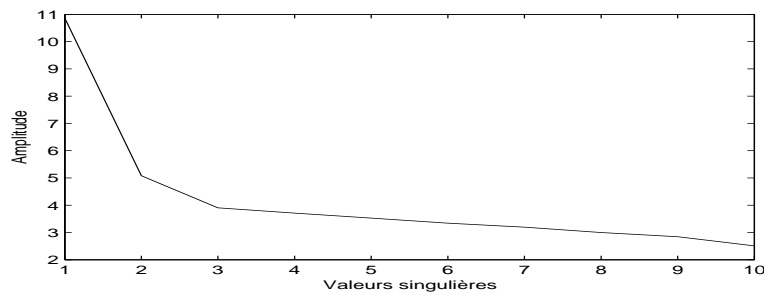


Fig. 4.8 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement bruitée. Valeurs singulières de la décomposition SVDQ.

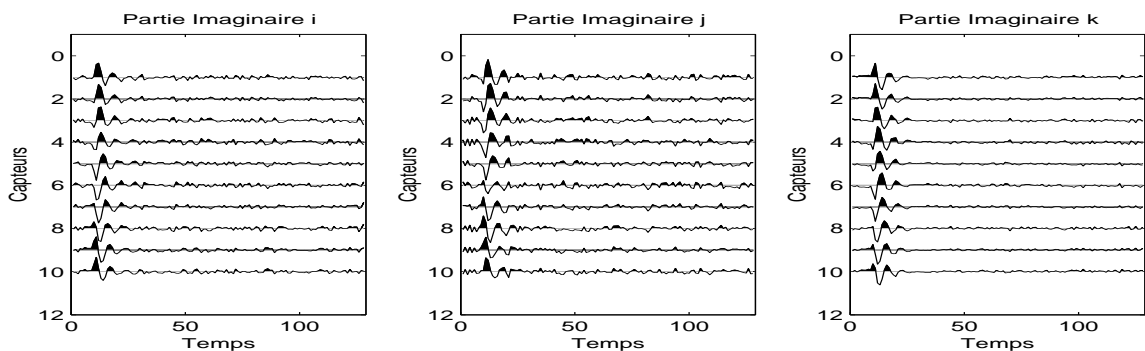


Fig. 4.9 – Cas d'une onde dispersive polarisée elliptiquement ajoutée à du bruit. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang 1 de la SVDQ.

On voit, sur l'estimation du sous-espace signal (fig. 4.9), que l'onde a été correctement retrouvée sur les trois composantes. Ceci autorise une bonne estimation de la polarisation de cette onde. On voit que, comme dans le cas vectoriel 2D, une seule valeur singulière permet de reconstruire une onde dispersive à polarisation elliptique. Ceci est un point intéressant

pour la facilité de mise en œuvre de la méthode. L'utilisation de traitements par SVD indépendamment sur les trois composantes n'aurait pas permis de retrouver l'onde sur les trois composantes, et particulièrement sur la composante portée par la partie imaginaire j (fig. 4.7). Cet exemple montre les capacités de la SVDQ, qui sont proches de celle de la 3DSVD pour la séparation d'ondes par sous-espaces.

Nous ne présentons pas tous les cas de figures possibles en simulations avec ce traitement. Le comportement de la méthode est proche de la 3DSVD car il tient compte des relations de phase et d'amplitude entre les composantes simultanément. Il a la même restriction que tous les traitements basés sur la décomposition en valeurs singulières : la vitesse apparente infinie de l'onde à estimer. Cette restriction n'est pas rédhibitoire à l'emploi de la SVDQ (ou les autres traitements à base de SVD) car l'étape de recalage (correction de vitesse) des signaux est assez classique. Elle nécessite tout de même un fort *a priori* sur la vitesse de l'onde que l'on cherche à isoler.

La SVDQ possède l'avantage de condenser l'information des composantes des signaux vectoriels et son utilisation s'en trouve très simplifiée. Comme nous l'avons vu dans les simulations, une seule section propre suffit à décrire une onde dispersive ou non, et de polarisation quelconque. Nous présentons à présent un rapide comparatif entre les deux méthodes, abordées dans ce manuscrit, utilisant l'information de polarisation : la 3DSVD et la SVDQ

4.3.5 SVDQ ou 3DSVD ?

La SVDQ et la 3DSVD permettent de faire de la séparation par sous-espaces sur signaux 3C ou 4C. Nous présentons quelques exemples de simulations permettant de les comparer. À première vue, la 3DSVD semble plus résistante au bruit et permet de séparer des ondes de vitesses identiques ayant des polarisations différentes (cf. chapitre 3, fig. 3.34), chose que la SVDQ ne peut réussir à faire. Toutefois, la 3DSVD est plus «délicate» à utiliser, car son application nécessite l'étude des valeurs singulières trimodales, alors que la SVDQ est contrôlée à l'aide d'une seule courbe de valeurs singulières.

Nous présentons sur la figure 4.10 le sous-espace signal obtenu par troncature de rang $(2, 2, 2)$ de la 3DSVD des données présentées sur la figure 4.7. Sur cette figure, une onde dispersive de polarisation elliptique est additionnée à du bruit.

Nous comparons donc les figures 4.9 (pour la SVDQ) et 4.10 (pour la 3DSVD). On voit que les deux traitements permettent de retrouver toutes les composantes du signal, et ce, même sur la composante fortement bruitée. Les deux résultats sont du même ordre mais la 3DSVD semble un peu plus «efficace» pour isoler le signal du bruit. Toutefois, ce gain est contrebalancé par la moins grande facilité du traitement par 3DSVD. L'intérêt de la SVDQ réside dans le fait qu'elle permet, à partir de l'étude d'une seule courbe, de constituer le sous-espace signal contenant une onde dispersive de polarisation quelconque. La SVDQ est moins coûteuse en temps de calcul car elle s'obtient par la SVD d'une matrice complexe alors que la 3DSVD fait appel au calcul de trois SVD successives. La relative supériorité de la 3DSVD réside dans ce que nous avons expliqué au chapitre 2 sur le rang des tableaux 3D. Il semble

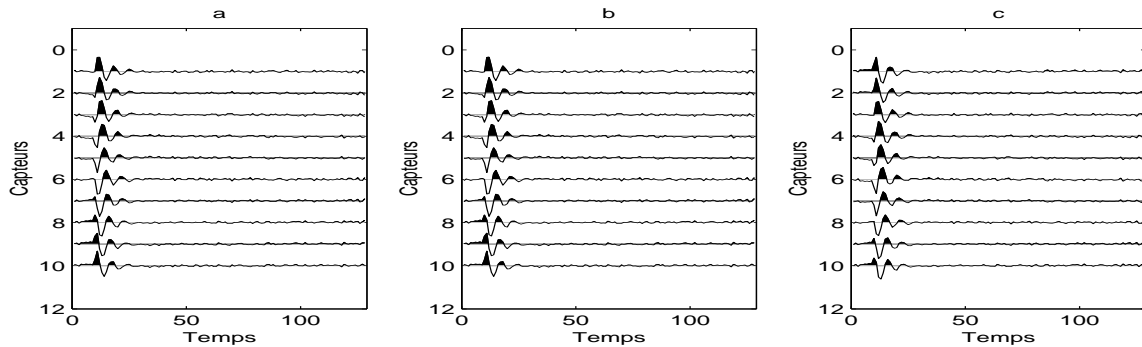


Fig. 4.10 – Onde dispersive polarisée elliptiquement noyée dans du bruit. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang $(2, 2, 2)$ de la 3DSVD.

donc que la SVDQ n'est pas équivalente à la décomposition d'un tableau de dimension 3, du fait qu'un tableau peut posséder un rang supérieur à la plus grande de ses dimensions. Elle est donc potentiellement moins «puissante» et moins «résistante au bruit». Plusieurs simulations ont été réalisées, confirmant la plus grande robustesse de la 3DSVD, mais elle ne sont pas présentées ici. L'exploitation des relations inter-composantes est donc meilleure par les techniques d'algèbre multilinéaire (3DSVD) que par les techniques d'algèbre linéaire (SVDQ), même quand celles-ci se trouvent appliquées sur le corps des complexes ou des quaternions. Nous pensons toutefois que la SVDQ reste parfaitement adaptée aux signaux vectoriels car elle permet de tenir compte de façon très élégante des propriétés qu'ils possèdent. Une validation de la SVDQ reste à faire sur des données réelles de signaux multicomposantes afin de confirmer les potentialités du traitement.

4.4 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle approche pour le conditionnement et le traitement des signaux vectoriels. Ceci nous a permis de proposer des outils de caractérisations pour ces signaux, tels que la moyenne, l'énergie, la corrélation et la Transformée de Fourier. Nous avons également montré comment se généralise la méthode de séparation d'ondes par sous-espaces au cas des signaux vectoriels. Nous avons introduit pour cela la SVD pour les matrices complexes et la SVDQ pour les matrices dont les éléments sont des quaternions. L'«expression» des signaux vectoriels à l'aide des nombres complexes et des quaternions nous semble être bien adaptée à la nature physique de ces signaux et permet de leur associer des méthodes connues pour les signaux scalaires. La SVDQ en est un bon exemple, car elle est facile à utiliser et tient compte des propriétés de polarisation des signaux de façon intrinsèque. Les potentialités de traitement des signaux vectoriels à l'aide des quaternions sont grandes et restent en grande partie à étudier. Des outils temps-fréquence (spectrogramme quaternionique) ou des algorithmes de séparation d'ondes (par diagonalisation de la matrice de covariance quaternionique) sont directement envisageables dans le prolongement des travaux présentés.

Chapitre 5

Applications sur signaux réels

Ce chapitre est dédié à l'application de la méthode de séparation d'ondes par 3DSVD introduite dans le chapitre 3, sur des signaux sismiques issus de campagnes de prospection. Nous nous focalisons principalement sur l'application de cette méthode sur des données multicomposantes, ainsi que sur des données multidimensionnelles de type «cube sismique». Cette dernière application est une ouverture sur les nombreuses applications possibles de ce traitement en sismique du fait de la fréquence croissante des enregistrements multidimensionnels. Dans la première partie de ce chapitre, nous exposons comment, sur des données multicomposantes enregistrées sur un OBC (Ocean Bottom Cable), l'utilisation de la 3DSVD permet d'estimer et caractériser les ondes guidées dans la couche d'eau. Nous montrons comment la prise en compte de toutes les composantes permet de réaliser la séparation d'ondes alors que le traitement des sections individuellement ne permet pas d'obtenir de résultats intéressants. Dans le deuxième exemple, le traitement d'un «cube sismique» permet la caractérisation et l'extraction d'une zone chaotique (complexe chenalisant) par rapport aux interfaces géologiques stables le long de ce cube.

Le but de ce chapitre est de montrer l'efficacité des traitements tenant compte simultanément de l'information présente sur l'ensemble des données recueillies par un réseau de capteurs multicomposantes ou multidimensionnel. Pour cela nous présentons deux exemples sur des données de types différents. Nous montrons comment la 3DSVD permet de réaliser une étape de séparation d'ondes sur ces enregistrements. Nous ne présentons pas d'étude comparative entre les diverses méthodes de traitement présentées dans les chapitres précédents. Une telle étude mériterait plus d'un chapitre de thèse.

L'objectif est donc de montrer que la théorie de la séparation par sous-espaces trimodaux présentée au chapitre 3 est applicable sur des données réelles. Les deux exemples présentés ont été choisis parmi plusieurs types de données traitées afin de montrer la validité des résultats obtenus par la méthode (données OBC) ainsi que l'intérêt de son utilisation (données de type cube sismique).

5.1 Données de type OBC en environnement petits fonds

Les signaux présentés dans cet exemple d'application nous ont été fournis par la Compagnie Générale de Géophysique (CGG). Ils ont fait l'objet de traitements utilisant la «SVD par polarisation» (cf. chapitre 2) [Glangeaud01]. Lors d'une campagne de sismique marine, un câble (OBC) est déposé au fond de l'eau. Il repose à une profondeur de 14 mètres et une explosion générée par un canon à air tracté par un navire. Le câble est constitué de capteurs à quatre composantes : un hydrophone H_y , un géophone vertical Z et deux géophones horizontaux X et Y . Les données que nous allons traiter sont présentées sur la figure 5.1.

Un prétraitement de correction de vitesse a été appliqué. La vitesse de correction étant égale à la vitesse de propagation du son dans l'eau, les ondes s'étant propagé dans l'eau arrivent avec une vitesse apparente infinie sur l'antenne (fig. 5.1). Chaque composante de chacun des 19 capteurs considérés enregistre 128 échantillons temporels. La taille des données que nous allons traiter est donc $N_c \times N_x \times N_t = 4 \times 19 \times 128$. Sur les composantes des données de départ (fig. 5.1), une onde est dominante. C'est une onde dispersive de forte énergie, elle est particulièrement présente sur les composantes Hydrophone et Géophone Z . On voit que le paquet d'onde a une forme de triangle, significatif d'un allongement du signal avec la distance et du changement de contenu spectral (apparition de différents modes guidés quand la distance entre la source et le capteur augmente) [Mari00]. Nous avons donc appliqué la méthode de séparation par sous-espaces utilisant la 3DSVD sur ces données. Comme nous l'avons montré dans les simulations, le caractère dispersif des ondes que nous cherchons à isoler engendre un sous-espace signal qui est de rangs (dans les trois directions) supérieurs à un. Dans ce cas précis, le sous-espace signal est formé par une troncature de rang(3, 4, 4). Le résultat est présenté sur la figure 5.2. Le sous-espace bruit obtenu est, présenté sur la figure 5.3.

Dans cette étude, un lissage a été effectué. Ce moyennage a été effectué suivant la direction N_x (sur les capteurs), afin de pallier l'ouverture du paquet d'ondes. En fait, le «bloc de

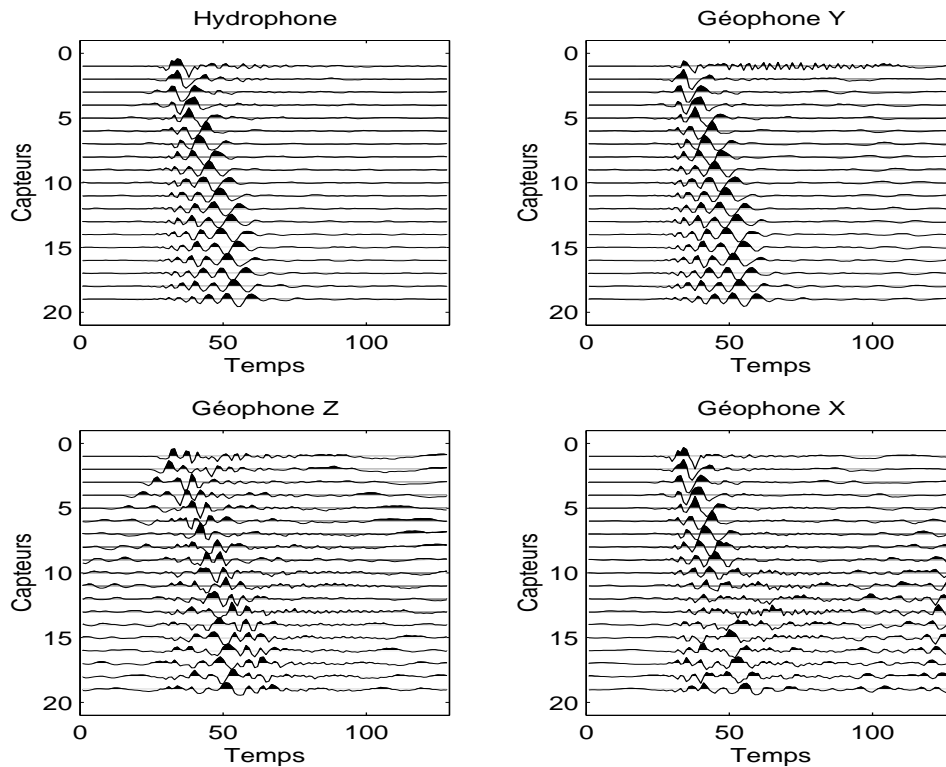


Fig. 5.1 – Enregistrement après correction de vitesse (vitesse du son dans l’eau). Les sections sismiques sont représentées normalisées en amplitude. Données CGG (J. Meunier).

données» de taille $4 \times 19 \times 128$ a été traité par sous-blocs successifs de taille $4 \times 7 \times 128$, et de façon glissante (voir Chapitre 3). Chaque sous-bloc étant obtenu par décalage d’une trace du précédent. Ensuite, une fois les sous-espaces signal estimés pour ces sous-blocs, un moyennage est effectué. Cette méthode permet de tenir compte de l’allongement du train d’ondes. Sans un moyennage, il n’est pas possible de tenir compte de ce phénomène. Les valeurs des trois n – rangs du sous-espace signal sont explicables (ce que nous ferons plus loin) mais il n’est pas possible de les prédire (même par l’étude des valeurs singulières). Nous touchons du doigt ici les limites de l’application des méthodes de séparation d’ondes en sismique. En effet, un des problèmes majeurs de l’application de ces techniques réside dans l’incertitude sur le contenu de l’enregistrement. C’est pourquoi, dans la majorité des cas, la séparation d’ondes revient à la suppression d’un évènement très énergétique, et donc prédominant sur l’enregistrement, susceptible de masquer des ondes ou à la dissociation de deux (ou plus) évènements sismiques. Cette démarche nécessite une connaissance *a priori* importante sur les ondes en présence. Une connaissance du milieu permet de prévoir les ondes que l’on devrait retrouver sur l’enregistrement, et peut permettre de juger de la qualité du résultat de la séparation. Ce critère de séparation n’est bien sûr pas objectif, mais intègre une «vraisemblance géophysique» des phénomènes en présence. Nous sommes ici dans le cas où l’onde dispersive monopolise la totalité de la dynamique du document sismique (particulièrement sur les composantes Hydrophone et Géophone Z). Ce train d’ondes provient de la propagation

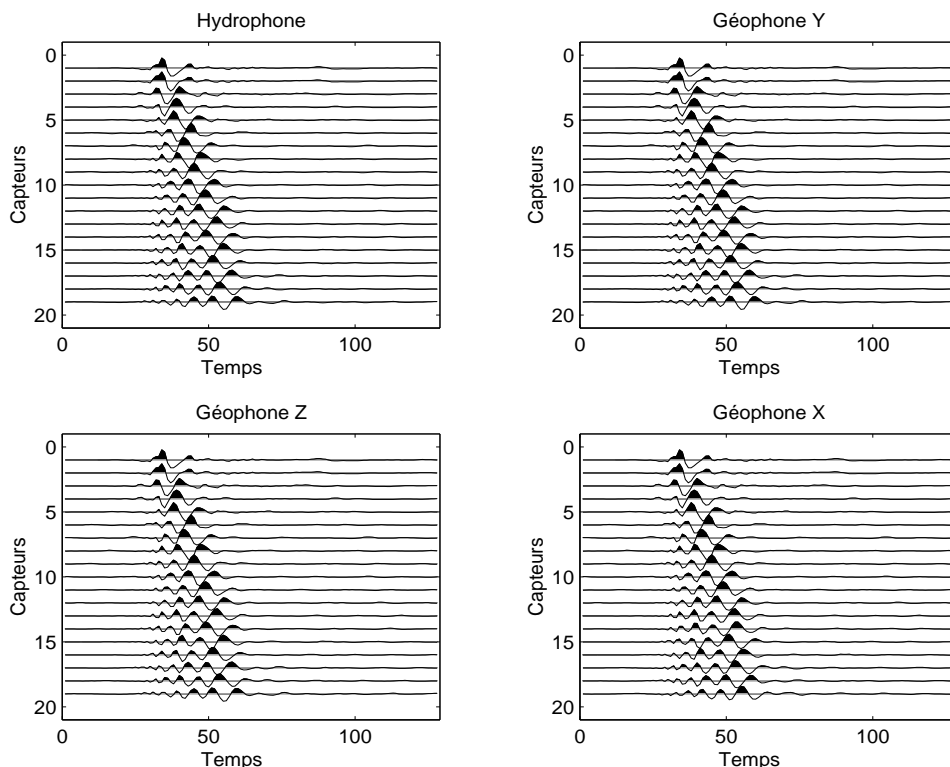


Fig. 5.2 – Données de type OBC. Sous-espace signal obtenu par troncature de rang(3,4,4) de la 3DSVD. Résultat après lissage sur des blocs de taille $4 \times 7 \times 128$ suivant le mode N_x (direction «distance»).

d'une partie de l'énergie de la source dans l'eau, mais une autre partie s'est vraisemblablement propagée dans le sous-sol. La démarche suivie ici est donc de tenter d'extraire la contribution de ces ondes guidées sur les quatre composantes enregistrées. La qualité de la séparation est ensuite jugée en fonction de la vraisemblance géophysique que peuvent avoir les ondes retrouvées après élimination du train d'ondes guidées, *i.e.* dans le sous-espace bruit (fig. 5.3). Ainsi, on peut voir dans le sous-espace signal obtenu par 3DSVD (fig. 5.2), la contribution des ondes guidées sur les quatre composantes. Les représentations sont normalisées, ce qui ne fait pas apparaître que la contribution sur la composante X est 10 fois inférieure à celle de la composante géophone, mais permet de voir que ces ondes étaient tout de même présentes sur X. En comparaison, on voit sur les sous-espaces signal obtenus par SVD classiques appliquées indépendamment sur les quatre composantes (fig. 5.4), que diverses ondes sont dans ce sous-espace selon qu'on regarde les différentes composantes. L'avantage de la 3DSVD est ici qu'elle permet de trouver la contribution des ondes guidées sur toutes les composantes, alors que la SVD traite les composantes séparément.

La qualité, et la réussite de la séparation est ensuite évaluée sur les événements sismiques retrouvés dans les sous-espaces bruit. C'est un mélange de plusieurs ondes sismiques et de bruit que nous retrouvons dans le sous-espace bruit de la méthode par SVD (fig. 5.5), du fait de l'incohérence spatiale et fréquentielle des événements. Par contre, le sous-espace bruit

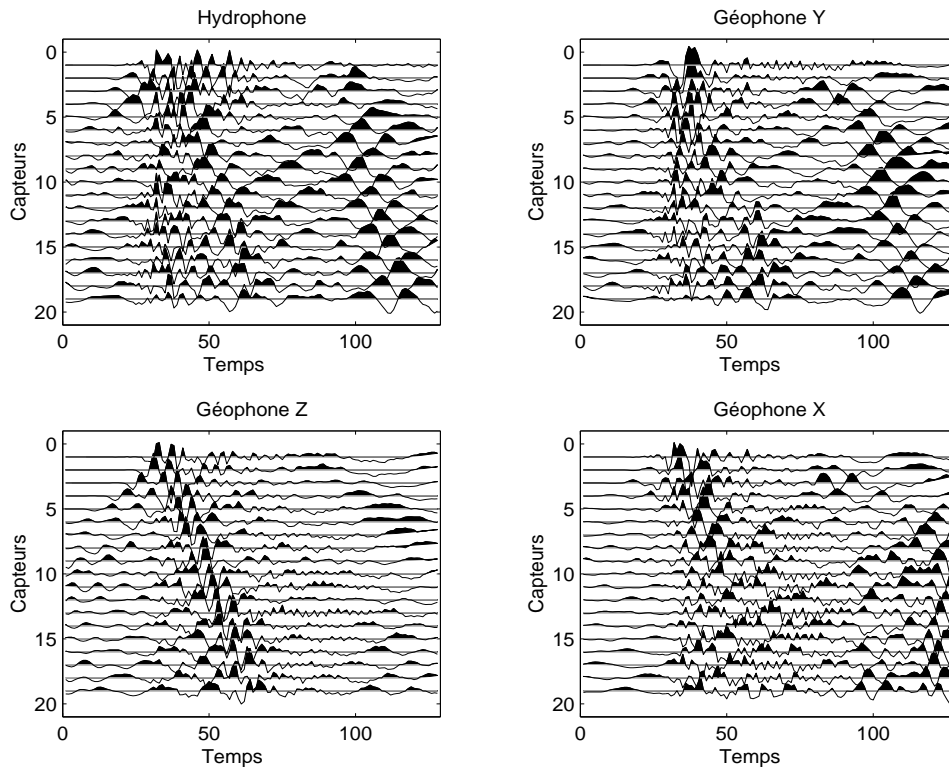


Fig. 5.3 – Données de type OBC. Sous-espace bruit obtenu par 3DSVD.

obtenu par 3DSVD (fig. 5.3) comporte des ondes qui ont une cohérence spatiale importante. On voit ainsi des ondes traverser le document du bord supérieur droit vers le bord inférieur gauche. Ces ondes sont sans doute des ondes réfléchies ou réfractées dans le sous-sol que l'on ne pouvait voir avant la séparation. Sur la composante Z, l'évènement sismique déjà visible sur les données originales se retrouve plus clairement. La comparaison avec les résultats obtenus par SVD sur les différentes composantes est assez probant et met bien en évidence l'apport de la 3DSVD pour le traitement des signaux multicomposantes.

Il nous faut revenir sur le choix des n -mode rangs du sous-espace signal défini pour la 3DSVD. Leur détermination a été obtenue par essais successifs, avec pour critère la cohérence des formes d'ondes dans le sous-espace signal (et leur comportement sur l'antenne et entre les composantes). L'inspection du sous-espace bruit permet également de juger du nombre de vecteurs singuliers nécessaires dans les trois modes pour permettre la bonne extraction des ondes guidées. Nous avons choisi la troncature de rang(3, 4, 4). Cela veut dire que 3 polarisations propres sont nécessaires, ainsi que 4 ondelettes propres et 4 comportements en distance, pour décrire le paquet d'ondes guidées. En fait, les deux premières ondelettes sont Transformées de Hilbert l'une de l'autre, ce qui est compréhensible (comme expliqué au chapitre 3) car les ondes sont dispersives. Ces deux ondelettes ont des comportements en distance différents, mais des polarisations identiques. Ces deux premières ondelettes sont obtenues par une troncature de rang(1, 2, 2). Ensuite, deux autres ondelettes sont nécessaires, avec leurs

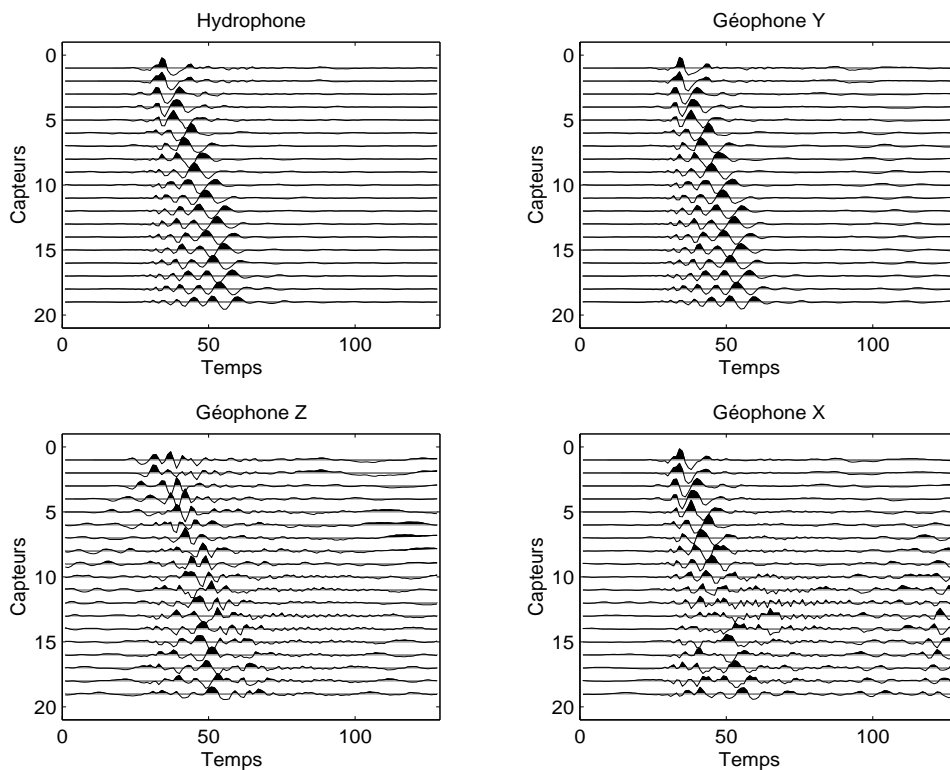


Fig. 5.4 – Données de type OBC. Sous-espace signal par troncatures de rang 4 des SVD des composantes prises séparément.

polarisations et comportements en distance respectifs, pour compléter le contenu fréquentiel des ondes guidées. L'ensemble de ces ondelettes et de leurs comportements forment le sous-espace bruit obtenu par 3DSVD. Il est clair que si le résultat de la séparation est intéressant, l'étape de détermination des composantes du sous-espace reste une étape «handicapante» pour la méthode. Toutefois, les résultats obtenus, en comparaison à ceux obtenus par SVD indépendamment sur les quatre composantes, font de cette méthode une technique puissante de séparation d'ondes parfaitement adaptée aux signaux vectoriels.

Remarque : il faut noter que des résultats quasi identiques peuvent être obtenus à l'aide de la «SVD par polarisation» sur ces données de type OBC. Ceci renforce l'idée que l'utilisation de la 3DSVD sur données réelles multicomposantes donne des résultats corrects, car validés par une autre méthode. L'intérêt de choisir la 3DSVD plutôt que la «SVD par polarisation» réside dans le fait qu'elle traite toutes les composantes de l'enregistrement à la fois et qu'elle peut, potentiellement, tenir compte de plus d'information que la technique matricielle.

La 3DSVD est donc un outil efficace pour la caractérisation et l'extraction d'ondes fortement énergétique, comme les ondes guidées. Elle doit également permettre d'améliorer les résultats de séparation sur des données de type Profil Sismique Vertical (PSV) multicomposantes, où les ondes directes masquent les autres ondes par leurs fortes amplitudes. De manière générale, la 3DSVD nous semble particulièrement adaptée au traitement des signaux vectoriels, et apportera des améliorations significatives lors de son application sur tout type

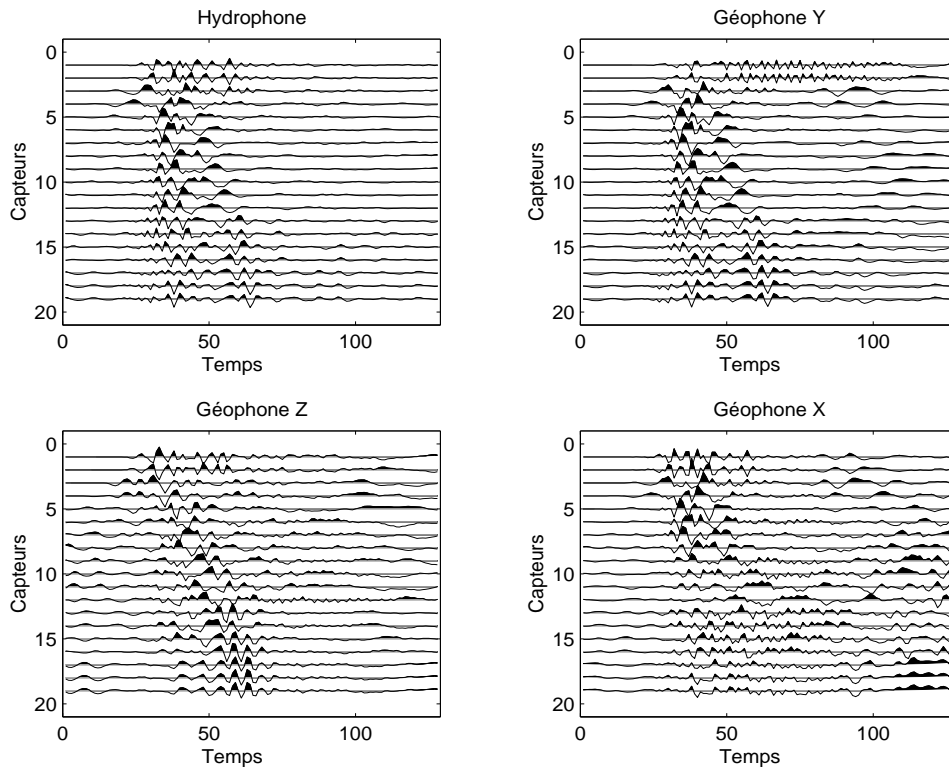


Fig. 5.5 – Données de type OBC. Sous-espace bruit obtenu par SVD.

de données multicomposantes.

5.2 Données de sismique réflexion 3D

Nous parlons ici de signaux multidimensionnels, issus d'une campagne de sismique réflexion lors de laquelle un réseau bidimensionnel de capteurs monocomposantes a permis de recueillir un volume 3D. Ce volume sismique représente directement le volume de terrain situé sous le réseau de capteurs. Le cube que nous traitons est présenté au chapitre 1 (fig. 1.16). Il nous a été fourni par la société TotalFinaElf. Il a fait l'objet d'études antérieures, et notamment dans des phases de segmentation 3D [Lariani01]. Afin de juger les qualités du traitement que nous allons effectuer sur ce cube sismique, il conviendrait de regarder celui-ci dans son intégralité, mais nous nous restreindrons à l'observation des résultats sur quatre «tranches», définies pour les offsets suivant X suivants : 1, 20, 35 et 50. Ces quatre tranches dans le cube de départ sont représentées sur la figure 5.6.

Nous allons appliquer sur ce cube la technique de séparation par sous-espaces décrite au chapitre 3. La différence avec l'étude précédente réside ici dans la nature physique des directions du cube. Nous avons une direction temps, correspondant aux échantillons enregistrés par chaque capteur, et deux directions de distance, décrivant la surface de terrain au dessous de laquelle se situe la zone étudiée. Il n'y a pas d'information de polarisation. La taille du volume de données diffère du cas multicomposantes, qui était limité à quatre dans la direction

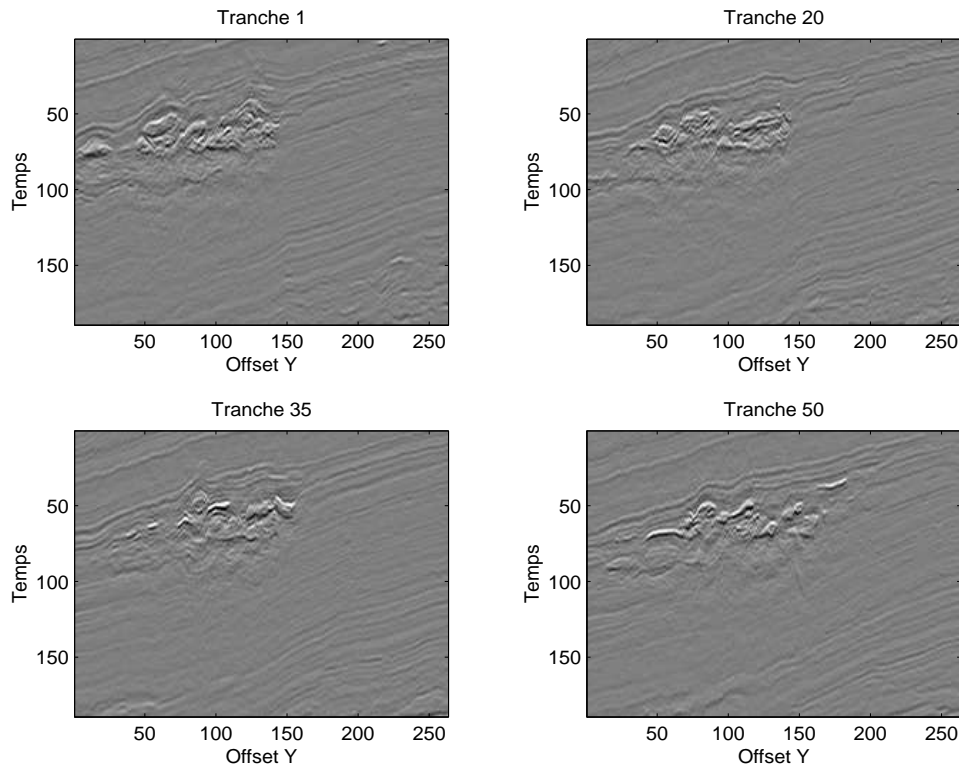


Fig. 5.6 – Cube sismique de départ. Tranches du cube aux X-offsets 1, 20, 35 et 50.

polarisation (ou composantes). Pour les données multidimensionnelles, il n’y a pas de limite théorique à la taille du cube suivant les offsets X et Y. Cela dépend de l’acquisition (nombre de capteurs, nombre de lignes de capteurs) et de la résolution désirée. La taille du cube de données que nous traitons ici est : $50 \times 183 \times 256$.

Nous effectuons la décomposition de ce cube de données à l’aide de la 3DSVD. Les bases propres estimées dans les trois directions du cube nous donnent : une base d’ondelettes sismiques dans la direction temps, une base de comportements en distance suivant l’offset X et une base de comportements en distance suivant l’offset Y. Au vu du cube de départ (fig. 5.6), il y a deux types de structures distinctes dans la formation géologique : des horizons (lignes obliques présentes dans tout le cube) et une zone chaotique (milieu du cube). Cette partie turbulente est un complexe chenalisant, dans lequel pourrait être piégés les hydrocarbures. Nous allons nous servir de la 3DSVD pour séparer ces deux zones. Cette opération a pour but d’isoler le complexe chenalisant pour une étude aval plus approfondie et peut également servir de prétraitement à une étape de segmentation 3D [Lariani01, Lebihan01e] ou à tout autre opération d’extraction d’information géophysique.

Il est possible de traiter le cube en entier, par une 3DSVD directe de celui-ci. Une étude des valeurs singulières dans les trois directions révèle une décroissance assez monotone des valeurs singulières. Il est possible de déterminer la troncature de la 3DSVD appropriée à partir de ces courbes, mais cela risque d’être assez fastidieux. Nous avons choisi une autre

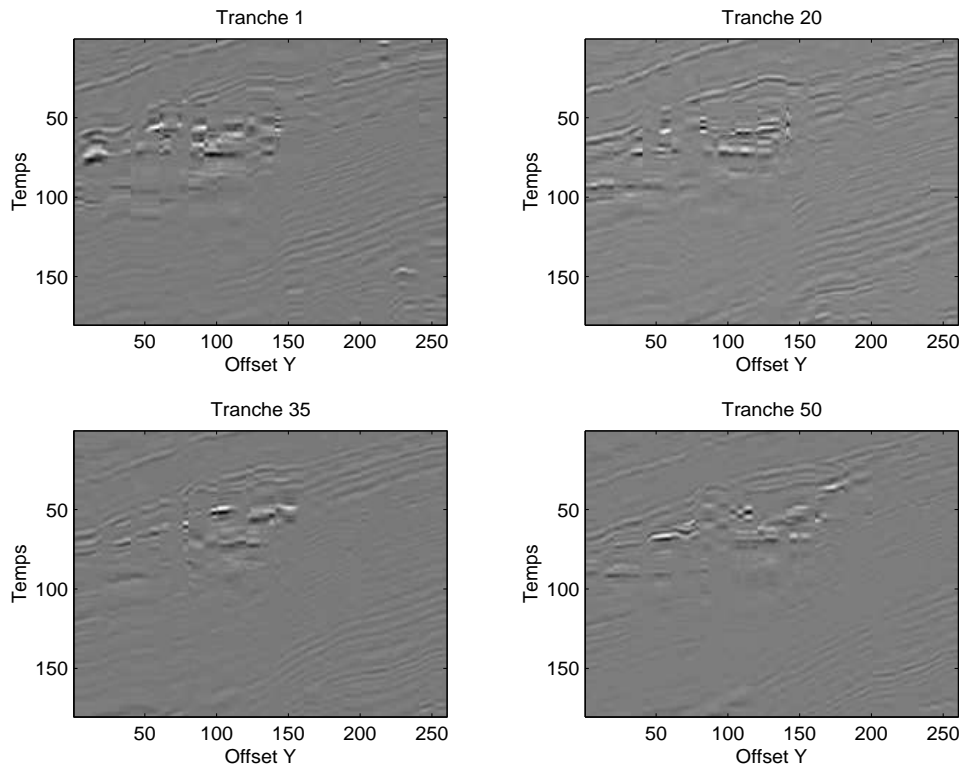


Fig. 5.7 – Cube sismique. Sous-espace signal de rang(2, 2, 2) par 3DSVD avec lissage trimodal (moyennage sur sous-cubes de taille $10 \times 20 \times 20$).

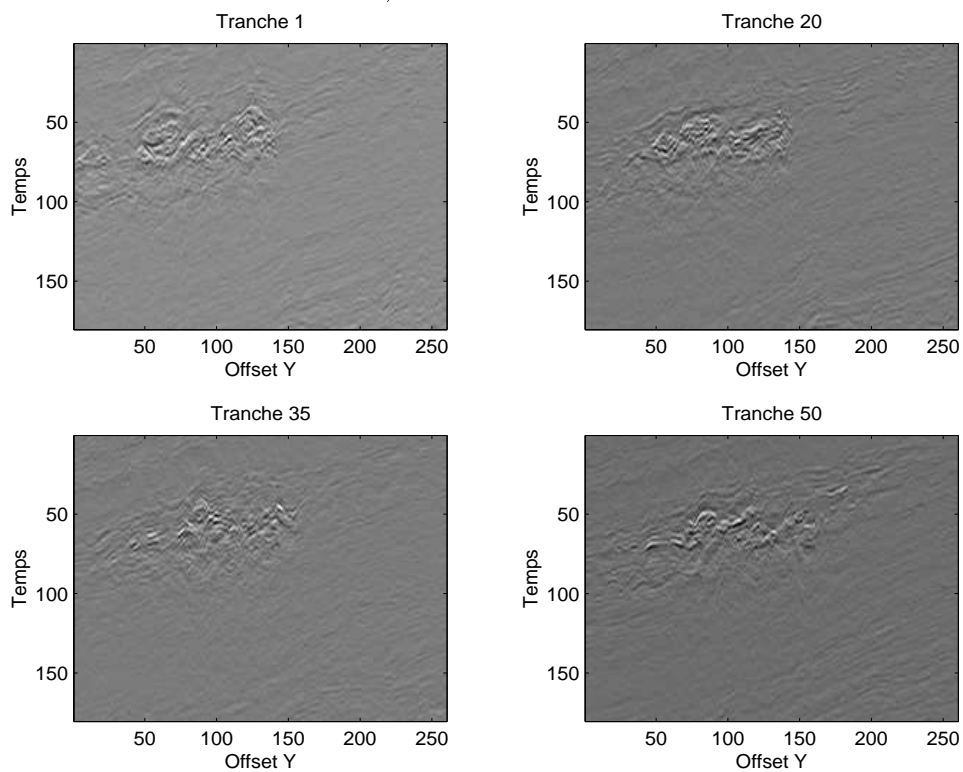


Fig. 5.8 – Cube sismique. Sous-espace bruit obtenu par soustraction de la troncature de rang(2, 2, 2), par 3DSVD, du cube de départ.

approche par sous-cubes, utilisant le lissage trimodal (cf. chapitre 3). Nous avons donc fait la 3DSVD de sous-cubes de tailles $10 \times 20 \times 20$ et moyenné de façon glissante les résultats obtenus pour le sous-espace signal. Le moyennage a été effectué dans les trois directions. La détermination du nombre de vecteurs singuliers, dans les trois directions, nécessaire pour une bonne séparation est encore une fois arbitraire. Le critère de réussite est à nouveau basé sur la «vraisemblance géophysique» du résultat. Nous présentons deux cas de figures : le premier où le sous-espace signal est obtenu par troncatures de rang(2, 2, 2) de chaque sous-cube (fig. 5.7), et le second où la troncature est de rang(3, 3, 3) (fig. 5.9). On retrouve dans les deux sous-espaces signal les horizons autour du complexe chenalisant, ainsi que quelques horizons dans la partie inférieure droite. On retrouve également les interfaces fortement marquées dans le complexe (parties noires et blanches dans le complexe). Dans le cas de la troncature de rang(2, 2, 2), le complexe chenalisant est principalement dans le sous-espace bruit, sauf quelques parties énergétiques qui restent dans le sous-espace signal. Il est possible de voir plus aisément les mouvements des ses constituants au fil des tranches. Dans le cas de la troncature de rang(3, 3, 3), il ne reste que des détails «hautes fréquences» du complexe dans le sous-espace bruit. Ces détails ne représentent pas bien la structure du complexe, cela est dû au fait que trop d'énergie est concentrée dans le sous-espace signal. En effet, on voit sur la figure 5.9 que les horizons et une partie du complexe sont présents dans le sous-espace signal. La séparation peut alors être considérée comme mal effectuée. Mais on peut aussi voir les deux cas présentés comme des niveaux de détails différents dans la description du complexe chenalisant. Dans la troncature de rang(2, 2, 2), nous obtenons un premier niveau de détail, et dans la troncature de rang(3, 3, 3), nous avons un niveau de détails plus «hautes fréquences». Ces deux résultats peuvent donc trouver une utilité selon l'objet de l'étude de la structure présente dans le cube. Pour notre part, nous préférons ici, la troncature de rang(2, 2, 2) car elle permet de montrer une évolution du complexe chenalisant, dans son ensemble, le long de la distance en X.

NB : Nous n'avons pas présenté le traitement par SVD successives des tranches du cube, mais leurs résultats sont inexploitable du fait de la complexité des images. Cette complexité engendre un rang de chaque image très fort (voire plein) et la SVD ne permet pas de séparation des structures nous intéressant. Seule une approche par 3DSVD, tenant compte de la redondance d'information entre les tranches, permet d'obtenir des résultats intéressants de façon assez simple.

5.3 Conclusion

Nous avons vu comment la 3DSVD peut améliorer de façon considérable les résultats des traitements des signaux multicomposantes. Nous avons montré que la prise en compte des informations contenues sur toutes les composantes d'un enregistrement de type OBC permet de caractériser et d'extraire de façon précise un train d'ondes guidées masquant les ondes sismiques propagées dans le sous-sol. Cette opération n'étant pas envisageable avec des

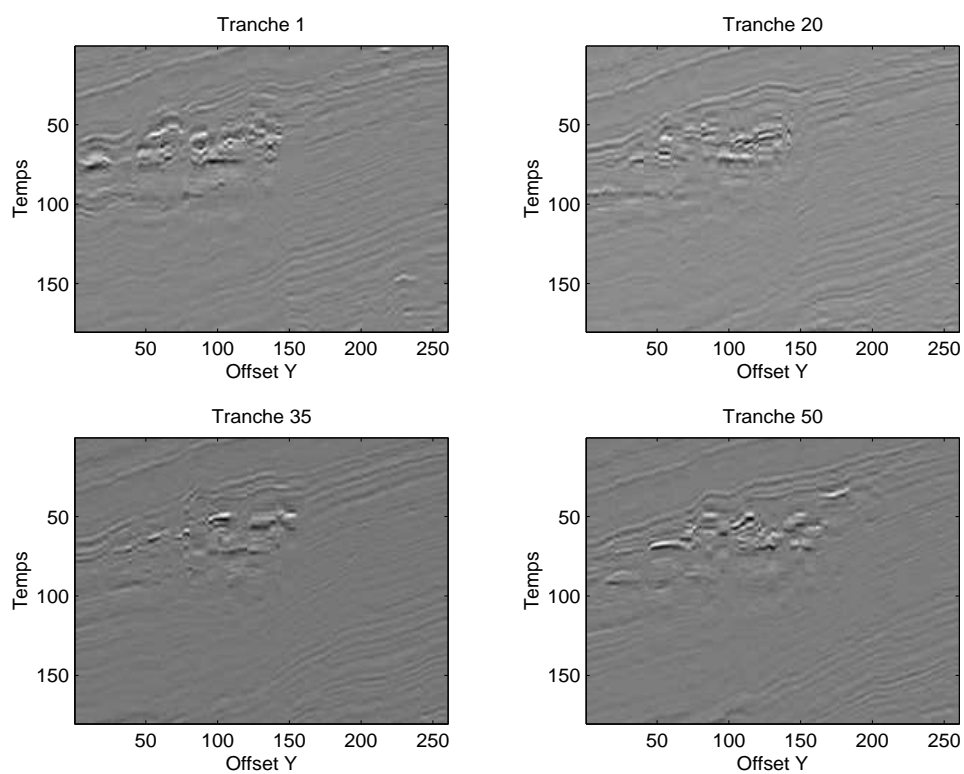


Fig. 5.9 – Cube sismique. Sous-espace signal de rang(3, 3, 3) par 3DSVD avec lissage trimodal (moyennage sur sous-cubes de taille $10 \times 20 \times 20$).

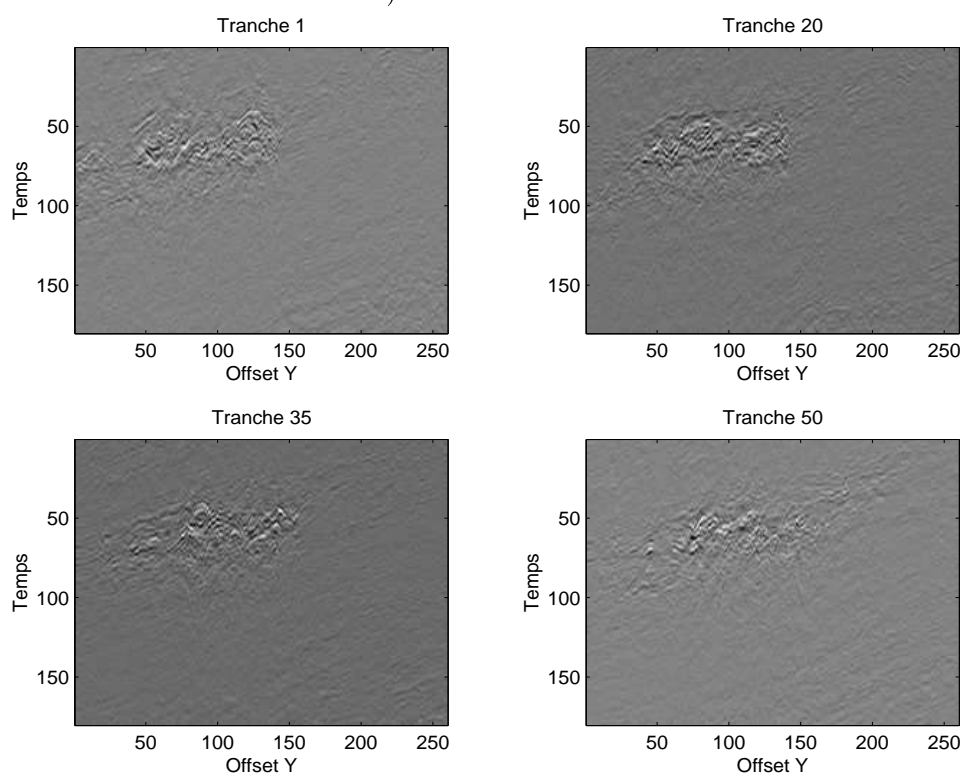


Fig. 5.10 – Cube sismique. Sous-espace bruit obtenu par soustraction de la troncature de rang(3, 3, 3), par 3DSVD, du cube de départ.

techniques matricielles classiques. Nous avons également proposé d'utiliser la 3DSVD pour la décomposition des cubes de sismique réflexion en une somme de cubes propres contenant chacun des structures géologiques distinctes. Ce type de traitement n'est pas possible si l'on considère les tranches du cube séparément, ce qui justifie l'utilisation des méthodes basées sur les décompositions de tableaux pour ce type de données. Enfin, il conviendrait de valider la 3DSVD, ainsi que les autres méthodes proposées dans ce manuscrit, sur d'autres types de données sismiques (PSV multicomposantes, OBS, diaggraphie, etc).

Conclusions et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a permis d'établir des outils algébriques pour le traitement des signaux vectoriels. Nous avons proposé deux méthodes de séparation d'ondes adaptées à ces signaux. L'efficacité de ces méthodes dans le cadre d'une chaîne de traitement de signaux sismiques a été montrée par leur application sur des signaux sismiques multicomposantes provenant de campagnes sismiques.

Après une présentation des signaux multicomposantes rencontrés en sismique, dans le premier chapitre, nous avons proposé de conserver la structure tridimensionnelle de ces signaux pour leur traitement. Cette idée a été renforcée par l'existence de techniques de décomposition en valeurs singulières des tableaux multidimensionnels. Une des techniques utilisée en sismique pour faire de la séparation d'ondes est la SVD (décomposition en valeurs singulières) directement appliquée sur la section sismique à valeurs réelles. Dans le cas d'une acquisition monocomposante, la section sismique étant une matrice, la SVD permet de faire une séparation en «sections propres» qui autorise le découpage du document sismique en une partie signal utile (sous-espace signal) et une partie bruit (sous-espace bruit).

Pour ce qui est des signaux multicomposantes, la SVD ne convient plus, car elle ne peut prendre en compte qu'une composante à la fois, et ne tient donc pas compte des relations existant entre les composantes. Nous avons proposé, dans ce travail, deux nouvelles façons de faire de la séparation d'ondes sur des signaux multicomposantes.

La première méthode est basée sur le fait que les signaux vectoriels peuvent être «stockés» sous forme de tableaux tridimensionnels. Ainsi, à l'aide la 3DSVD introduite au chapitre 2, il est possible d'étendre la méthode de séparation par sous-espaces aux tableaux et de faire de la séparation d'ondes polarisées par décomposition en valeurs singulières du tableau de données. La détermination de la taille du sous-espace signal et du sous-espace bruit est alors contrôlée par l'étude des valeurs singulières trimodales, traduisant la répartition de l'énergie dans le document sismique. Cette méthode utilisant la 3DSVD se révèle très efficace pour le traitement des signaux vectoriels et permet de tenir compte simultanément de l'information de polarisation apportée par l'utilisation des capteurs vectoriels. La validation de cette technique a été faite sur simulations au chapitre 3 et son utilisation sur des données provenant de campagnes sismiques a révélé sa capacité à améliorer la qualité de la séparation d'ondes (Chapitre 5). Cette amélioration est celle relative aux résultats obtenus par une technique de type SVD composante par composante. Dans le dernier chapitre, nous avons également montré que la 3DSVD permet d'isoler, dans un cube de sismique réflexion, une

partie utile pour le géophysicien : un réservoir naturel. Cette application de la 3DSVD sur des données tridimensionnelles, mais non vectorielles, traduit sa capacité à s'adapter à des signaux géophysiques de nature tridimensionnelle.

La deuxième méthode que nous avons proposée s'appuie sur une nouvelle approche des signaux vectoriels. Nous proposons de «coder» chaque échantillon temporel d'un signal recueilli sur un capteur vectoriel à l'aide d'un quaternion. Ce conditionnement des signaux vectoriels permet, au prix d'une faible augmentation de la complexité des outils mathématiques à utiliser, une extension naturelle de la méthode par sous-espace grâce à la décomposition en valeurs singulières des matrices de quaternions (SVDQ). Nous avons introduit cette décomposition et proposé une méthode par sous-espace permettant de pratiquer la séparation d'ondes sur les enregistrements multicomposantes. L'intérêt de cette méthode réside en grande partie dans la simplification de la détermination du rang du sous-espace signal. Celle-ci est aussi simple que dans le cas de la SVD (enregistrement scalaire), et permet en plus de retrouver les ondes dispersives et de polarisations quelconque très facilement. Cet avantage est dû à l'utilisation des quaternions qui permettent de tenir compte des relations de phase et d'amplitude entre les composantes d'un signal vectoriel.

La comparaison des deux méthodes proposées est assez difficile à entreprendre car la 3DSVD et la SVDQ permettent d'obtenir des résultats quasi similaires, avec cependant une plus forte résistance au bruit de la 3DSVD. L'utilisation de la 3DSVD est plus complexe car elle nécessite de fixer trois rangs, pour la troncature de la décomposition, menant au sous-espace signal. La SVDQ ne nécessite que de fixer un rang pour former le sous-espace signal. En contrepartie, la 3DSVD est une technique d'algèbre linéaire, recherchant les relations dans les trois directions du volume de données tridimensionnel formé par les signaux vectoriels. La SVDQ fait elle appel à une décomposition matricielle, potentiellement moins puissante que la décomposition d'un tableau tridimensionnel. Un avantage certain de la SVDQ réside dans le fait que ses résultats sont insensibles à la dispersion et la polarisation de l'onde à identifier. La 3DSVD nécessite d'agrandir la taille du sous-espace quand les ondes en présence sont à caractère dispersif et polarisées autrement que linéairement.

Les perspectives des travaux présentés dans ce mémoire sont de deux nature : l'utilisation des techniques d'algèbre multilinéaire et l'utilisation des quaternions.

En utilisant le stockage des signaux vectoriels ou multidimensionnels dans des tableaux, il est possible d'étendre les techniques matricielles classiques pour les signaux scalaires aux signaux vectoriels. Ainsi, une version de la matrice spectrale pour les signaux multicomposantes est envisageable mais nécessite la décomposition en éléments propres d'un tableau de dimension quatre. Le traitement nécessitera un temps de calcul plus long, mais la prise en compte des informations de toutes les composantes des signaux devrait améliorer de façon notable les performances de cette technique. Une première étude théorique de ce «tableau spectral» est disponible dans l'Annexe A. Une façon d'accroître la qualité de la séparation d'ondes dans l'approche par tableau consisterait en l'introduction des statistiques d'ordre supérieur (*SOS*). En effet, comme nous l'avons dit, la 3DSVD est équivalente à un traitement utilisant

les statistiques d'ordre 2 des signaux, car elle recherche des bases orthogonales dans les trois modes du tableau. L'utilisation des *SOS* pourrait permettre de rechercher, par exemple, une base d'ondelettes sismiques propres non plus décorréelées mais indépendantes à l'ordre 4 (les ondelettes propres posséderaient alors des inter-cumulants d'ordre 4 nuls). Cette extension serait très intéressante car, comme nous l'avons indiqué, une base d'ondelettes propres obtenue par 3DSVD ne décrit pas forcément des ondes sismiques directement, car les ondes sismiques ne sont pas forcément décorréelées entre elles. L'utilisation des *SOS* pourrait conduire à de meilleurs résultats de séparation et à l'estimation d'une base de décomposition d'ondelettes plus proche des ondes sismiques présentes dans le document sismique.

La deuxième piste de recherche ouverte dans cette thèse trouve son origine dans le chapitre 4. En effet, au vu des premiers résultats présentés dans ce chapitre, il nous semble évident que les quaternions sont un outil puissant permettant de rendre compte (et de tenir compte lors des traitements) des propriétés des signaux vectoriels. Les quaternions doivent donc nous permettre d'adapter les traitements classiques pour les signaux scalaires aux signaux vectoriels. Nous avons présenté l'application de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice de quaternions. Cet outil doit permettre de construire une version quaternionique de la matrice spectrale (à l'aide de la transformée de Fourier quaternionique). La séparation de deux sources polarisées sur deux capteurs vectoriels peut également trouver une solution par diagonalisation de la matrice de covariance quaternionique. Une extension des statistiques d'ordre supérieur pour les signaux à valeurs quaternioniques serait nécessaire pour appliquer les traitements de type ICA sur des mélanges de signaux de ce type. Enfin, les techniques de type Fourier glissant quaternionique pourraient permettre de définir des représentations particulièrement adaptées aux signaux vectoriels.

Le traitement des signaux vectoriels ayant été fait jusqu'ici à l'aide de techniques empruntées aux signaux scalaires, il reste beaucoup d'outils à définir pour ces signaux particuliers. La définition de ces outils passera, de l'avis de l'auteur, par l'utilisation des quaternions, du fait de l'adéquation de la nature de ces signaux avec l'algèbre de ces nombres hypercomplexes.

Annexes

Annexe A

Extension de la matrice spectrale pour les signaux vectoriels

Nous proposons une version de la matrice spectrale pour les signaux sismiques multicomposantes (ou vectoriels). Après un rappel sur la version classique de ce traitement pour les sections sismiques scalaires et des simulations, nous introduisons le traitement par «tableau spectral». Nous montrons comment la décomposition en valeurs singulières de ce tableau permet de proposer un traitement fréquentiel prenant en compte l'information présente sur toutes les composantes des signaux vectoriels. Aucune simulation n'est présentée pour ce traitement, le but de cette annexe étant de montrer la faisabilité de l'extension de la méthode aux signaux multicomposantes.

A.1 La matrice spectrale

Nous présentons rapidement la théorie et quelques simulations illustrant l'utilisation de la décomposition de la matrice spectrale. Cette technique a été largement étudiée et utilisée, entre autres, en sismique [Mermoz69, Samson83, Mars87, Mars88, Gavin89, Glangeaud89, Thirion95a, Fookes95, Glangeaud97, Lacoume00]. Nous n'aborderons pas ici les problèmes d'estimation de cette matrice et nous concentrerons sur l'étude de sa structure afin d'en proposer, plus loin dans ce chapitre, une version pour les signaux multicomposantes. Soit une section sismique $\mathbf{S}(x, t)$, de $\mathbb{R}^{N_x \times N_t}$, constituée de N_x capteurs enregistrant chacun N_t échantillons temporels. Il est possible de calculer la matrice des spectres de ces signaux en calculant les transformées de Fourier des signaux de chaque capteur. On obtient alors une matrice $\mathbf{S}(x, \nu)$, de $\mathbb{C}^{N_x \times N_\nu}$, définie comme :

$$\mathbf{S}(x, \nu) = TF_t [\mathbf{S}(x, t)] \quad (\text{A.1})$$

Il est alors possible de construire la matrice spectrale, de dimension $N_x \times N_x$, pour chaque canal de fréquence :

$$\mathbf{SMF}(\nu) = \xi [\mathbf{S}(x, \nu)\mathbf{S}(x, \nu)^H] \quad (\text{A.2})$$

où $\xi[\cdot]$ est un opérateur de moyennage, nécessaire pour éviter que le rang soit unitaire et la matrice non inversible. Nous ne détaillons pas l'étude de cet opérateur, mais pouvons dire brièvement qu'en pratique il consiste en un moyennage fréquentiel et/ou un moyennage en distance [Thirion95a, Mars88, Glangeaud94]. La matrice spectrale est en fait un ensemble de matrices (il y a autant de matrices que de canaux fréquentiels) représentant, pour chaque fréquence, l'interaction entre les différents capteurs de l'antenne. Cela apparaît plus facilement si l'on réécrit la matrice spectrale comme :

$$\mathbf{SMF}(\nu) = \xi \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{S}}_{n_x=1}(\nu) \cdot \overline{\underline{\mathcal{S}}_{n_x=1}(\nu)} & \cdots & \underline{\mathcal{S}}_{n_x=1}(\nu) \cdot \overline{\underline{\mathcal{S}}_{n_x=N_x}(\nu)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{\mathcal{S}}_{n_x=N_x}(\nu) \cdot \overline{\underline{\mathcal{S}}_{n_x=1}(\nu)} & \cdots & \underline{\mathcal{S}}_{n_x=N_x}(\nu) \cdot \overline{\underline{\mathcal{S}}_{n_x=N_x}(\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

La taille de la matrice spectrale est donc $N_x \times N_x \times N_\nu$, c.à.d. autant de matrices (ou «feuillet») de taille $N_x \times N_x$ qu'il y a de canaux fréquentiels. Les termes de chaque feuillet représentent les valeurs des fonctions de transfert inter-capteurs aux différentes fréquences. Il est alors possible de décomposer les matrices (de chaque canal de fréquence) en éléments propres. Cela correspond à :

$$\mathbf{SMF}(\nu) = \mathbf{U}(\nu) \mathbf{\Delta}(\nu) \mathbf{U}^H(\nu) \quad (\text{A.4})$$

avec $\mathbf{U}(\nu) \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$ et $\mathbf{\Delta}(\nu)$ à valeurs réelles non nulles uniquement sur la diagonale. Comme dans le cas de la SVD et de la TKL, on définit, à l'aide de la courbe de décroissance des valeurs propres, un sous-espace signal et un sous-espace bruit. On peut également utiliser un critère de contraste [Tas84, Mars88]. Cette décomposition est identique à celles présentées auparavant, à ceci près que dans le cas de la matrice spectrale, ce sont N_ν matrices que l'on décompose. Du coup, l'opération d'estimation des sous-espaces signal et bruit se fait également sur toutes ces matrices, donc à toutes les fréquences (ce qui accroît considérablement le temps de calcul). Une fois la matrice spectrale obtenue, il est possible d'améliorer le rapport signal à bruit (RSB) par une séparation en sous-espace signal et sous-espace bruit. Il existe différentes variantes de la matrice spectrale, dont une consistant à imposer la projection à une seule fréquence dominante (version «contrainte» ou «adaptée»). Une autre version, dite «large bande», exploite les relations entre les capteurs et entre les fréquences [Gounon98, Goncalves99].

Ensuite, on projette la matrice des spectres de la section sismique $\mathbf{S}(x, \nu)$ sur l'espace signal engendré par les p premiers vecteurs propres de la matrice inter-spectrale :

$$\mathbf{S}_{signal}(x, \nu) = \sum_{i=1}^p \delta_{ii}^{\frac{1}{2}} [\underline{\mathbf{U}}_i(\nu) \circ \underline{\mathbf{U}}_i^H(\nu)] \mathbf{S}(x, \nu) \quad (\text{A.5})$$

où les $\underline{\mathbf{U}}_i(\nu)$ sont les i premiers vecteurs propres engendrant le sous-espace signal. Une fois cette projection effectuée, on retrouve la section sismique correspondant à la partie signal par transformée de Fourier inverse :

$$\mathbf{S}_{signal}(x, t) = TF_\nu^{-1} [\mathbf{S}_{signal}(x, \nu)] \quad (\text{A.6})$$

L'effet de la décomposition de la matrice spectrale est d'estimer deux sous-espaces orthogonaux entre eux où se trouvent des ondes spectralement décorrelées. Cette technique permet d'estimer la fonction de transfert entre les capteurs. Elle ne souffre pas, en théorie, du problème d'alignement de l'onde sur la section sismique (vitesse infinie sur l'antenne). Comme dans le traitement par SVD présenté dans ce manuscrit, la séparation des ondes avec la matrice spectrale est conditionnée par la définition des sous-espaces et donc l'appréciation, par l'utilisateur, du nombre de valeurs propres (et vecteurs propres associés) nécessaires à la construction du sous-espace signal.

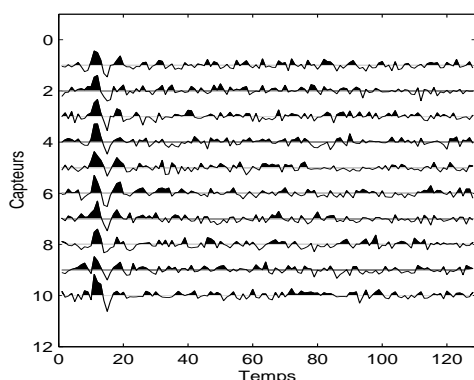


Fig. A.1 – Données simulées avec une onde et du bruit. RSB=-5 dB.

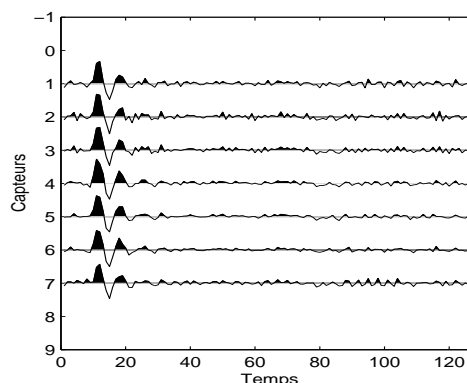


Fig. A.2 – Sous-espace signal. Estimation par moyennage en distance sur trois traces.

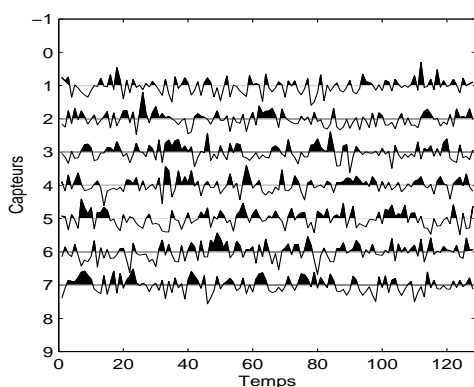


Fig. A.3 – Sous-espace bruit.

Notes : Dans cet exemple, un moyennage en distance (sur 3 traces) et un moyennage en fréquences (sur 32 canaux) ont été effectués. Le sous-espace signal est formé par la projection des données sur le premier vecteur propre. Les deux sous-espaces comportent deux traces de moins que l'espace de départ du fait du moyennage en distance (sur 3 traces). On remarque que la séparation est bonne, mais qu'il reste un peu de bruit dans la partie signal.

Seul l'ensemble des vecteurs propres du sous-espace signal présente une éventuelle cohérence avec les ondes physiques enregistrées par le réseau de capteurs, et une interprétation vecteur propre par vecteur propre n'est pas garantie d'une réalité physique. Nous présentons des

simulations résumant brièvement le comportement du filtrage matriciel dans quelques configurations classiques (figures A.1 à A.9). Une étude plus précise est faite dans [Glangeaud94].

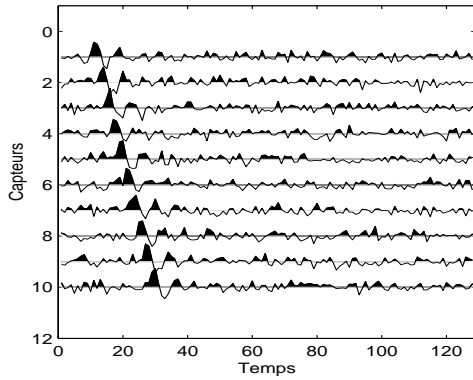


Fig. A.4 – Données simulées avec une onde et du bruit. RSB=-5 dB.

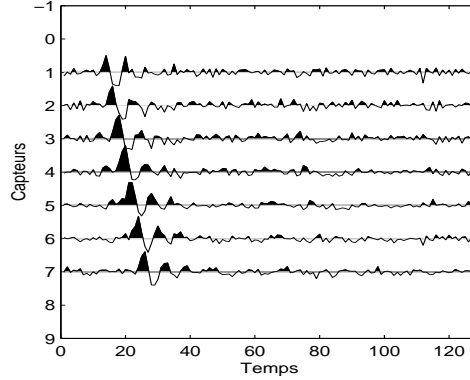


Fig. A.5 – Sous-espace signal.

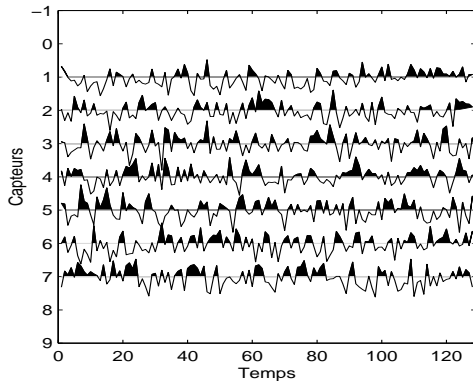


Fig. A.6 – Sous-espace bruit.

Notes : Dans cet exemple, un moyennage en distance (sur 3 traces) et un moyennage en fréquences (sur 64 canaux) ont été effectués. Le sous-espace signal est constitué à partir des deux premiers vecteurs propres. Les deux sous-espaces comportent deux traces de moins que l'espace de départ du fait du moyennage en distance. Cette exemple montre que le traitement par SMF ne nécessite pas de réalignement de l'onde avant séparation en sous-espaces (contrairement à la SVD).

Nous passons à présent à la version de la matrice spectrale pour les signaux vectoriels, que nous dénommerons «tableau spectral».

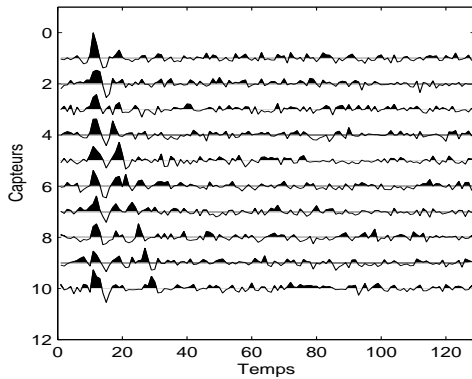


Fig. A.7 – Données simulées avec une onde et du bruit. RSB=-1.5 dB.

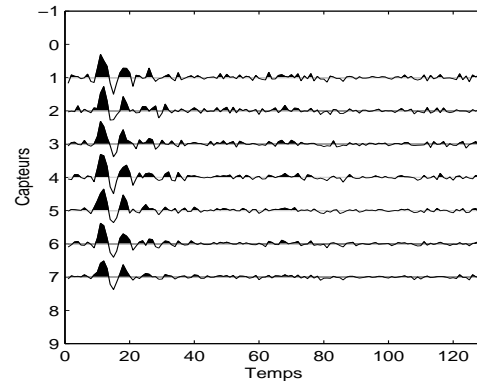


Fig. A.8 – Sous-espace signal.

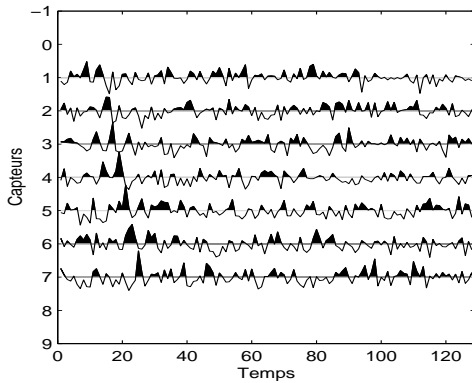


Fig. A.9 – Sous-espace bruit.

Notes : Dans cet exemple, un moyennage en distance (sur 3 traces) et un moyennage en fréquences (sur 32 canaux) ont été effectués. Le sous-espace signal est constitué à partir du premier vecteur propre et le sous-espace bruit à partir du second vecteur propre. L'effet du moyennage est encore le même (deux traces de moins). Il serait possible de refaire un traitement par SMF du sous-espace bruit pour tenter d'extraire la deuxième onde du bruit.

A.2 Généralisation de la matrice spectrale aux données multicomposantes

Nous abordons maintenant l'extension de la matrice spectrale aux données sismiques vectorielles. Notre objectif est d'adapter ce traitement fréquentiel aux réseaux de capteurs vectoriels. La prise en compte de l'information inter-composantes dans l'espace des fréquences nous permettra d'identifier les fonctions de transfert inter-composantes. Une connaissance simultanée des fonctions de transferts inter-capteurs permettra d'obtenir une image de la fonction de transfert totale du réseau. Dans le cas 2D de la matrice spectrale, la fonction de transfert est de taille $N_x \times N_\nu$. Ici, pour un réseau de capteurs vectoriels, cette fonction de transfert sera de dimension : $N_x \times N_c \times N_\nu$. Nous allons tout d'abord définir le tableau spectral, dont la décomposition en éléments propres nous permettra d'identifier la fonction de transfert de l'antenne et de faire de la séparation d'ondes.

A.2.1 Le tableau spectral

Dans le cas d'un réseau de N_x capteurs vectoriels possédant chacun N_c composantes, la taille des données est de $N_c \times N_x \times N_t$, si chaque capteur a enregistré N_t échantillons temporels. Il est alors possible de calculer la matrice spectrale sur des tranches de ce volume de données \mathcal{Y} ; chaque tranche correspondant à une composante. On calcule donc tout d'abord les transformées de Fourier des signaux de tous les capteurs, et ce, pour les N_c composantes. Dans le cas de la composante i , on a :

$$\mathbf{Y}_i(\nu) = TF_t[\mathcal{Y}_{n_c=i}] = TF_t[\mathbf{Y}_i(x, t)] \quad (\text{A.7})$$

Chaque matrice $\mathbf{Y}_{n_c=i}(x, t)$ (il y en a autant qu'il y a de composantes par capteur) est de taille $N_x \times N_t$. La matrice spectrale pour cette composante i est alors donnée par :

$$\mathcal{SMF}(\nu)_{n_c=i} = \xi [\mathbf{Y}(\nu)_i \mathbf{Y}(\nu)^H] \quad (\text{A.8})$$

tous les $\mathcal{SMF}(\nu)_{n_c=i}$ sont identiques à la matrice spectrale utilisée sur les sections sismiques scalaires. Elles sont de taille $N_x \times N_x \times N_\nu$, avec $N_\nu = N_t$, et à valeurs complexes. Le tableau spectral est alors un objet :

$$\mathcal{SMF}(\nu) \in \mathbb{C}^{N_c \times N_x \times N_x \times N_\nu} \quad (\text{A.9})$$

Le tableau spectral est donc un tableau de dimension 4. Nous allons voir à présent sa décomposition en éléments propres, qui doit être précédée d'une étape de moyennage comme dans le cas des sections sismiques monocomposante. Nous ne détaillons pas cette étape de lissage, mais elle se fait pour les différentes composantes, indépendamment des autres. Pour chaque composante on fait donc un moyennage en fréquence et un moyennage en distance. Puis on compose le tableau spectral avec ses N_c tableaux de taille $N_x \times N_x \times N_\nu$. Il n'est bien évidemment pas possible d'imaginer ici un moyennage sur les composantes, et ce, pour deux raisons : le faible nombre de composantes (quatre au maximum) et la perte d'information relative à ce moyennage (perte de la fonction de transfert inter-composantes). Le fait de ne pas moyennager sur les composantes revient à supposer que chacune des sources choisies a une polarisation constante sur l'ensemble des données collectées. Une fois le tableau spectral moyenné, on effectue sa décomposition en éléments propres.

A.2.2 Décomposition en éléments propres du tableau spectral

Le tableau spectral étant de dimension 4, on doit utiliser la 3DSVD présentée plus haut, et ce, à chaque fréquence ¹. On procède comme dans le cas de la SMF en données monocomposantes, à chaque canal de fréquence. Nous n'avons plus, pour chacun des canaux, une matrice à diagonaliser mais un tableau de dimension trois. La décomposition, pour chaque canal fréquentiel, est la suivante :

$$\mathcal{SMF}(\nu) = \mathcal{G}(\nu) \times_1 \mathbf{W}^{(1)}(\nu) \times_2 \mathbf{W}^{(2)}(\nu) \times_3 \mathbf{W}^{(3)}(\nu) \quad (\text{A.10})$$

¹L'utilisation de la 4DSVD sur le tableau spectral pourrait également être envisagée.

Les tailles et les bases propres contenues dans ces matrices propres sont :

$$\begin{cases} \mathbf{W}^{(1)}(\nu) \text{ de taille : } N_c \times N_c \\ \mathbf{W}^{(2)}(\nu) \text{ et } \mathbf{W}^{(3)}(\nu) \text{ de taille : } N_x \times N_x \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

les deux matrices $\mathbf{W}^{(2)}(\nu)$ et $\mathbf{W}^{(3)}(\nu)$ sont les mêmes, à une transposition près, et contiennent les vecteurs propres décrivant, pour chaque fréquence, la fonction de transfert inter-capteurs. Dans la matrice $\mathbf{W}^{(1)}(\nu)$ on a les vecteurs propres, pour chaque fréquence, qui décrivent le comportement de la fonction de transfert entre les composantes des capteurs. Les vecteurs propres contenus dans $\mathbf{W}^{(2)}(\nu)$ et $\mathbf{W}^{(1)}(\nu)$ donnent une base de décomposition de la fonction de transfert de l'antenne, tenant compte des capteurs et de toutes leurs composantes. Une fois cette base obtenue, il convient de définir un sous-espace signal et un sous-espace bruit par projection de l'espace de départ.

A.2.3 Projecteurs et sous-espaces

Comme dans le cas d'antennes de capteurs scalaires, on va projeter le tableau spectral sur une base estimée grâce à la décomposition en éléments propres. On prend le même nombre de vecteurs propres pour chaque canal de fréquence, et on construit le sous-espace signal à l'aide d'une troncature de rang (r_1^s, r_2^s, r_2^s) de $\mathcal{SMF}(\nu)$. Les deux derniers rangs sont les mêmes car les matrices $\mathbf{W}^{(2)}(\nu)$ et $\mathbf{W}^{(3)}(\nu)$ sont identiques et décrivent le comportement inter-capteurs. La partie signal est donnée par :

$$\mathcal{SMF}(\nu)_s = \mathcal{G}_s(\nu) \times_1 \mathbf{W}_s^{(1)}(\nu) \times_2 \mathbf{W}_s^{(2)}(\nu) \times_3 \mathbf{W}_s^{(3)}(\nu) \quad (\text{A.12})$$

Nous ne revenons pas sur la manière d'obtenir les éléments de ce sous-espace qui a été présentée lors de l'étude de l'application de la 3DSVD directement sur les données. La seule différence réside dans le fait qu'ici nous avons un tableau à valeurs complexes à décomposer. Ceci ne modifie en rien les calculs aboutissant au sous-espace signal. Une fois la partie signal estimée, on projette les données sur ce sous-espace composante par composante :

$$\mathbf{Y}_s^i(\nu) = \mathbf{SMF}(\nu)_s^i \mathbf{Y}_i(\nu) \quad (\text{A.13})$$

où chaque matrice $\mathbf{Y}_s^i(\nu)$ est le sous-espace signal pour la composante i , et où $\mathbf{Y}_i(\nu)$ est la Transformée de Fourier suivant la variable t de la tranche du tableau de départ correspondant à la composante i . $\mathbf{SMF}(\nu)_s^i$ est la partie du projecteur défini plus haut correspondant à la même composante i . Il y a donc autant de matrice $\mathbf{Y}_s^i(\nu)$ qu'il y a de composantes, et pour retrouver les ondes contenues dans le sous-espace signal, il faut faire une TF inverse suivant la variable t de toutes ces matrices séparément :

$$\mathcal{Y}_s^i = TF^{-1} [\mathbf{Y}_s^i(\nu)] \quad (\text{A.14})$$

On retrouve ainsi le sous-espace signal. Chaque tranche est donc bien une fonction de x et t :

$$\mathcal{Y}_s^i = \mathcal{Y}_s^{n_c=i} = \mathbf{Y}_i(x, t) \quad (\text{A.15})$$

Le sous-espace bruit peut être estimé séparément sur les i composantes :

$$\mathcal{Y}_b^i = \mathcal{Y}^i - \mathcal{Y}_s^i \quad (\text{A.16})$$

Cette possibilité revient à faire une différence entre deux tableaux, du fait de la propriété de multilinéarité des opérations présentées ici. Nous avons donc vu la façon d'«adapter» la matrice spectrale aux données sismiques vectorielles (ou multicomposantes). Le traitement par tableau multispectral tient simultanément compte de l'information contenue dans toutes les composantes des capteurs pour estimer le sous-espace signal. Cela a pour effet que le tableau spectral fait une analyse de la fonction de transfert complète de l'antenne vectorielle et que les relations inter-composantes peuvent être estimées. Nous présentons à présent quelques simulations susceptibles de mettre en avant les avantages et limitations de la technique du tableau spectral.

Nous ne présentons pas de simulations pour ce traitement, notre but étant de montrer son existence théorique. Les améliorations apportées par la prise en compte de toutes les composantes doivent théoriquement permettre d'accroître la puissance de la matrice spectrale (dans les mêmes proportions que le gain entre SVD et 3DSVD). Le problème majeur de cette méthode reste le coût en temps. Il est déjà élevé pour le cas matriciel et devient très important dans le cas du tableau spectral.

Bibliographie

- [Anderson96] Anderson S. and Nehorai A. Analysis of a polarized seismic wave model. *IEEE transactions on signal processing*, 44(2) :379–386, 1996.
- [Barr97] Barr F.J. Dual-sensor OBC technology. *The Leading Edge*, pages 45–51, 1997.
- [Brekhovskikh80] Brekhovskikh L.M. *Waves in layered media*. Academic Press Inc., New York, 1980.
- [Brillouin60] Brillouin L. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press, New York and London, 1960.
- [Bro98] Bro R. *Multi-way analysis in the food industry. Models, algorithms and applications*. Thèse de doctorat, 1998.
- [Bro99] Bro R., Sidiropoulos G., and Giannakis G. A fast least squares algorithm for separating trilinear mixtures. In *Workshop on Independent Component Analysis (ICA)*, 1999.
- [Bronson94] Bronson R. *Calcul matriciel*. Série Schaum. McGraw-Hill, 1994.
- [Bülow99] Bülow T. *Hypercomplex spectral signal representations for the processing and analysis of images*. Phd thesis, Christian Albrechts Universität, KIEL, 1999.
- [Cardoso93] Cardoso J.-F. and Souloumiac A. Blind beamforming for non gaussian signals. *IEE Proc.-F*, 140(6) :362–370, 1993.
- [Cohen73] Cohen-Tannoudji C., Diu B., and Laloë F. *Mécanique Quantique, Tome I, complément A_{IV}*. Collection enseignement des sciences. Hermann, 1973.
- [Comon94a] Comon P. Independent component analysis, a new concept ? *Signal Processing*, 36 :287–314, 1994.
- [Comon94b] Comon P. Tensor diagonalization, a usefull tool in signal processing. In *IFAC-SYSID, 10th IFAC Symp. Sys. Ident.* M. Blanke, T. Soderstorm Eds., Copenhagen, Denmark, July, 1994, vol. 1, pp. 77-82, 1994.
- [Comon00] Comon P. Tensors decompositions. State of the art and applications. In *IMA conf. mathematics in signal processing*. Warwick, UK, Dec. 18-20, 2000.

- [Compton81] Compton R.T. JR. The tripole antenna : an adaptative array with full polarization flexibility. *IEEE transactions on antennas and propagation*, AP-29(6) :944–952, 1981.
- [Coppens01] Coppens F., Glangeaud F., and Mari J.L. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*. Vol. 2 : Techniques de base. Technip Ed., 2001.
- [Cordsen00] Cordsen A., Galbraith M., and Peirce J. *Planning land 3D seismic surveys*. Geophysical development, SEG Eds., 2000.
- [Costa99] Costa C. and Serôdio R. A footnote on quaternion block-tridiagonal systems. *Electronic transactions on numerical analysis*, 9 :53–55, 1999.
- [Deans83] Deans S.R. $\tau - p$, *the Radon transform and some of its applications*. John Wiley, 1983.
- [DeLathauwer93] De Lathauwer L., De Moor B., and Vandewalle J. A singular value decomposition for higher-order tensors. In *Proc. ProRISC IEEE Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing*. Houthalen, Belgium, March 24-25, 1993.
- [DeLathauwer97] De Lathauwer L. *Signal Processing based on multilinear algebra*. Phd thesis, Université Catholique de Leuven, 1997.
- [Deprettere88] Deprettere E.F. *SVD and signal processing. Algorithms, applications and architecture*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [Dietrich88] Dietrich M. Modeling of marine seismic profiles in the $t - x$ and $\tau - p$ domains. *Geophysics*, 53(4) :453–465, 1988.
- [Donias99] Donias M. *Caractérisation de champs d'orientation par analyse en composantes principales et estimation de la courbure. Application aux images sismiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1999.
- [Ell92] Ell T.A. *Hypercomplex spectral transformation*. PhD thesis, University of Minnesota, 1992.
- [Esmersoy90] Esmersoy C. Inversion of P and SV waves from multicomponent offset vertical seismic profiles. *Geophysics*, 55 :39–50, 1990.
- [Essebar97] Essebar A. Séparation des ondes sismiques multicomposantes. *Traitement du signal*, 14(1) :83–95, 1997.
- [Ewing57] Ewing W.M., Jaldetsky W.S., and Press F. *Elastic waves in layered media*. McGraw Hill, New York Eds., 1957.
- [Felsberg98] Felsberg M. Signal processing using frequency domain methods in clifford algebra. Master's thesis, University of Kiel, 1998.
- [Flandrin93] Flandrin P. *Temps Fréquence*. Hermès, Paris, 1993.
- [Fookes95] Fookes G. Kharunen-Loeve and spectral matrix filtering in attenuating high amplitude peg-leg multiples. In *57th Meeting of EAGE*. Session P004, 1995.

-
- [Freire88] Freire S.L.M. and Ulrych T.J. Application of SVD to vertical seismic profiling. *Geophysics*, 53 :778–785, 1988.
- [Gaeta91] Gaeta M. *Les statistiques d'ordre supérieur appliquées à la séparation de sources*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.
- [Gaiser98] Gaiser J.E. Compensating OBC data for variations in geophone coupling. In *68th Meeting of Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstract*, 1998.
- [Gavin89] Gavin P. *Séparation d'onde en sismique à partir d'un modèle a priori et de l'estimation de l'espace signal*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1989.
- [Gilpatrick89] Gilpatrick R. and Fouquet D. A user's guide to conventional VSP acquisition. *The Leading Edge*, 8(3) :34–39, 1989.
- [Glangeaud89] Glangeaud F., Mari J.-L., and Lacoume J.-L. Éstimation de la matrice spectrale de signaux certains : application à la séparation d'ondes en sismique. In *Douzième colloque du GRETSI*. Juan-les-pins, 1989.
- [Glangeaud94] Glangeaud F. and Mari J.-L. *Wave separation*. Technip IFP, 1994.
- [Glangeaud97] Glangeaud F., Mari J.L., and Coppens F. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*. Technip, 1997.
- [Glangeaud99] Glangeaud F., Mari J.L., Lacoume J.L., Mars J., and Nardin M. Dispersive seismic wave tools in geophysics. *European Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, 3 :265–306, 1999.
- [Glangeaud01] Glangeaud F., Mari J.L., and Meunier J. 4C-sensor orientation using multicomponent-SVD method applied on shallow water. In *Proceedings of the 63rd conference of the EAGE*. Amsterdam, Expanded Abstract, N-26, 2001.
- [Golub89] Golub G.H. and Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1989.
- [Goncalves99] Goncalves D. *Traitement d'antenne et matrice spectrale large bande*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
- [Gounon98] Gounon P., Mars J., and Goncalves D. Wideband spectral matrix filtering. In *68th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*. New-Orleans, USA, Expanded Abstract, pp. 1150-1153, 1998.
- [Hamilton43] Hamilton W.R. Elements of quaternions. 1843.
- [Hardage85] Hardage B.A. Vertical seismic profiling. *Pergamon Press, Inc.*, 1985.
- [Hardage92] Hardage B.A. Crosswell seismology and reverse VSP. *Geophysical Press.*, 1992.

- [Hashimoto00] Hashimoto M. Bicomplex waves in electromagnetic scattering and diffraction problems. *IEICE Trans. Electron.*, E83-C(2) :236–246, 2000.
- [Håstad90] Håstad J. Tensor rank is NP-complete. *Journal of algorithms*, 11 :644–654, 1990.
- [Hatton86] Hatton L., Worthington M.H., and Makin J. *Seismic data processing*. Blackwell Ed., 1986.
- [Hemon78] Hemon C.H. and Mace D. The use of Karhunen-Loeve transform in seismic data processing. *Geophysical Prospecting*, 26 :600–626, 1978.
- [Hsu90] Hsu K. Wave separation and feature extraction of acoustic well-logging waveforms using Karhunen-Loeve transformation. *Geophysics*, 55 :176–184, 1990.
- [Jackson91] Jackson G.M., Mason I.M., and Greenhalgh S.A. Principal component transforms of triaxial recordings by singular value decomposition. *Geophysics*, 56(4) :528–533, 1991.
- [Kantor89] Kantor I.L. and Solodovnikov A.S. *Hypercomplex numbers, an elementary introduction to algebras*. Springer-Verlag, 1989.
- [Kroonenberg83] Kroonenberg P.M. *Three-mode principal component analysis*. DSWO Press, 1983.
- [Lacoume92] Lacoume J.-L. and Ruiz P. Separation of independent sources from correlated input. *IEEE Trans. Signal processing*, 40(12) :3074–3078, 1992.
- [Lacoume98] Lacoume J.-L., Glangeaud F., and Mars J. Blind separation of polarised waves. In *Proceedings of the EUSIPCO, Signal processing IX*, Theory and Application, Rhodes, pp. 1629-1632, 1998.
- [Lacoume00] Lacoume J.-L., Glangeaud F., and Mars J. Wave separation. In *First Online Symposium for Electronics Engineer*. OSEE, MIT, 2000.
- [Lariani01] Lariani S. *Perception et interprétation de sections et blocs sismiques. Oculométrie et analyse d'images*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.
- [Lavergne86] Lavergne M. *Méthodes sismiques*. Editions Technip, 1986.
- [Lebihan98] Le Bihan N., Lacoume J.-L., Glangeaud F., and Gaffet S. Traitement des ondes sismo-acoustiques UBF multicomposantes. 4èmes journées d'acoustique sous marine, SEE, Brest, 1998.
- [Lebihan99] Le Bihan N. and Lacoume J.-L. Complex seismic signal and blind wave separation. In *Proceedings of the 61st conference of the EAGE*. Helsinki, Expanded Abstract, 6-22, 1999.
- [Lebihan00a] Le Bihan N. and Mars J. Blind wave separation using vector-sensors. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*. Istanbul, 2000.

- [Lebihan00b] Le Bihan N. and Mars J. Technique d’algèbre multilinéaire pour le traitement sismique multicomposantes. In *5^{ème} journées d’acoustique, N° 26*, Brest, 2000.
- [Lebihan00c] Le Bihan N., Mars J., and Pedersen H. Surface wavefield separation on multicomponent sensors. In *Proceedings of the 62nd conference of the EAGE*. Glasgow, Expanded Abstract, L-03, 2000.
- [Lebihan01a] Le Bihan N. and Ginolhac G. Subspace methods for 3D arrays. In *Physics in Image and Signal Processing (PSIP)*. SEE, pp. 359-364, 2001.
- [Lebihan01b] Le Bihan N. and Mars J. Wavefield separation on OBS dataset. *Geophysics*, En révision, 2001.
- [Lebihan01c] Le Bihan N. and Mars J. New 2D complex and hypercomplex seismic attributes. In *Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG)*. San Antonio, Sept. 2001.
- [Lebihan01d] Le Bihan N., Lacoume J.L., and Mars J. Séparation d’ondes sur un réseau de capteurs multidimensionnel. In *Proceedings of the GRETSI*. Toulouse, Sept. 2001.
- [Lebihan01e] Le Bihan N., Lariani S., and Mars J. Seismic cube decomposition before reservoir characterisation. In *International Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG)*. San Antonio, 2001.
- [Lee49] Lee H.C. Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternions coefficients. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 52A(2) :253–260, 1949.
- [Liu99] Liu X. Ground roll suppression using the Karhunen-Loeve transform. *Geophysics*, 64(2) :564–566, 1999.
- [Mackey95] Mackey N. Hamilton and Jacobi meet again : quaternions and the eigenvalue problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and its applications*, 16 :421–435, 1995.
- [Mari89] Mari J.L. and Coppens F. *La sismique de puits*. Technip, 1989.
- [Mari98] Mari J.L. and Coppens F. *Géophysique pour les gisements et le génie civil*. Technip, 1998.
- [Mari00] Mari J.-L., Meunier J., Glangeaud F., and Vanpé J.M. Les ondes guidées en acoustique sous-marine, application à la sismique pétrolière, la propagation UBF et au génie civil. 5^{èmes} journées d’acoustique sous marine, Brest, 30 Nov.-1 Déc., N° 22, 2000.
- [Mars87] Mars J., Glangeaud F., Lacoume J.L., Fourmann J.M., and Spitz S. Separation of seismic waves. In *56th Meeting of Society of Exploration Geophysicists*. New-Orleans, USA, Expanded Abstract, pp. 489-492, 1987.

- [Mars88] Mars J. *Séparation d'ondes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- [Mars92] Mars J. and Pedersen H. Separation of dispersive waves and phase velocities enhancement. In *62th Meeting of Society of Exploration Geophysicists*. New-Orleans, USA, Expanded Abstract, pp. 1223-1226, 1992.
- [Mars95] Mars J. and Rector J.W. III. Constrained eigenvectors : a means to separate aliased arrivals. In *65th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*. Houston, USA, Expanded Abstract, pp. 49-52, 1995.
- [Mars96] Mars J., Thirion N., and Boelle J.L. Wavefield separation based on a blind algorithm. In *66th meeting of Society of Exploration Geophysicists, Expanded Abstract, pp. 1547-1550*. Denver, 1996.
- [Mars99] Mars J., Rector J.W., and Lazaratos S. Filter formulation and wavefield separation of crosswell seismic data. *Geophysical Prospecting*, 47 :611–636, 1999.
- [Mars01] Mars J. *Cours de sismique*. ENSIEG, 3^{ème} année, Option SNT, 2001.
- [McCabe00] McCabe A., Caelli T., West G., and Reeves A. Theory of spatiochromatic image encoding and feature extraction. *Journal of Optical Society of America*, 17(10) :1744–1754, 2000.
- [Mermoz69] Mermoz H. Élimination des brouilleurs par traitement optimal d'antenne. *Annales des Télécommunications*, Tome 24(7-8) :282–293, 1969.
- [Moonen95] Moonen M. and De Moor B. *SVD and signal processing III. Algorithms, applications and architecture*. Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [Nardin98] Nardin M. *Ondes sismo-acoustiques guidées en milieu marin*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.
- [Nehorai94a] Nehorai A. and Paldi E. Acoustic vector-sensor array processing. *IEEE transactions on signal processing*, 42(9) :2481–2491, 1994.
- [Nehorai94b] Nehorai A. and Paldi E. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization. *IEEE transactions on signal processing*, 42(2) :376–398, 1994.
- [Nguyen99a] Nguyen M.Q. and Mars J.I. Filtering surface waves using a 2D discrete wavelet transform. In *69th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*. Houston, USA, Expanded Abstract, 1999.
- [Nguyen99b] Nguyen M.Q. and Mars J.I. Mixed surfaces waves elimination. In *Proceedings of the 61st conference of the EAGE*. Helsinki, Expanded Abstract, 6-21, 1999.
- [Nguyen00] Nguyen M.-Q. *Analyse multi-dimensionnelle et analyse par les ondelettes des signaux sismiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.

- [Officer58] Officer C.B. *Introduction to the theory of sound transmission*. McGraw-Hill book company, New York, 1958.
- [Samson83] Samson J.C. The spectral matrix eigenvalues and principal components in the analysis of multichannel geophysical data. *Annales Geophysicae*, 1(2) :115–119, 1983.
- [Sangwine97] Sangwine S.J. The discrete quaternion Fourier transform. In *Proc. of 6th Int. Conf. on Image processing and its application*. Trinity College, Dublin, Eire, pp. 790-793, 1997.
- [Sangwine98] Sangwine S.J. and Ell T.A. The discrete Fourier transform of a colour image. In *Proceedings of the second IMA conference on image processing*. De Montfort University, Leicester, UK, pp. 430-441, 1998.
- [Sangwine99] Sangwine S.J. and Ell T.A. Hypercomplex auto- and cross-correlation of color images. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'99)*. pp. 319-322, Kobe, Japan, 1999.
- [Sangwine00] Ell T.A. and Sangwine S.J. Decomposition of 2D hypercomplex Fourier transforms into pairs of complex Fourier transforms. In *Gabbouj, M. and Kuosmanen (eds), 'Signal Processing X, Theories and Applications', Proceedings of EUSIPCO*. Tampere, Finland, pp. 1061-1064, 2000.
- [Scharf91] Scharf L.L. *Statistical Signal Processing, Détection, Estimation and Time Series Analysis*. Electrical and computer engineering : digital signal processing. Addison Wesley, 1991.
- [Schütte90] Schütte H.D. and Wenzel J. Hypercomplex numbers in digital signal processing. In *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. pp. 1557-1560, 1990.
- [Sheriff82] Sheriff R.E. and Geldart L.P. *Exploration seismology*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1982.
- [Sheriff91] Sheriff R.E. *Encyclopedic dictionary of exploration geophysics*. SEG, 1991.
- [Sheriff97] Sheriff R.E. *Reservoir geophysics 3rd Eds*. SEG, 1997.
- [So99a] So W. Computation in quaternionic eigenvalue problem. In *Xiangtan Polytechnic University*. May 24-June 17, 1999.
- [So99b] So W. Existence of quaternionic eigenvalues. In *Xiangtan Polytechnic University*. May 24-June 17, 1999.
- [So99c] So W. Quaternions : origin, properties, applications and generalization. In *Xiangtan Polytechnic University*. May 24-June 17, 1999.
- [Tas84] Tas I. *Caractérisation de sources rayonnantes en traitement d'antenne*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984.

- [Teakle95] Teakle G., Cao S., and Greenhalgh S. Tube wave suppression in high frequency mine seismic data by singular value decomposition. In *11th Geophysical Conference, Austr. Soc. Expl. Geophys.* 26, pp. 512-517, 1995.
- [Thirion95a] Thirion N. *Séparation d'ondes en prospection sismique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.
- [Thirion95b] Thirion N. and Mars J. Séparation aveugle de signaux large-bande : un nouveau challenge en prospection sismique. In *GRETSI*. Juan-les-Pins, pp. 1335-1338, 1995.
- [Thirion96a] Thirion N., Mars J., and Boelle J.L. Separation of seismic signals : a new concept based on a blind algorithm. In *EUSIPCO, Signal processing VII, Theories and application*. Trieste, pp. 85-88, 1996.
- [Thirion96b] Thirion N., Mars J., and Lacoume J.L. Analytical links between steering vectors and eigenvectors. In *EUSIPCO, Signal processing VII, Theories and application*. Trieste, pp. 81-84, 1996.
- [Thornton95] Thornton A.L. and Sangwine S.J. Colour object location using complex coding in the frequency domain. In *Proc. of the 5th International Conference on Image Processing and its Applications*. Heriot-Watt University, Edinburgh, UK, pp. 820-824, 1995.
- [Toyoshima98] Toyoshima H. Computationally efficient bicomplex multipliers for digital signal processing. In *Proc. IEICE Trans. Inf. and Syst., Vol. E81-D, No 2*. February, 1998.
- [Trehu94] Trehu A. M. and Sutton G.H. A note on the seafloor coupling characteristics on the new ONR ocean bottom seismometer. *Mar. Geophys. Res.*, 16 :91-103, 1994.
- [Tucker64] Tucker L.R. *The extension of Factor Analysis to Three-dimensional Matrices*, chapter Contributions to mathematical psychology. H. Gulliksen, N. Frederiksen (Eds.). Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [Tucker66] Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*, No 31 :279-311, 1966.
- [Vaccaro91] Vaccaro R. *SVD and signal processing II. Algorithms, applications and architecture*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [Vakhania99] Vakhania N.N. Random vectors with values in quaternion Hilbert spaces. *Theory probab. appl.*, 43(1) :99-115, 1999.
- [Vidale86] Vidale J.E. Complex polarization analysis of particle motion. *Bulletin of the seismology society of America*, 76(5) :1393-1405, 1986.
- [Waters78] Waters K.H. *Reflexion seismology*. Wiley intersciences Pub. Ed., 1978.
- [Wolf36] Wolf L.A. Similarity of matrices in which the elements are real quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 :737-743, 1936.

- [Yilmaz87] Yilmaz O. *Seismic signal processing*. SEG Eds., 1987.
- [Yilmaz01] Yilmaz O. *Seismic data analysis : processing, inversion and interpretation*. SEG Eds., 2001.
- [Zarzos00] Zarzoso V. and Nandi A.K. Unified formulation of closed-form estimators for blind source separation in complex instantaneous linear mixture. In *Gabbouj, M. and Kuosmanen (eds), 'Signal Processing X, Theories and Applications', Proceedings of EUSIPCO*. Tampere, Finland., 2000.
- [Zhang97] Zhang F. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear algebra and its applications*, 251 :21-57, 1997.
- [Zhu99] Zhu X. Recent advances in multicomponent processing. *The Leading Edge*, pp. 1283-1288, 1999.

Résumé

Le travail de recherche présenté dans cette thèse est dédié à l'élaboration de traitements pour les signaux vectoriels, recueillis sur des capteurs sismiques multicomposantes. Ce type de capteurs permet aux géophysiciens de mesurer les déplacements du sous-sol dans les trois directions de l'espace. Les enregistrements multicomposantes donnent alors accès à la polarisation des ondes. Nous montrons comment l'incorporation de l'information de polarisation permet d'améliorer les performances d'un traitement de séparation d'ondes utilisés sur les enregistrements sismiques 2D : la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD).

L'utilisation de capteurs multicomposantes produit des enregistrements de type tableaux 3D, du fait de la dimension *polarisation* qu'ils introduisent en plus des dimensions *temps* et *distance*. Nous présentons la 3DSVD, extension de la décomposition en valeurs singulières pour les tableaux tridimensionnels. À l'aide de cet outil d'algèbre multilinéaire, nous proposons une version de la technique de séparation d'ondes par sous-espaces pour les enregistrements multicomposantes. L'intérêt de la 3DSVD est démontré sur simulations ainsi que sur données réelles provenant de différentes campagnes sismiques.

Nous proposons également une nouvelle approche pour les signaux vectoriels fondée sur l'utilisation des quaternions. Le codage de chaque échantillon temporel d'un signal vectoriel (ou multicomposante) par un quaternion permet de rendre compte de ses propriétés de polarisation. Ainsi, nous reformulons le problème de séparation d'ondes par sous-espaces pour les signaux quaternioniques et introduisons la décomposition en valeurs singulières pour les matrices dont les éléments sont des quaternions (SVDQ). Nous montrons sur des simulations comment la méthode de séparation d'ondes par sous-espaces pour les signaux quaternioniques permet de décrire parfaitement le comportement des ondes polarisées sur un réseau de capteurs vectoriels.

Abstract

In this research work, we present new tools for vector signal processing collected on multicomponent seismic sensors. This kind of sensors are used by geophysicists to record the motion of earth in the three directions of space. Using these recording configuration, we can estimate the waves polarisation. We present how we can improve the seismic wave separation step performed by SVD (Singular Value Decomposition) when incorporating the polarisation information.

When multicomponent sensors are used in acquisition, a polarisation dimension occurs in the dataset, in addition to *time* and *distance* dimensions. The dataset is then a 3D array. We introduce the 3DSVD, extension of the SVD to 3D array. Using this multilinear algebra tool, we propose a subspace based wave separation technique for multicomponent dataset. We then show on simulations and real data the way this new technique can improve wave separation results.

We also propose a new approach for vector signals processing based on quaternion algebra. Waves polarisation is taken into account when coding each time sample of a vector signal by a quaternion. So, we give a new formulation of the subspace method for wave separation of quaternionic signals. In order to do so, we introduce the Quaternionic Singular Value Decomposition (QSVD). We finally show on simulations the efficiency of the subspace method and the way it allows to characterise polarized waves on vector-sensors array.

Mots-Clés : Capteurs multicomposantes, signaux vectoriels, algèbre linéaire et multilinéaire, décomposition en valeurs singulières de matrices et tableaux 3D, séparation d'ondes, méthode par sous-espaces, quaternions.
