

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc  
pour obtenir le grade de Docteur de Spécialité Mathématiques Appliquées (3ème cycle)

STRUCTURATION DES TABLEAUX

S.T.A.T.I.S.

A TROIS INDICES DE LA STATISTIQUE :

THÉORIE ET APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ANALYSE CONJOINTE

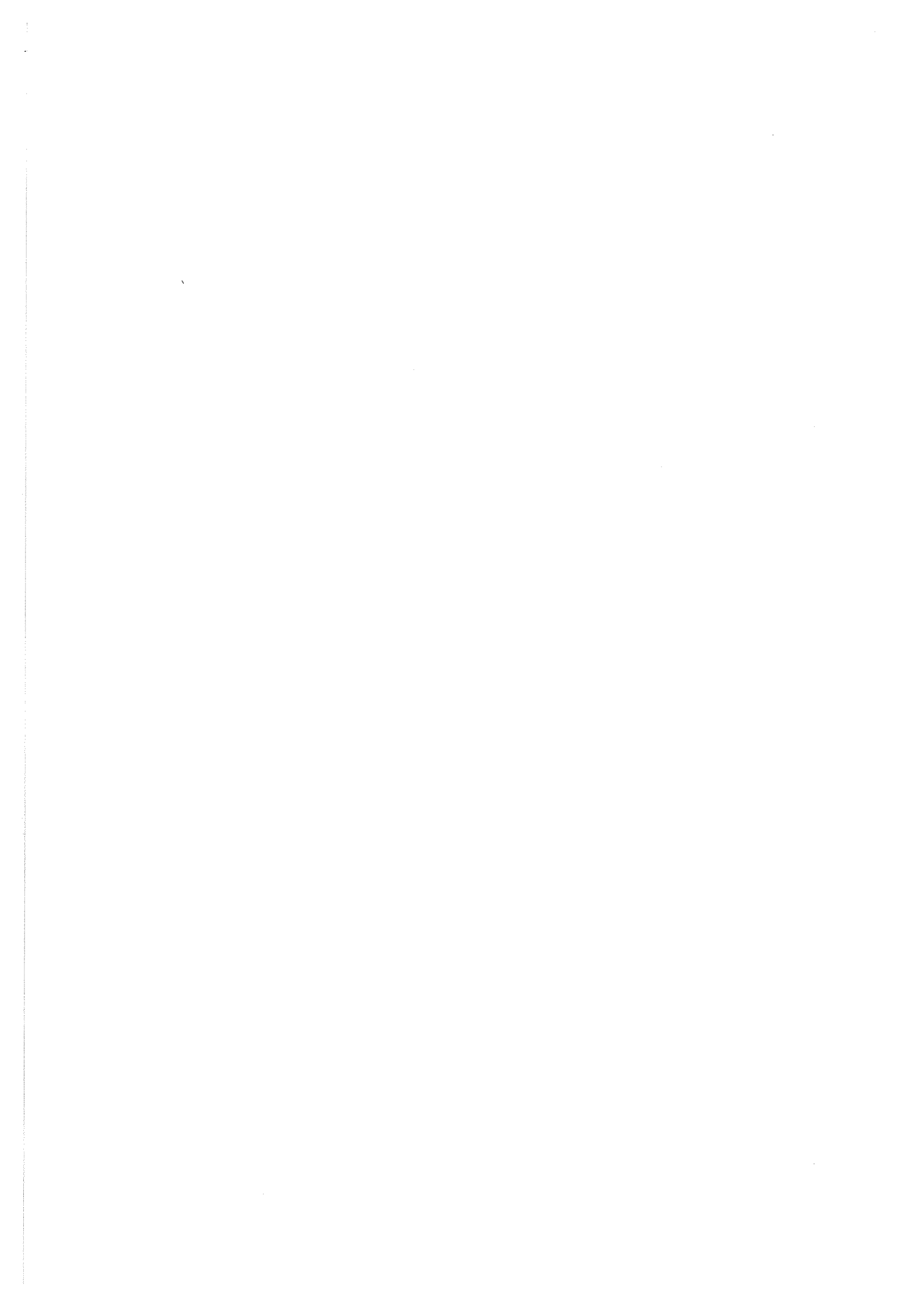
par

Henri L'HERMIER DES PLANTES

*Maître en Méthodes Informatiques Appliquées à la Gestion*

Soutenu le 24 Juin 1976 devant la Commission d'Examen.

JURY :	MM.	Y. ESCOUFIER	Président
		B. CHARLES	} Assesseurs
		N. ROBY	
		G. ROMIER	
		J.M. BOUROCHE	Membre invité



L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

Président : J. ROUZAUD

Vice-Présidents : B. CHARLES - G. SAUMADE

Doyens Honoraires à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

P. MATHIAS

B. CHARLES

A. CASADEVALL

Président Honoraire : P. DUMONTET

Professeurs Honoraires de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc :

R. JACQUES

G. DENIZOT

P. CHATELAIN

M. CASTERAS

J. GRANIER

A.M. VERGNOUX

E. CARRIERE

Ch. BOUHET

E. KAHANE

E. TURRIERE

J. SALVINIEN

P. VIELES

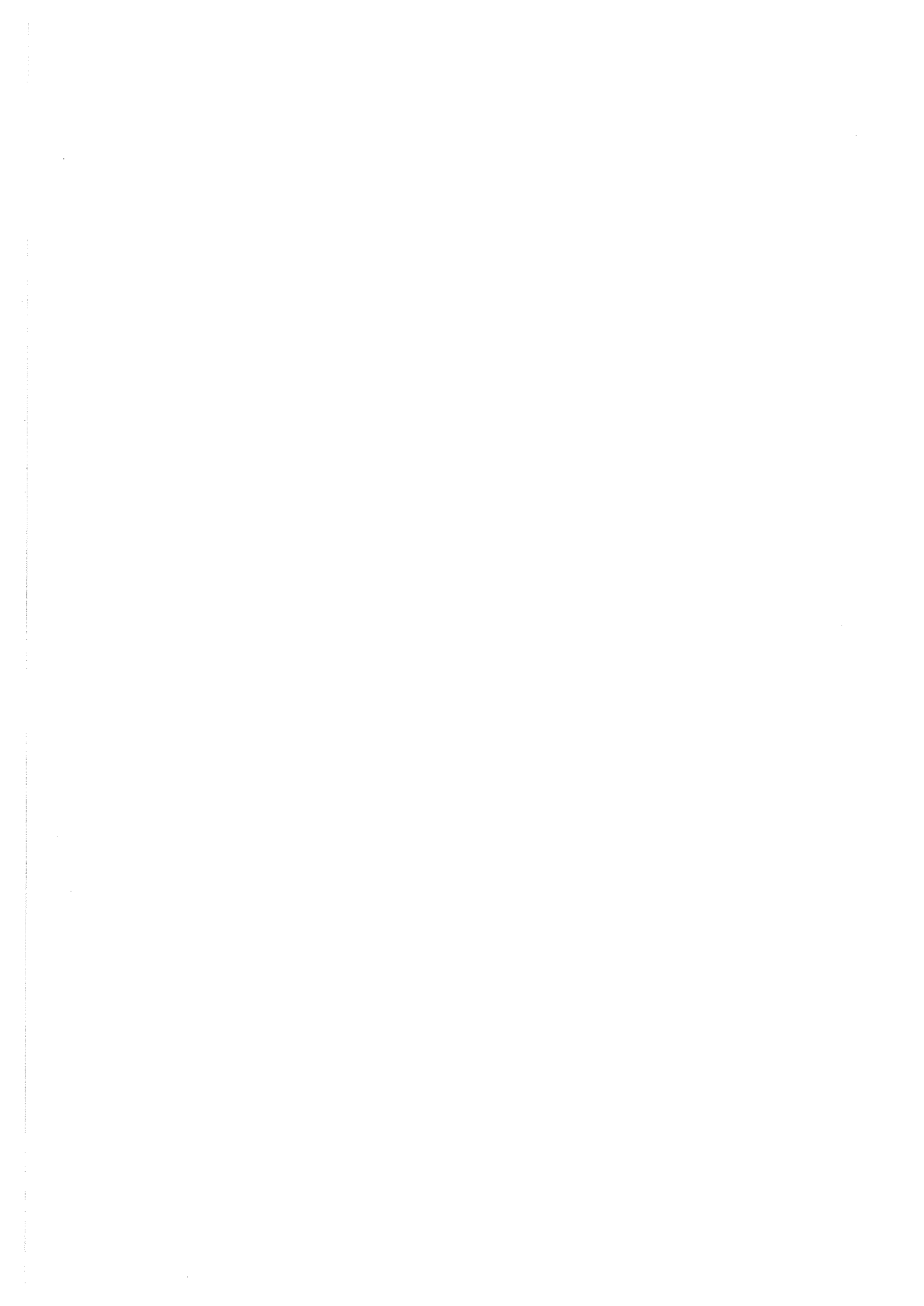
C. CAUQUIL

M. MOUSSERON

Secrétaire Général : E. SIAU

Professeurs titulaires :

- M. J.P. ROIG ..... Physique
- M. G. COUCHET ..... Mécanique supérieure
- M. J. AVIAS ..... Géologie
- M. R. MAURY (I.P.A.) ..... Droit
- M. J.J. MOREAU ..... Mécanique rationnelle
- M. B. CHARLES ..... Mathématiques pures
- M. R. JOUTY ..... Physique
- M. R. LEGENDRE ..... Zoologie
- M. I. ASSENMACHER ..... Physiologie animale
- M. B. PISTOULET ..... Physique
- M. Ch. ROUMIEU ..... Analyse supérieure
- M. J. ROBIN ..... Physique
- M. A. POTIER ..... Chimie minérale



- M. R. LAFONT .....	Physique
- M. R. JACQUIER .....	Chimie
- M. J. FALGUEIRETTES .....	Minéralogie
- M. J. REGNIER .....	Chimie
- Mme J. CHARLES .....	Mathématiques
- M. P. CAILLON .....	Physique
- M. J. ROUZAUD .....	Chimie
- M. Ch. SAUVAGE .....	Botanique
- M. H. CHRISTOL (E.N.S.C.M.) .....	Chimie
- Mme G. VERNET .....	Biologie animale
- M. L. CECCHI .....	Physique
- M. H. ANDRILLAT .....	Astronomie
- M. M. SAVELLI .....	Physique
- M. M. MATTAUER .....	Géologie
- M. L. EUZET .....	Zoologie
- M. C. DELOUPY .....	Physique
- M. L. GRAMBAST .....	Botanique
- M. A. BONNET .....	Botanique
- M. G. LAMATY .....	Chimie
- M. R. MARTY .....	Psychophysiologie
- Mme S. ROBIN .....	Physique
- M. R. CORRIU (I.U.T.) .....	Chimie
- Mme N. PARIS .....	Physiologie végétale
- M. J. ZARZYCKI .....	Sciences des matériaux
- M. S. GROMB .....	Chimie physique
- M. F. SCHUE .....	Chimie organique
- M. M. MAURIN .....	Chimie minérale
- M. P. SABATIER .....	Mathématiques
- M. L. THALER .....	Paléontologie
- M. E. GROUBERT .....	Physique
- M. M. ROUZEYRE .....	Physique
- M. Ch. CASTAING .....	Mathématiques
- M. F. PROUST .....	Géologie
- M. J.M. MORETTI .....	Biochimie
- M. J. PARIS .....	Biologie animale
- M. A. GROTHENDIECK .....	Mathématiques
- M. C. DURANTE .....	Physique
- M. G. BOUGNOT .....	Physique
- M. G. LECOY .....	E. E. A.
- M. R. GAUFRES .....	Chimie
- M. J.V. ZANCHETTA .....	Chimie



Professeurs sans chaire :

- M. G. TOURNE ..... Chimie
- M. J. REMY ..... Géologie
- M. P. DEMANGEON ..... Géologie
- Mme H. GUASTALLA ..... Biologie physico-chimique
- M. R. LENEL ..... Biologie animale
- M. A. BASSOMPIERRE ..... Physique
- M. N. ROBY ..... Mathématiques
- M. P. MOLINO ..... Mathématiques
- M. J. LEGRAND ..... Physiologie animale
- M. R. JONARD ..... Botanique
- M. R. CANO (I.U.T.) ..... Mesures physiques
- M. J.P. FILLARD (I.U.T. NIMES) ..... Génie électrique
- M. J.L. IMBACH ..... Chimie
- M. J. D'AUZAC ..... Physiologie végétale
- M. G. BOUIX ..... Zoologie
- M. L. GIRAL ..... Chimie organique
- M. M. AMANIEU (Sciences et Techniques) ..... Hydrologie et mariculture
- M. M. DENIZOT ..... Biologie végétale
- M. B. BRUN ..... Chimie physique
- M. J.D. BAYLE ..... Physiologie animale
- M. J.P. QUIGNARD ..... Biologie animale
- M. Ph. VIALLEFONT ..... Chimie
- M. J. GARCIA (I.U.T. NIMES) ..... Génie mécanique
- M. P. LOUIS ..... Géophysique appliquée
- M. M. LEFRANC ..... Mathématiques
- M. G. MASCHERPA ..... Chimie
- M. C. GOUT ..... Physique
- M. J.P. TRILLES ..... Biologie appliquée
- M. F. HALLE ..... Biologie végétale
- M. G. BORDURE ..... Génie électrique
- M. A. DONNADIEU ..... Physique
- M. Cl. BOCQUILLON ..... Hydrologie
- M. A. RAIBAUT ..... Biologie animale
- M. J.P. NOUGIER ..... Electronique





Professeurs associés :

- M. E. AKUTOWICZ ..... Mathématiques
- M. A. MICALI ..... Mathématiques
- M. C. VAGO ..... Biologie animale
- M. L. DAUZIER ..... Physiologie animale
- M. F. WINTERNITZ ..... Chimie organique
- M. R. SENDUILLET ..... Economie et gestion
- M. C. MAURIN ..... Biologie animale
- Mme M. VAN CAMPO ..... Biologie végétale
- M. P. GALZY ..... Biochimie
- M. E. VERDIER ..... Chimie générale
- M. E. SERVAT ..... Géologie
- M. K. RUSTAGI ..... Physique

Maîtres de conférences :

- M. G. LOUPIAS ..... Mathématiques
- M. R. HAKIM ..... Mathématiques
- M. F. LAPSCHER ..... Mathématiques
- M. L. LASSABATERE (I.U.T.) ..... Mesures physiques
- M. Y. PIETRASANTA (E.N.S.C.M.) ..... Chimie appliquée
- M. J. CROUZET (Sciences et techniques) ..... Biochimie appliquée
- M. A. COMMEYRAS ..... Chimie organique
- M. P. MATHIEU ..... E. E. A.
- M. J.L. ROBERT (I.U.T. NIMES) ..... Génie électrique
- Mlle M. LEVY (I.U.T.) ..... Chimie
- M. J. LAGARRIGUE (I.U.T.) ..... Biologie appliquée
- M. Cl. DROGUE (Sciences et techniques) ..... Hydrogéologie
- M. P. GENESTE (E.N.S.C.M.) ..... Chimie physique appliquée
- M. J. CHEFTEL (Sciences et techniques) ..... Biochimie appliquée à l'alimentation
- M. M. AVEROUS (I.U.T. NIMES) ..... Génie électrique
- M. B. LEMAIRE (Sciences et techniques) ..... Mathématiques appliquées  
Informatique
- M. M. VALADIER ..... Mathématiques
- M. D. MAISONNEUVE (I.U.T.) ..... Informatique
- M. J.P. BARD ..... Géologie
- M. A. SANS ..... Psychophysiologie
- M. Y. ESCOUFIER ..... Informatique
- M. L. COT (E.N.S.C.M.) ..... Chimie
- M. R. BRUNEL ..... Physique



- M. C. BENOIT ..... Physique
- M. P. DELORD ..... Physique
- M. P. JOUANNA (I.U.T. NIMES) ..... Génie civil
- M. M. GODRON ..... Ecologie végétale
- M. R. BEN AIM ..... Génie chimique et traitement des eaux
- M. P. BESANCON ..... Physiologie de la nutrition appliquée à l'alimentation
- M. J. PETRISSANS ..... Chimie
- M. J.Y. GAL ..... Chimie analytique appliquée
- M. Ph. JEANTEUR ..... Biochimie
- M. H. GIBERT (Sciences et techniques)..... Génie alimentaire
- M. A. LIEGEOIS ..... Automatique
- M. B. TARODO DE LA FUENTE ..... Biochimie appliquée et techniques des matières alimentaires
- M. A. PAVIA ..... Chimie

**- M. Y. Nouaze**

**Math**

Maîtres de conférences associés :

- M. I. FREIBERGS ..... Informatique

Chargés d'enseignement :

- M. B. FILLIATRE ..... Informatique
- M. J. FERRIE ..... Informatique
- M. P. HINZELIN ..... Génie civil

Chargé des fonctions de maître de conférences :

- M. G. SAUMADE (I.U.T.) ..... G.E.A. (Economie des entreprises)

Chargés de cours :

- M. J. GUIN (I.P.A.)
- M. M. MOUTON (I.U.T.)



Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Yves ESCOUFIER de m'avoir guidé tout au long de ce travail et d'avoir accepté la présidence du Jury.

Je remercie les membres de ce Jury, Messieurs les Professeurs G. ROMIER, N. ROBY et B. CHARLES ainsi que l'Ingénieur J.M. BOUROCHE.

L'ambiance studieuse du Centre de Recherche en Informatique et Gestion et l'association des talents respectifs des personnes attachées à cette équipe, ont contribué au succès de cette entreprise.

Merci à chacun et en particulier à Madame BESSIERES à qui nous devons l'agrément de la présentation.



## TABLE DES MATIERES

---

### I - AVANT PROPOS

I.1	Introduction	.....	1
I.2	Terminologie	.....	3
I.3	Notations	.....	8

### 2 - PROPOSITIONS

2.1	Schéma de dualité	.....	9
2.2	Référentiels	.....	14
2.3	Structures	.....	17
2.4	Comparaison des structures	.....	39
2.5	Analyse des différences	.....	42
2.6	Analyse de l'évolution	.....	49
2.7	Extensions de la méthode	.....	50

### 3 - COMPARAISONS

3.1	Méthode de L.R. TUCKER (1972)	.....	53
3.2	Méthode de J.D. CARROLL & J.J. CHANG (1972)	.....	58
3.3	D.A.C.P. de J.M. BOUROCHE (1975) Double PCA	.....	64

### 4 - APPLICATIONS

4.1	Comparaison des résultats de classifications	.....	69
4.2	Analyse de relations d'ordre	.....	80
4.3	Analyse de données chronologiques	.....	84





<u>5 - CONCLUSION</u>	.....	89
<u>6 - ANNEXES</u>		
6.1 Rappel de théorèmes	.....	91
<u>7 - BIBLIOGRAPHIE</u>	.....	96

-0-0-0-0-0-



## I - AVANT - PROPOS

---

### I.1 INTRODUCTION

=====

#### I.1.1. BUT POURSUIVI

Cette thèse propose une méthode d'analyse conjointe de plusieurs tableaux de données.

Le chapitre des propositions comprend les développements théoriques qui assurent les bases mathématiques de la méthode.

Un chapitre est ensuite consacré à la comparaison de la méthode avec d'autres.

Enfin des applications seront commentées afin de permettre aux lecteurs de juger de l'efficacité des résultats.

#### I.1.2. PRINCIPES GENERAUX

Deux tableaux de données, portant sur les mêmes individus, sont déclarés proches lorsque les distances que ces tableaux définissent entre les individus sont voisines. La proximité entre deux tableaux est quantifiée grâce à la notion d'opérateur associé à un tableau de données.

Une méthode de positionnement métrique permet de visualiser, d'une part la proximité entre les tableaux, d'autre part la proximité des individus sur lesquels les observations ont été faites.



### I.1.3 CHAMP D'APPLICATION

Les données pouvant être soumises à l'analyse consistent en tout ensemble de tableaux d'observations (c'est-à-dire de mesures de variables) faites sur une population d'individus, pourvu qu'il soit possible de définir un ensemble de tableaux de proximités entre les individus, à partir des données .

Le type de résultats fourni est celui des méthodes de statistique descriptive, c'est-à-dire, de type géométrique, ne faisant pas intervenir de lois de probabilité (et donc ne permettant pas de tests). L'exemple le plus connu de ce genre de résultats est donné par l'analyse factorielle (des composantes principales ou des correspondances).

### I.1.4 SITUATION DE LA METHODE PROPOSEE VIS A VIS DES METHODES D'ANALYSE CONJOINTE.

La première méthode a été proposée par HORAN en 1969. Peu après, J.D. CARROLL publie la méthode INDSCAL qui utilise la procédure N.I.L.E.S. due à H. WOLD (1966). En 1970, R.A. HARSHMAN décrit le modèle PARAFAC1 (qui utilise la version de NILES améliorée par R. JENRICH). Presqu'en même temps, CARROLL & CHANG présentent un modèle similaire appelé CANDECOMP. En 1972, L.R. TUCKER invente une méthode. La même année HARSHMAN formule PARAFAC2, tandis que CARROLL & CHANG exposent IDIOSCAL. Une présentation de ces méthodes a été faite par A.M. DUSSAIX dans [5].

Cet auteur classe ces méthodes en trois groupes :

- 1 - Celles qui généralisent le modèle d'analyse factorielle,
- 2 - Celles qui généralisent celui des proximités,
- 3 - Celles qui sont spécifiques.

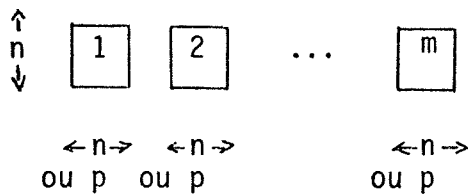


Les différences entre méthodes d'un même groupe proviennent des hypothèses ou des algorithmes retenus. Notre méthode peut être classée dans le premier groupe.

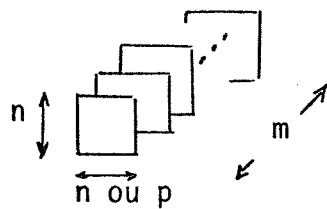
## I.2 TERMINOLOGIE =====

### I.2.1. DONNEES SOUMISES A L'ANALYSE

Un ensemble de  $m$  tableaux à deux entrées est donné sous la forme d'un ensemble de matrices, carrées si ce sont des proximités entre  $n$  individus, rectangulaires, si ce sont des mesures de  $p$  variables faites sur ces individus :



Cet ensemble peut être regardé comme un volume :



et de ce fait il a été proposé de désigner ces ensembles sous le vocable de "données cubiques".

Nous verrons comment on se ramène toujours à un cube  $n \times n \times m$  à partir d'un cube  $n \times p \times m$ , aussi, sauf précision contraire, nous ne parlerons que des cubes de proximités. Un élément du cube est donc une matrice  $n \times n$  de proximités entre individus.

Cette matrice peut toujours être considérée comme le résultat d'un jugement, objectif ou subjectif, portant sur la ressemblance des in-





dividus. Pour cette raison, nous suggérons d'appeler juge une matrice de proximités quelconque entre  $n$  individus.

L'expérience montre d'autre part que la proximité peut être définie sur des éléments variés : individus (sens propre), objets (sens propre) stimulus, variables, caractères ... etc.

De ce fait, pour désigner un élément sur lequel la proximité est définie, nous proposons le terme sujet, avec son sens d'assujetti, puisque c'est sur le sujet qu'un jugement de proximité est porté.

Soit, par exemple, cinq personnes qui donnent, chacune, des notes de ressemblance entre dix hommes politiques : les juges sont les cinq personnes tandis que les sujets sont les dix hommes politiques. Chaque juge  $k$  fournit une matrice  $\tilde{a}^k$  :  $10 \times 10$  dont l'élément  $ij$ ,  $a_{ij}^k$  est la note de ressemblance entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  homme politique fournie par le  $k^{\text{ème}}$  juge. La donnée est l'ensemble  $\{ \tilde{a}^k : 10 \times 10 ; k = 1,5 \}$  notée, en abrégé,  $C$ .

Par la suite, nous distinguerons parmi les proximités :

- les similarités, notées  $C1$ ,
  - les dissimilarités, notées  $C2$ ,
  - les produits scalaires notés  $C4$ ,
  - les distances, notées  $C3$  ou  $C5$  pour les ultramétriques,
- et nous serons amenés à définir des cubes de produits scalaires à partir de données :

- de classement (rangs ou notes), notées  $C6$ ,
- de profils (individus-caractères), notées  $C7$ .



### I.2.2. STRUCTURATION DES DONNEES

Dans toute la thèse, nous employons le mot structure avec le sens suivant :

"Manière dont les parties d'un tout sont arrangées entre elles" et non pas avec le sens mathématique habituel :

"Caractère d'un ensemble résultant des opérations qui y sont définies et de leurs propriétés"

Nous appelons inter-structure, une structure sur l'ensemble des juges et intra-structure une structure sur l'ensemble des sujets, par analogie avec la terminologie de l'analyse de la variance (variance inter-groupes, variance intra-groupe).

Enfin, il nous fallait nommer la méthode et c'est naturellement le titre de la thèse qui nous a conduit au nom de S.T.A.T.I.S., sigle de Structuration des Tableaux A Trois Indices de la Statistique.

### I.2.3. PRESENTATION GENERALE DE S.T.A.T.I.S.

#### I.2.3.1. Première partie

Obtention, à partir de la donnée soumise à l'analyse, d'un cube standard, défini comme un cube de matrices de produits scalaires défini-positives et noté  $S = \{ \underset{\sim}{s}_i : n \times n ; i = 1, m \}$ .

#### I.2.3.2. Seconde partie

Quantification de la proximité entre les juges  $\underset{\sim}{s}_i$ . La matrice  $e : m \times m$  des proximités est ensuite factorisée canoniquement pour obtenir l'inter-structure.



### 1.2.3.3. Troisième partie

Définition d'au moins un référentiel, matrice  $\tilde{r} : n \times n$  de produits scalaires entre les sujets, à partir des  $m$  matrices  $\tilde{s}_i$ , de telle sorte que  $\tilde{r}$  soit la meilleure approximation de toutes  $\tilde{s}_i$  au sens d'un critère précis. La factorisation canonique de  $\tilde{r}$  fournit ensuite une intra-structure de référence.

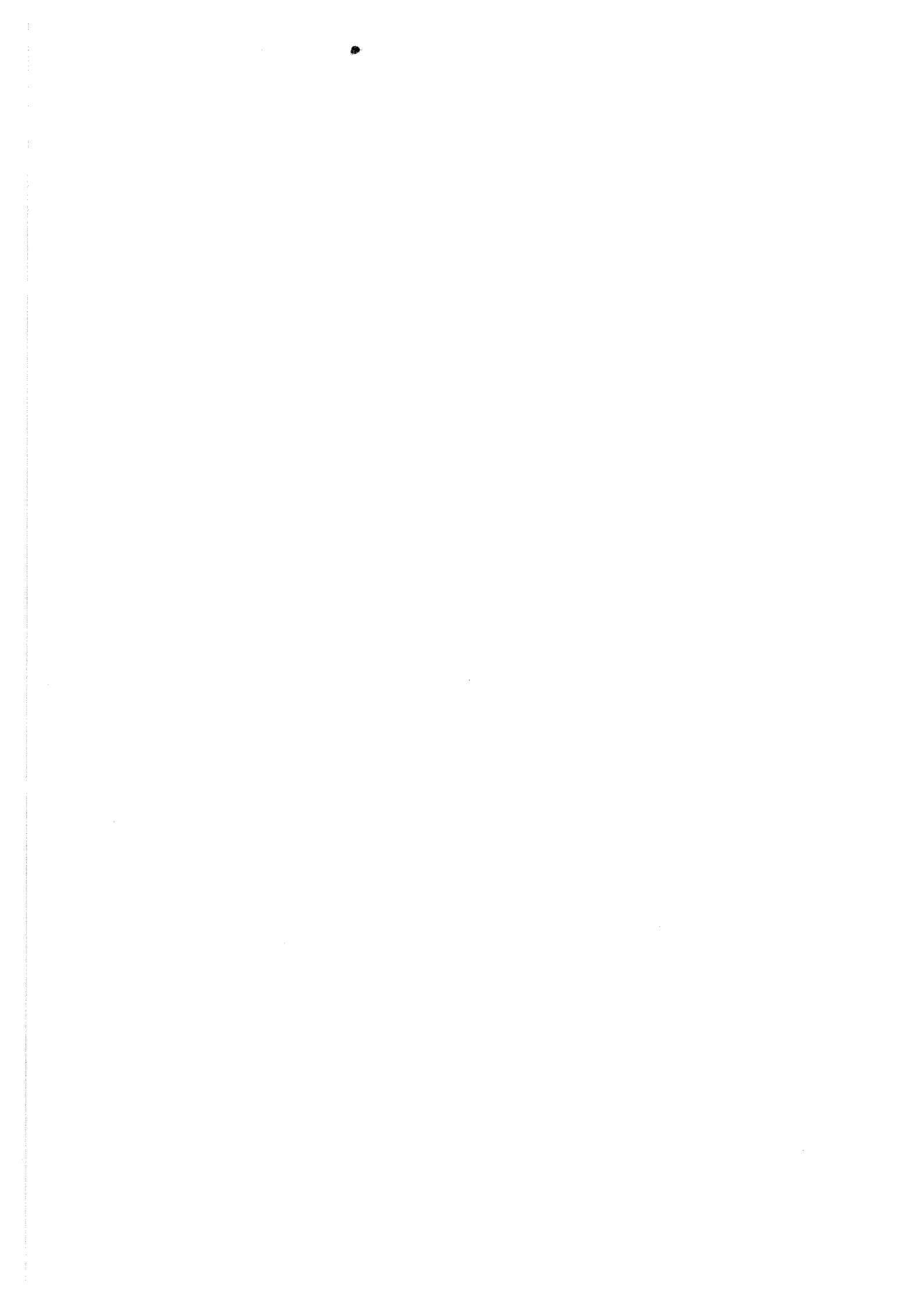
Cette dernière est en général plus intéressante pour décrire les sujets que l'une quelconque des intra-structures obtenues par la factorisation des matrices  $\tilde{s}_i$ .

### 1.2.3.4. Quatrième partie :

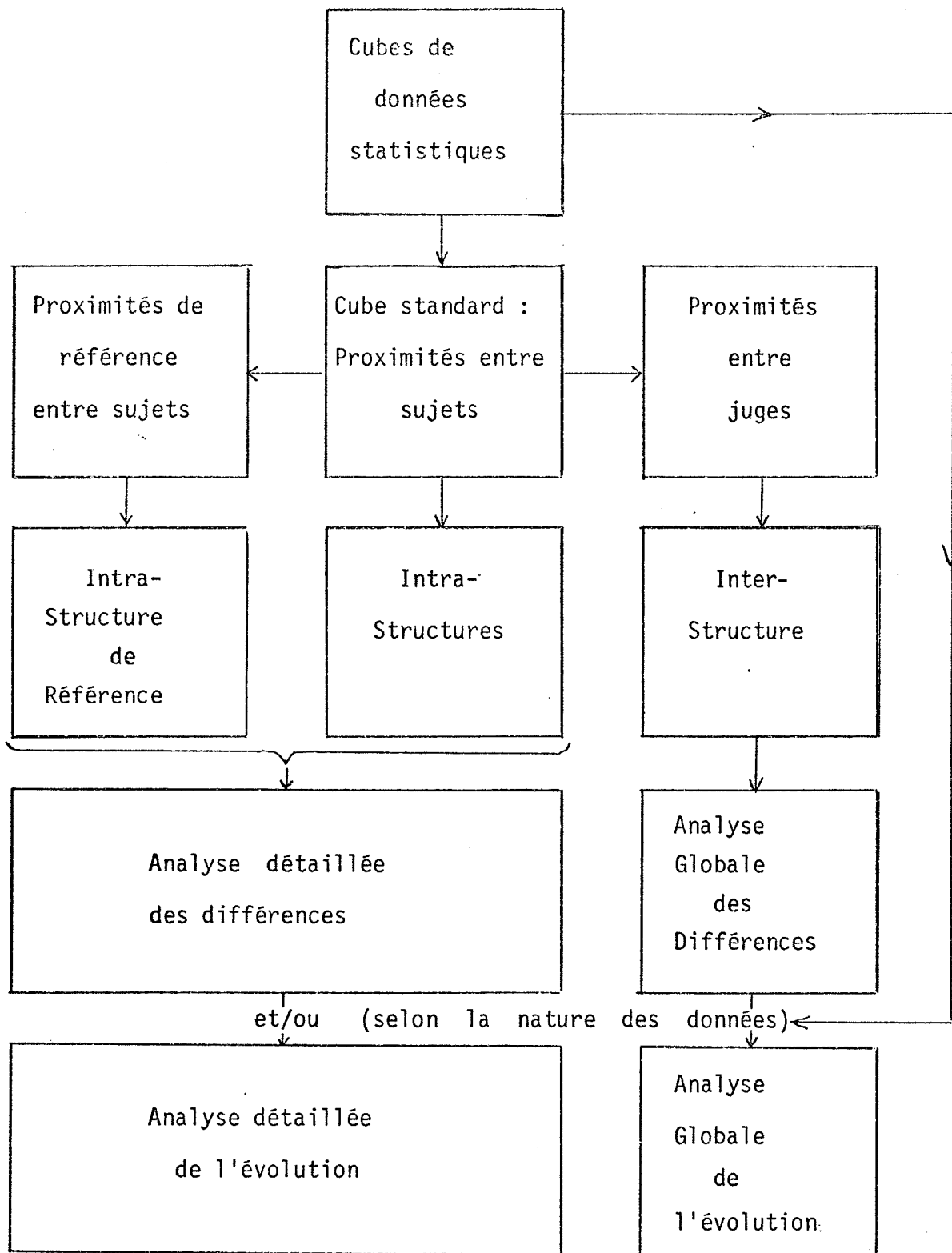
Analyse des différences entre chaque intra-structure et l'intra-structure de référence, l'inter-structure donnant, par ailleurs, une indication globale sur ces différences.

### 1.2.3.5. Cinquième partie :

Lorsque le troisième indice du cube ( $i=1,m$ ) représente un instant -le cube représentant des données chronologiques- la généralisation de l'analyse des différences permet de visualiser l'évolution des intra-structures. Ici encore, l'inter-structure donne une indication globale de l'évolution.



I.2.3.6. Schéma de S.T.A.T.I.S.



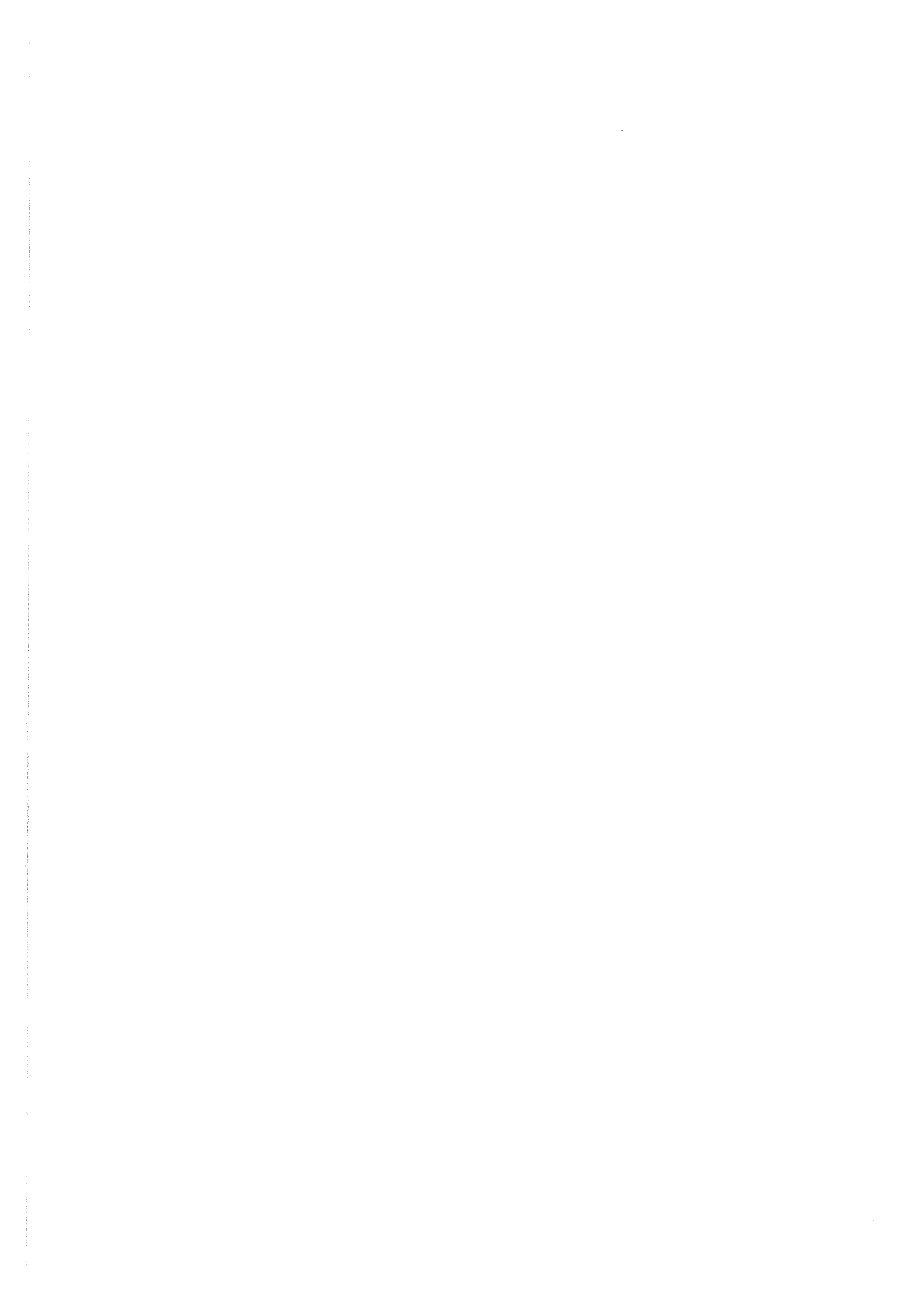




I.3 NOTATIONS  
=====

Etres mathématiques	Exemples	Graphismes
Scalaire	$a$	lettre minuscule latine
Valeur propre	$\alpha$	lettre minuscule grecque
Vecteur	$\underline{a}$	lettre minuscule latine soulignée -
Vecteur propre	$\underline{\alpha}$	lettre minuscule grecque soulignée -
Matrice	$\underline{\tilde{a}}$	lettre minuscule latine soulignée ~
Matrice propre	$\underline{\tilde{\alpha}}$	lettre minuscule grecque soulignée ~
Opérateur Application	$A$	lettre majuscule latine
Ensemble Espace vectoriel	$(A)$	lettre majuscule latine entre pa- renthèses
Relation Propriété	$\mathcal{A}$	Lettre majuscule scripte
Transposée de $\underline{a}$	$\underline{a}'$	$\underline{a}'$
Dual de (E)	$(E^{\times})$	$(E^{\times})$
Produit scalaire	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ ou $\underline{v} \underline{w}$ $\langle \underline{\tilde{a}}, \underline{\tilde{b}} \rangle$

N : renvoi à la bibliographie en annexe



2 - PROPOSITIONS

---

2.1 SCHEMA DE DUALITE

=====

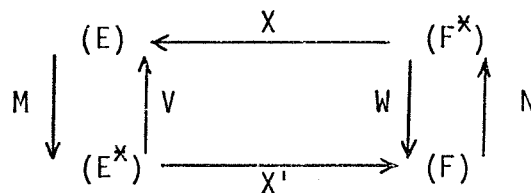
2.1.1 DEFINITIONS (Cf 4) )

2.1.1.1. Schéma général

Etant donnés :

- d'une part, deux espaces vectoriels (E) et (F) rapportés à leurs bases canoniques respectives  $\underline{e} = (\underline{e}_i) ; i = 1, p$  et  $\underline{f} = (\underline{f}_i) ; i = 1, n$ , ayant pour espace dual respectivement  $(E^*)$  rapporté à la base  $\underline{e}^* = (\underline{e}_i^*) ; i = 1, p$  telle que  $\langle \underline{e}_j^*, \underline{e}_i \rangle = \delta_{ij}$  (Kronecker),  $(F^*)$  rapporté à  $\underline{f}^* = (\underline{f}_i^*) ; i = 1, n$  telle que  $\langle \underline{f}_i^*, \underline{f}_j \rangle = \delta_{ij}$ .

- d'autre part, X un opérateur appliquant  $(F^*)$  dans (E) et les métriques euclidiennes M, W, N et V sur (E),  $(F^*)$ , (F) et  $(E^*)$  respectivement, le schéma de dualité général est :



2.1.1.2. Schéma des analyses de données

Etant donnée une matrice de profils (mesures de p variables sur n sujets)  $\underline{x} : p \times n$ , nous pouvons lui associer l'opérateur X précédent en convenant que :

Si  $x_i^j$  désigne l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  colonne et de la  $j^{\text{ème}}$  ligne



de  $\underline{x}_i$ , le sujet  $i$  est représenté dans  $(E)$ , alors isomorphe à  $R^p$ , par le vecteur :

$$\underline{x}_i = \sum_{k=1}^p x_i^k \underline{e}_k, \text{ où } \underline{e}_k \text{ est le } k^{\text{ième}} \text{ élément de la base canonique de } R^p \text{ tandis que la } j^{\text{ième}} \text{ variable est représentée dans } (F), \text{ alors isomorphe à } R^n, \text{ par le vecteur :}$$

$$\underline{x}^j = \sum_{k=1}^n x_k^j \underline{f}_k,$$

$\underline{f}_k$  étant le  $k^{\text{ième}}$  élément de la base canonique de  $R^n$ .

Dans ces conditions, les métriques  $M$  et  $W$  mesurent la proximité entre sujets, dans  $R^p$ , c'est-à-dire, dans  $(E)$  et dans  $(E^*)$  respectivement tandis que  $N$  et  $V$  mesurent la proximité entre les variables dans  $R^n$ , c'est-à-dire, dans  $(F)$  et  $(F^*)$  respectivement. Afin que les distances entre sujets mesurées dans  $(E)$  soient égales à celles mesurées dans  $(E^*)$  on doit avoir :

$$W = X' o M o X$$

et pour que les distances entre variables mesurées dans  $(F)$  soient égales aux distances mesurées dans  $(F^*)$  il faut que :

$$V = X o N o X'$$

Lorsque des poids  $p_i$  sont donnés au sujets ( $p_i > 0$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ), la métrique  $N$  choisie est la métrique euclidienne diagonale  $D_p$  définie par :

$$D_p(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = p_i \delta_{ij}, \text{ où}$$

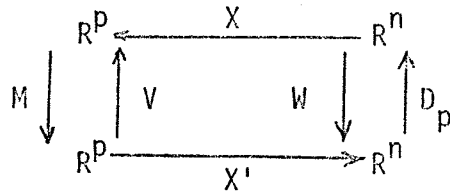
$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Eventuellement, on peut choisir :

$$D_p = \frac{1}{n} \underline{j}_p.$$



Lorsque  $\underline{x}$  est centrée,  $\sum_{k=1}^p x_i^k = 0, \forall i = 1, n$ , alors l'opérateur  $V$  est associé à la matrice des variances-covariances :



2.1.2. PROPOSITION D'UN SCHEMA POUR LES ANALYSES DE DONNEES

CUBIQUES :

Soit  $S = \{ \underline{s}^i : n \times n ; i = 1, m \}$  le cube standard déduit des données.

$\underline{s}^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , espace vectoriel des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\underline{x}^i$ , le vecteur de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  construit à partir de  $\underline{s}^i$  par l'application, notée  $j_{lk}$ , et définie par :

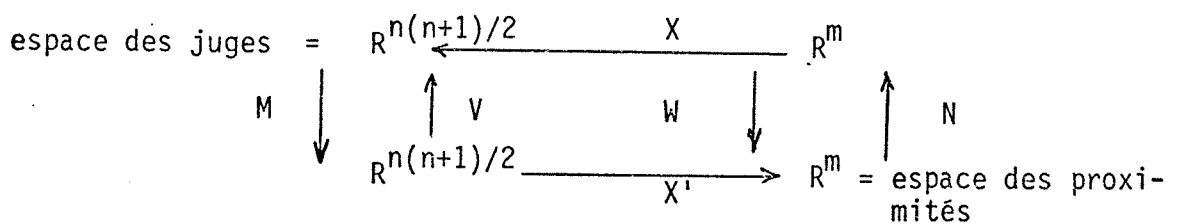
$$x_{j_{lk}}^i = s_{lk}^i \text{ et } j_{lk} = \frac{1(1+1)}{2} + k ; l = 1, n ; k \leq 1.$$

Soit  $\underline{x}$  :  $n(n+1)/2 \times m$ , qui a  $\underline{x}^i$  pour  $i^{\text{ème}}$  colonne.

Enfin, soit  $\underline{m}$  :  $n(n+1)/2 \times n(n+1)/2$ , diagonale, définie par

$$m_{j_{lk}} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } l < k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le schéma de dualité proposé est, avec ces préliminaires :



dans lequel  $\underline{x}$  est associé à  $X$ ,  $\underline{m}$  à  $M$  et  $\underline{j}_m$  à  $N$ . (Identité d'ordre  $m$ ).





2.1.3. PROPRIETE DU SCHEMA PROPOSE :

La distance mesurée entre deux vecteurs de  $R^{n(n+1)/2}$  est égale à la distance entre les deux éléments de  $\mathcal{J}(R^n)$  correspondant à ces vecteurs, lorsqu'on prend sur  $\mathcal{J}(R^n)$  la métrique Trace.

$$\langle \underline{x}^i, \underline{x}^j \rangle_{\mathbb{M}} = \langle \underline{s}^i, \underline{s}^j \rangle_{\text{Trace}} ; \quad \underline{x}^i \xrightleftharpoons{jlk} \underline{s}^i$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{Puisque } d^2(\underline{x}^i, \underline{x}^j) &= \langle \underline{x}^i - \underline{x}^j, \underline{x}^i - \underline{x}^j \rangle_{R^{n(n+1)/2}} \\ &= \langle \underline{x}^i, \underline{x}^i \rangle - 2 \langle \underline{x}^i, \underline{x}^j \rangle + \langle \underline{x}^j, \underline{x}^j \rangle \end{aligned}$$

$$\text{et que } d^2(\underline{s}^i, \underline{s}^j) = \langle \underline{s}^i, \underline{s}^i \rangle_{\mathcal{J}(R^n)} - 2 \langle \underline{s}^i, \underline{s}^j \rangle + \langle \underline{s}^j, \underline{s}^j \rangle$$

Il suffit de démontrer que :

$$\langle \underline{x}^i, \underline{x}^j \rangle_{R^{n(n+1)/2}} = \langle \underline{s}^i, \underline{s}^j \rangle_{\mathcal{J}(R^n)}$$

$$\begin{aligned} \text{Sur } \mathcal{J}(R^n) : \text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^{j'}) &= \text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j) \\ &= \sum_{p=1}^n (\underline{s}^i \underline{s}^j)_{pp} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n s_{pq}^i s_{qp}^j \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n s_{pq}^i s_{pq}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sur } R^{n(n+1)/2} : \underline{x}^i \underset{\mathbb{M}}{\sim} \underline{x}^j &= \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} m_k^2 x_k^i x_k^j \\ &= 2 \sum_{\substack{pq \\ p < q \\ q=1, n}} x_{kpq}^i x_{kpq}^j + \sum_{\substack{pq \\ p = q \\ p=1, n}} x_{kpq}^i x_{kpq}^j \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n s_{pq}^i s_{pq}^j \end{aligned}$$

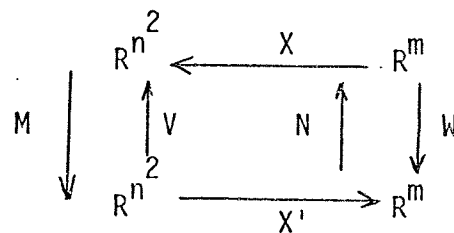


Conséquence :

La matrice associée à l'opérateur  $WoN$ , c'est-à-dire, la matrice des proximités entre 2 éléments de  $R^{n(n+1)/2}$ ,  $\underline{x}^i$  et  $\underline{x}^j$ , représentant respectivement le juge  $i$  et le juge  $j$ , peut être calculée par la formule donnant pour  $(i,j)^e$  élément :  $\text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j)$  puisque la donnée  $\underline{s}^i$  est préalable à l'application  $j_{1k} : s_{1k}^i \rightleftharpoons x_j^i$ .

2.1.4. REMARQUE 1

Soit le schéma :



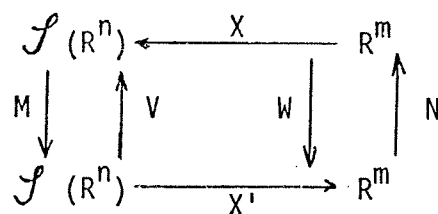
où à  $X$  est associé la matrice  $\underline{x} : n^2 \times m$  ayant pour  $i^e$  colonne le vecteur  $\underline{x}^i$  défini par :

$$x_k^i = s_{pq}^i \text{ avec } k = (p-1)n+q ; p=1,n ; q=1,n.$$

et où à  $M$  est associé la matrice  $\underline{j}_n^2$ . Ce schéma est équivalent à celui proposé en ce sens que  $\text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j) = \underline{x}^i \cdot \underline{j}_n^2 \cdot \underline{x}^j$ . (La démonstration est analogue à celle de la propriété 2.1.3.).

2.1.5. REMARQUE 2

Soit le schéma : (dimension de  $\mathcal{J}(R^n)=n(n+1)/2$ )





où  $\tilde{X}$  est directement associé au cube standard  $S$ . Ce schéma est plus "naturel" que celui proposé. Mais, étant donné que sa description précise soulève des difficultés de formalisation et que cela n'est pas compensé par un apport de résultats supplémentaires, nous ne l'avons pas retenu.

## 2.2 REFERENTIELS =====

### 2.2.1. DEFINITION

Soit  $\underline{e} : m \times m$  la matrice associée à l'opérateur  $WoN$  du schéma de dualité 2.1.2. .

La diagonalisation de  $\underline{e}$  fournit les éléments propres :

$$\{ \lambda_i, \underline{v}^i ; i = 1, p ; p \leq m \}$$

On appelle  $i^{\text{ème}}$  référentiel le vecteur de  $R^{n(n+1)/2}$  défini par :

$$\underline{r}^i = XoN(\underline{v}^i) = \sum_{j=1}^m \underline{v}_j^i \underline{x}^j \quad \text{avec} \quad \underline{v}^{i'} \underline{v}^j = \delta_{ij} \text{ (Kronecker)}$$

$\underline{x}^i$  étant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\underline{x}$  associée à  $X$  dans le schéma 2.1.2.

### 2.2.2. PROPRIETES

2.2.2.1.  $\underline{r}^i$  est  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre de l'opérateur  $VoM$ . ( $i = 1, p ; p \leq m$ ).

Preuve :

$$\text{On a : } WoN(\underline{v}^i) = \lambda_i \underline{v}^i \text{ et } \underline{r}^i = XoN(\underline{v}^i)$$

$$\begin{aligned} VoM(\underline{r}^i) &= XoNoX'oM(\underline{r}^i) , \text{ car } V = XoNoX' \\ &= XoNoX'oMoXoN(\underline{v}^i) , \text{ par définition de } \underline{r}^i \\ &= XoNoWoN(\underline{v}^i) , \text{ car } W = X'oMoX \\ &= XoN(\lambda_i \underline{v}^i) , \text{ par définition de } \underline{v}^i \end{aligned}$$



$$= \lambda_i \text{XoN}(\underline{v}^i) \quad , \text{ car XoN est linéaire}$$

$$= \lambda_i \underline{r}^i \quad , \text{ par définition de } \underline{r}^i$$

2.2.2.2.  $\underline{r}^i$  maximise  $\sum_{k=1}^m [ \langle \underline{x}^k , \underline{r}^i \rangle ]^2$  ,  
 (i=1,p ; p ≤ m)

sous la contrainte  $\underline{v}^{i'} \underline{v}^i = \text{constante}$

parmi les  $\underline{r}^i$  de la forme  $\sum_{j=1}^m \underline{v}_j^i \underline{x}^j$  ;

le maximum étant  $\lambda_i^2$  pour  $\langle \underline{v}^{i'} , \underline{v}^i \rangle = 1$  .

Preuve :

(Démonstration analogue à celle de l'A.C.P., cf. 11 page 200).

$$G(\underline{v}^i) = \sum_{k=1}^m [ \langle \underline{x}^k , \underline{r}^i \rangle ]^2 - \frac{\lambda_i^2}{2} (\langle \underline{v}^i , \underline{v}^i \rangle - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{j=1}^m \underline{v}_j^i \langle \underline{x}^k , \underline{x}^j \rangle \right]^2 - \frac{\lambda_i^2}{2} (\langle \underline{v}^i , \underline{v}^i \rangle - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^m \left[ \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \underline{v}_p^i \underline{v}_q^i \langle \underline{x}^k , \underline{x}^p \rangle \langle \underline{x}^k , \underline{x}^q \rangle \right] - \frac{\lambda_i^2}{2} \left[ \sum_{p=1}^m \underline{v}_p^i{}^2 - 1 \right]$$

$$\frac{\partial G(\underline{v}^i)}{\partial \underline{v}_p^i} = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \underline{v}_q^i \langle \underline{x}^k , \underline{x}^p \rangle \langle \underline{x}^k , \underline{x}^q \rangle - \lambda_i^2 \sum_{p=1}^m \underline{v}_p^i$$

$$= \sum_{q=1}^m \underline{v}_q^i (e^2)_{pq} - \lambda_i^2 \sum_{p=1}^m \underline{v}_p^i (j_m)_{pp}$$

$$= e^2 \underline{v}^i - \lambda_i^2 j_m \underline{v}^i = (e^2 - \lambda_i^2 j_m) \underline{v}^i .$$

$$e \underline{v}^i = \lambda_i \underline{v}^i \Rightarrow e^2 \underline{v}^i = \lambda_i^2 \underline{v}^i \Rightarrow \frac{\partial G(\underline{v}^i)}{\partial \underline{v}_p^i} = 0$$





Le maximum est :

$$\sum_{k=1}^m \left[ \sum_{j=1}^m v_j^i \langle x^k, x^j \rangle \right]^2 = (e v^i)' (e v^i) \\ = \lambda_i^2 v^i v^i = \lambda_i^2$$

2.2.2.2. bis Remarque

Vecteur  $\underline{b} = \sum_{j=1}^m v_j x^j$  qui maximise

$$\sum_{k=1}^m \langle x^k, \underline{b} \rangle : \text{(on cherche } v \text{ qui détermine } \underline{b} \text{)}$$

$$G(v) = \sum_{k=1}^m \langle x^k, \sum_{j=1}^m v_j x^j \rangle - \lambda/2 \langle v, v \rangle$$

$$\frac{\partial G(v)}{\partial v_j} = \sum_{k=1}^m \langle x^k, x^j \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m v_j = e \underline{1} - \lambda v$$

$$e \underline{1} = \lambda v \Rightarrow \frac{\partial G(v)}{\partial v_j} = 0 ; \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } v = \frac{e \underline{1}}{\|e \underline{1}\|} \text{ avec } \lambda = \|e \underline{1}\|$$

$$2.2.2.3. \quad \|r^i\| = \sqrt{\lambda_i} \quad (i=1, p ; p \leq m)$$

Preuve :

$$r^i = X_0 N (v^i) = \sum x v^i, \text{ puisque } N = \sum_{j=1}^m x^j$$

d'où :

$$\|r^i\|^2 = \left\| \sum x v^i \right\|^2 = \langle \sum x v^i, \sum x v^i \rangle = v^i' \sum_{m=1}^m x x' v^i \\ = v^i' e v^i = v^i' \lambda_i v^i = \lambda_i v^i' v^i = \lambda_i$$



2.2.2.4. Remarques

Considérons l'élément de  $\mathcal{J}(R^n)$ ,  $\underline{r}^i : n \times n$  qui a pour image  $\underline{r}^i$ ,  $i^e$  vecteur référentiel, dans la correspondance  $j_{1k}$ , c'est à dire, rappelons-le :

$$(\underline{r}^i)_{j_{1k}} = (\underline{r}^i)_{1k} : j_{1k} = \frac{1(1+1)}{2} + k ; 1 = 1, n ; k \leq 1.$$

1 -  $\underline{r}^i$  est 'matrice propre' de l'opérateur VoM dans le schéma naturel 2.1.5. . (La démonstration est identique à celle du § 2.2.2.1.).

2 -  $\underline{r}^i$  maximise  $\sum_{k=1}^m [ \langle \underline{s}^k, \underline{r}^i \rangle ]^2$  sous la contrainte  $\sum_{j=1}^m \underline{v}_j^i \underline{v}_j^i \leq 1$  parmi les  $\underline{r}^i$  de la forme  $\sum_{j=1}^m \underline{v}_j^i \underline{s}^j$ ,  $\underline{s}^j \in S$ . (La démonstration est identique à celle du § 2.2.2.2., mais  $\langle , \rangle_{\mathcal{J}(R^n)}$  au lieu de  $\langle , \rangle_{R^{n(n+1)/2}}$ ;  $\underline{e}$  est identique dans les deux cas, cf. propriété 2.1.3.).

3 -  $\|\underline{r}^i\| = \sqrt{\lambda_i}$  (la démonstration est identique à celle du § 2.2.2.3.), mais alors  $(\underline{e})_{ij} = \text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j)$ .

4 - Définition :  $\underline{r}^i$  (correspondant à  $\underline{r}^i$ ) est appelé  $i^e$  matrice référentielle.

2.3. STRUCTURES

2.3.1. DEFINITIONS

2.3.1.1. Représentation canonique

Soit (X) une population statistique, on appelle représentation canonique (ou triviale) la représentation dans  $R^p$  des individus de la population sur lesquels p caractères sont observés et qui, à deux éléments de (X) semblables fait correspondre deux éléments de  $R^p$  qui sont voisins.



2.3.1.2. Structures

Etant donnée une représentation canonique dans  $R^p$  d'une population statistique, on appelle structures toutes réductions à  $R^2$  de cette représentation obtenues par projection orthogonale des points représentatifs des individus sur un plan quelconque contenu dans  $R^p$ .

N.B. - Ceci est l'expression mathématique de la définition générale donnée au paragraphe 1.2.2. .

2.3.1.3. Inter-Structure

Structure obtenue à partir d'une représentation canonique de la population des juges.

2.3.1.4. Intra-Structure

Structure obtenue à partir d'une représentation canonique des sujets.

2.3.2. OBTENTION DES STRUCTURES

2.3.2.1. Principes et plan d'exposition

C. , C6 , C7 : Données cubiques

(cf § 2.3.2.2.)



Cube standard :  $S = \{ \underset{\sim}{s}^i : n \times n ; i = 1, m \}$

(cf § 2.3.2.3.)



Calcul de  $\underset{\sim}{e} : m \times m : e_{ij} = \text{Trace} (\underset{\sim}{s}^i \underset{\sim}{s}^j)$

(cf § 2.3.2.4.)





factorisation canonique de  $e$  :  
représentation canonique des  
juges (cf § 2.3.2.5.)

réduction à  $R^2$  de la représen-  
tation : inter-structure  
(cf § 2.3.2.6.)

factorisation canonique de  $s^i$  :  
représentation des sujets "vus"  
par le  $i^{\text{ème}}$  juge (cf § 2.3.2.7.)

réduction de la représentation :  
 $i^{\text{ème}}$  intra-structure  
(cf § 2.3.2.8.)

### 2.3.2.2. Les données cubiques

#### 2.3.2.2.1. Cube de proximités originales

##### Définition 1 :

Soient (S) une population de n sujets et (J) une population de m juges ; (S) = {1,2,...,n} et (J) = {1,2,...,m}.

Si l'application

$$\Pi : (J) \times (S) \times (S) \rightarrow [r_1, r_2] \subset R^+$$

qui, à tout  $j \in (J)$ , et à tout  $(i,k) \in (S) \times (S)$  fait correspondre le réel  $a_{ik}^j$  de l'intervalle  $[r_1, r_2]$  ( $r_1$  et  $r_2$  pouvant être fonction de  $j$ ),

vérifie les deux axiomes

(1)  $\forall (i,k) \in (S) \times (S), \forall j \in (J) : a_{ik}^j = a_{ki}^j$

(2)  $\left\{ \begin{array}{l} (2a) \forall i \in (S), \forall j \in (J) : a_{ii}^j = r_1 \text{ et } a_{ik}^j < a_{lk}^j \Leftrightarrow i \\ \text{plus proche de } k \text{ que } l. \end{array} \right.$

ou bien

(2b)  $\forall i \in (S), \forall j \in (J) : a_{ii}^j = r_2 \text{ et } a_{ik}^j < a_{lk}^j \Leftrightarrow i$   
moins proche de  $k$  que  $l$ .

Alors, l'ensemble  $C. = \{ \tilde{a}^j : n \times n ; j = 1, m \}$  est un cube de proximités originales.





Définition 2 :

L'élément  $a_{ik}^j$  est appelé proximité donnée par le juge  $j$  entre le sujet  $i$  et le sujet  $k$ .

Définition 3 :

Si (2a) est vérifié,  $a_{ik}^j$  est une matrice de dissimilarités ou de distances ou de tous autres coefficients mesurant une dissemblance.

Définition 4 :

Si (2b) est vérifié,  $a_{ik}^j$  est une matrice de similarités ou de produits scalaires ou de tous autres coefficients mesurant une ressemblance.

Exemple :

Soient (J) l'ensemble des méthodes de classification hiérarchique et (S) un ensemble de  $n$  sujets classés par chacune des méthodes.

Considérons pour la  $j^{\text{ième}}$  méthode, la matrice des distances ultramétriques entre les sujets  $a_{ik}^j : n \times n$ .

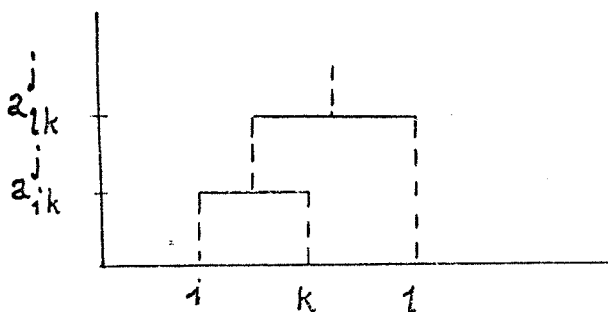
Ses éléments vérifient :

$$(1) : a_{ik}^j = a_{ki}^j$$

$$(2a) \left\{ \begin{array}{l} a_{ii}^j = r_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ik}^j < a_{lk}^j \iff i \text{ plus proche de } k \text{ que } l, \text{ ce} \end{array} \right.$$

qui s'assure par simple lecture du  $j^{\text{ième}}$  arbre :





#### 2.3.2.2.2. Cube de profils

##### Définition :

Soient les ensembles (S) contenant n éléments appelés sujets,  $(V_k)$  contenant  $p_k$  éléments appelés variables et (J) l'ensemble des groupes  $(V_k)$ ,  $(J) = \{ (V_k) ; k = 1, m \}$ .

Soit  $\tilde{x}^k$  :  $n \times p_k$ , la matrice des mesures des variables du groupe  $(V_k)$  faites sur les sujets de (S).

$x_{ij}^k$  est la mesure de la  $j^{\text{ième}}$  variable du groupe  $(V_k)$  pour le  $i^{\text{ème}}$  sujet de (S).

L'ensemble  $C7 = \{ \tilde{x}^k : n \times p_k ; k = 1, m \}$  est appelé cube de profils.

##### Exemple :

On dispose de m groupes de mesures faites sur n variétés de blé. Un juge est un groupe de mesures, un sujet est une variété de blé. Si le  $i^{\text{ème}}$  groupe de mesures porte sur des caractères physiques, une variable est l'un de ces caractères :

$x_{kj}^i$  = mesure du  $j^{\text{ième}}$  caractère physique (i) sur la  $k^{\text{ième}}$  variété de blé.

$$C7 = \{ \tilde{x}^i : n \times n ; i = 1, m \}$$

#### 2.3.2.2.3. Cube de notations

Etant donné un ensemble (S) de n sujets muni d'une relation d'ordre total R, (ordre de préférence, classement, système de pondération, probabilité attachée ...) on appelle notation la traduction de cette relation par un vecteur de  $R^n$  :  $\underline{x}$ , tel que, si  $(S) = \{1, 2, \dots, n\}$



et  $R : \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  ; où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ , alors,  $\forall i \in (S)$  et  $\forall j \in (S) : \sigma(i) \leq \sigma(j) \Leftrightarrow x_i \leq x_j$ .

Exemple 1 :

$R$  = notes ou rangs donnés par un juge à  $n$  sujets :

3, 3, 1, 4,  $n, \dots$ . La traduction la plus naturelle de  $R$  est le vecteur  $\underline{x} = (3, 3, 1, 4, n, \dots)$  de  $R^n$ .

Définition 2 :

Soit un ensemble  $(J)$  de  $m$  juges. Si  $\underline{x}^j \in R^n$  traduit la relation  $R^j$  donnée par le  $j^{\text{ième}}$  juge sur les  $n$  éléments d'une population  $(S)$ , appelés sujets, on appelle cube de notations l'ensemble :

$$C6 = \{ \underline{x}^j \in R^n, j = 1, m \}$$

Exemple 2 :

Soient  $(S)$  un ensemble de  $n$  étudiants et  $(J)$  l'ensemble des matières enseignées et notées, en supposant qu'il y en ait  $m$  :

Si  $x_i^j$  désigne la note donnée au  $i^{\text{ème}}$  étudiant dans la  $j^{\text{ième}}$  matière, alors :

$$C6 = \{ \underline{x}^j \mid (x_i^j \leq x_k^j) \Leftrightarrow (\sigma(i) \leq \sigma(k)), \forall i, k \in (S) ; j=1, m \}$$

Notations considérées comme profils

$C6 = \{ \underline{x}^j \in R^n ; j = 1, m \}$  peut être assimilé à un cube de profils  $\{ \underline{x}^j : n \times p_j ; j = 1, m \}$  tel que  $p_j = 1, \forall j = 1, m$ .

2.3.2.2.4. Cube de proximités calculées

Définition :

Etant donné un cube de profils  $C7 = \{ \underline{x}^k : n \times p_k ; k = 1, m \}$  (éventuellement :  $p_k = 1, \forall k = 1, m$ ) et une forme quadratique



$\tilde{q}^k : p_k \times p_k$ , on définit une proximité  $\tilde{a}^k = \tilde{x}^k \tilde{q}^k \tilde{x}^{k'}$  à partir de chaque  $\tilde{x}^k$  et pour la métrique correspondante  $\tilde{q}^k$  pour obtenir un cube de proximités calculées (produits scalaires) :  $\{ \tilde{a}^k : n \times n ; k = 1, m \}$ .

Exemple :

Soit C7 le cube de profils correspondant à m groupes de mesures faites sur n variétés de blé du § 2.3.2.2.2. :

$$\{ \tilde{x}^k : n \times p_k ; k = 1, m \}$$

Le cube de proximités calculées correspondant est l'ensemble des matrices de produits scalaires entre les n variétés de blé supposées représentées dans  $R^{p_k} : C. = \{ \tilde{x}^k \tilde{x}^{k'} : n \times n ; k = 1, m \}$ ; si on suppose que,  $\forall k = 1, m$ ,  $\tilde{q}^k = \tilde{j}_{p_k}$ .

2.3.2.3. Le cube standard S

2.3.2.3.1. Définition :

Le cube standard de l'analyse conjointe est un cube de matrices de produits scalaires.

Dans la méthode proposée chaque matrice devant être factorisée canoniquement et le résultat de cette factorisation visualisé, il est équivalent de remplacer chaque matrice par la matrice la plus proche au sens des moindres carrés généralisés avant la factorisation, à condition d'indiquer la qualité de l'approximation ainsi réalisée.

Aussi définirons-nous le cube standard de S.T.A.T.I.S. comme un ensemble de m matrices  $s^i$  de produits scalaires définies positives.

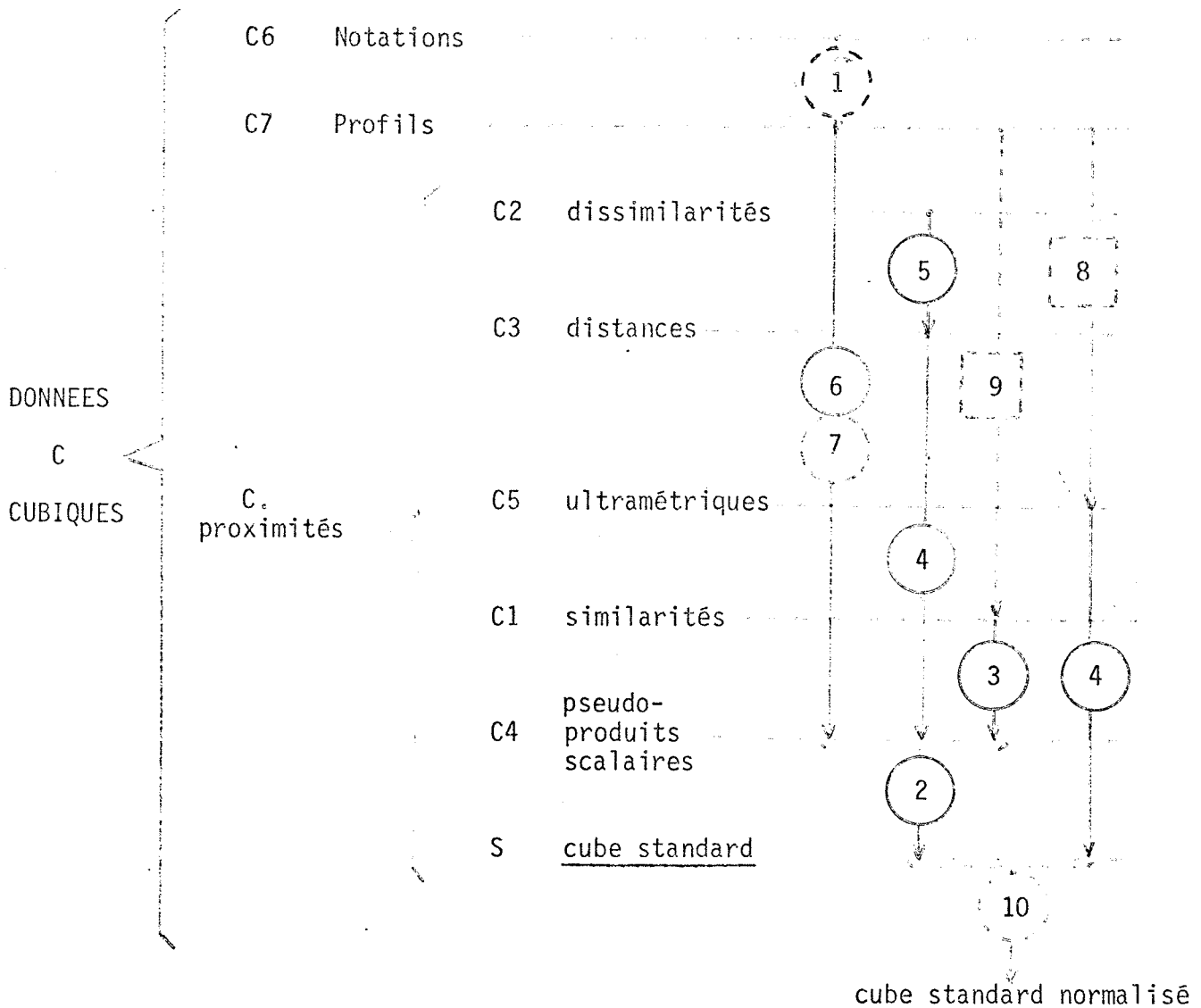




2.3.2.3.2. Obtention du cube standard  
(première partie de la méthode)

2.3.2.3.2.1. Ensemble des transformations :

- Légende
- I désigne une transformation nécessaire,
  - J désigne une transformation facultative,
  - K désigne une transformation étrangère à la méthode





2.3.2.3.2.2. Signification des transformations (1) à 10

① - Ajout à l'ensemble (S) des sujets d'un élément appelé sujet - origine qui reçoit obligatoirement la même notation de la part de chaque juge de l'ensemble (J).

C6 = { x<sup>i</sup> ∈ R<sup>n</sup> ; i = 1, m } devient

C7 = { y<sup>i</sup> : (n+1) x 1 ; i = 1, m } où

y<sub>j1</sub><sup>i</sup> = x<sub>j</sub><sup>i</sup> pour j = 1, n et y<sub>j1</sub><sup>i</sup> = valeur commune à tout i pour j = n + 1 .

La justification de cette transformation des données se trouve dans le fait que deux notations x<sup>i</sup> et x<sup>j</sup> qui ne diffèrent que par une permutation circulaire des composantes fournissent les mêmes distances entre les sujets. De plus, comme nous le verrons au § 4.2. sur un exemple, l'interprétation est facilitée par le positionnement de ce sujet-origine dans les intra-structures.

② - Approximation, au sens des moindres carrés généralisés, de chaque matrice a<sup>i</sup> de C4 par une matrice définie positive s<sup>i</sup>.

Appliquant le théorème 2 donné dans 17 , (et rappelé en annexes § 6.1.3.) s<sup>i</sup> qui minimise Trace (s<sup>i</sup> - a<sup>i</sup>)<sup>2</sup> , est donnée par :

s<sup>i</sup> = ∑\_{λ\_j > 0} λ\_j^i δ\_j^i δ\_j^i' où λ\_j^i et δ\_j^i sont les j<sup>ièmes</sup> éléments propres de a<sup>i</sup> tels que : δ\_j^i δ\_j^i' = 1 .

La qualité de l'approximation est mesurée par le pourcentage

Trace (a<sup>i</sup> - s<sup>i</sup>)<sup>2</sup> / Trace (a<sup>i2</sup>)



③ - Une similarité expérimentale est assimilée à un produit scalaire quelconque.

④ - Transformation de W.S. Torgerson ( 20 page 257, 19 pages 239 à 358 , ou bien 9 page 3).

Soit  $C3 = \{ \underset{\sim}{d}^k : n \times n ; k = 1, m \}$  l'ensemble des matrices de distances entre  $n$  sujets représentés dans un espace vectoriel de dimension finie (ou  $C5$ ). L'élément  $i$ - $j$  de  $\underset{\sim}{d}^k$  étant  $d_{ij}^k$ , la transformation de Torgerson donne l'élément  $s_{ij}^k$  d'une matrice  $\underset{\sim}{s}^k$  de produits scalaires des vecteurs ayant pour origine le centre de gravité des sujets et pour extrémités les points représentant les sujets :

$$s_{ij}^k = \frac{1}{2n^2} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n ((d_{im}^k)^2 + (d_{jl}^k)^2 - (d_{ij}^k)^2 - (d_{ml}^k)^2)$$

⑤ - Une dissimilarité expérimentale est assimilée à une distance quelconque.

⑥ - Définition d'un produit scalaire à partir d'un cube de profils , cf § 2.3.2.2.4.1. .

⑦ - Soit  $C4 = \{ \underset{\sim}{a}^i : n \times n ; i = 1, m \}$  ; chaque matrice de produits scalaires  $\underset{\sim}{a}^i$  est remplacée par une autre matrice  $\underset{\sim}{b}^i : n \times n$  de produits scalaires entre les  $n$  sujets de façon que les factorisations canoniques des  $\underset{\sim}{b}^i$  fournissent des représentations dans  $R^{P_i}$  qui soient centrées, de la même manière que les matrices issues de la transformation de Torgerson.

Pour  $i = 1, m$  ,  $j = 1, n$  et  $k = 1, n$  , on calcule :

$$b_{jk}^i = a_{jk}^i - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (a_{lk}^i + a_{jl}^i) + \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n a_{lm}^i$$



8 - Méthodes de classification hiérarchique fournissant chacune une matrice de distances ultramétriques qui permet habituellement de construire la représentation arborescente.

9 - Définition d'un indice de proximité. Les indices les plus utilisés sont décrits dans 14, pages 857 à 874.

10 - Normalisation du cube standard : chaque matrice  $\underline{s}^i$  est normalisée à l'unité en divisant chacun de ses éléments  $s_{kl}^i$  par :

$$\| \underline{s}^i \|_{S(R^n)} = \| \underline{x}^i \|_{R^n} (n+1)/2$$

où  $\underline{x}^i$  est relié à  $\underline{s}^i$  par la relation  $j_{lk}$  du schéma 2.1.2.

$$\| \underline{x}^i \|^2 = \langle \underline{x}^i, \underline{x}^i \rangle = \underline{x}^{i'} \underline{m} \underline{x}^i$$

où  $m$  est associée à  $M$  dans le schéma 2.1.2.

Comme nous l'avons déjà dit :  $\underline{x}^{i'} \underline{m} \underline{x}^i = \text{Trace} (\underline{s}^{i2})$

Donc :  $\| \underline{s}^i \| = \sqrt{\text{Trace} (\underline{s}^{i2})}$  et le cube standard normalisé est :

$$SN = \left\{ \underline{s}^i / \| \underline{s}^i \| : n \times n ; i = 1, m \right\}$$

#### 2.3.2.4. Calcul de la matrice des proximités entre juges

##### 2.3.2.4.1. Proximité entre deux juges

$$\text{Soit } S = \left\{ \underline{s}^i : n \times n ; i = 1, m \right\}$$

(ou SN). Plaçons nous dans l'espace des juges du schéma de dualité proposé au § 2.1.2. :

Dans  $R^{n(n+1)/2}$ , un juge est représenté par  $\underline{x}^i$ , construit à partir de  $\underline{s}^i$  par la relation  $j_{lk}$  :

$$x_{j_{lk}}^i = s_{lk}^i \quad \text{et} \quad j_{lk} = \frac{l(l+1)}{2} + k ; l=1, n ; k \leq l$$





La proximité entre deux juges  $\underline{x}^i$  et  $\underline{x}^j$  est mesurée par :

$$\langle \underline{x}^i, \underline{x}^j \rangle = \underline{x}^{i'} \underset{\sim}{m} \underline{x}^j = \text{Trace} (\underset{\sim}{s}^i \underset{\sim}{s}^j)$$

2.3.2.4.2. Matrice  $e$  :  $m \times m$  des proximités entre juges

L'élément  $i - j$  de  $\underset{\sim}{e}$  est

$$e_{ij} = \text{Trace} (\underset{\sim}{s}^i \underset{\sim}{s}^j)$$

2.3.2.4.3. Un juge  $\underset{\sim}{s}^i$  dans le schéma 2.1.1.2.

La factorisation canonique de  $\underset{\sim}{s}^i$  fournit une matrice  $\underset{\sim}{x}^i : p_i \times n$ , telle que  $\underset{\sim}{s}^i = \underset{\sim}{x}^{i'} \underset{\sim}{x}^i$ , qui peut être regardée comme une matrice de profils, mesures de  $p_i$  variables (inconnues) faites sur la population des sujets.

Si  $\underset{\sim}{x}^i$  est associée à  $X^i$  dans le schéma 2.1.1.2. alors  $\underset{\sim}{s}^i$  est associée à  $W^i$  pour les choix  $\underset{\sim}{j}_{p_i}$  associée à  $M^i$ ,  $\underset{\sim}{j}_n$  associée à  $N^i$  :



Ceci montre comment notre schéma 2.1.2. est relié aux  $m$  schémas classiques 2.1.1.2. et nous permet de préciser la nature de la proximité entre deux juges.



2.3.2.4.4. Nature de la proximité entre juges

2.3.2.4.4.1. L'opérateur  $U_{x^i}$  associé au tableau de données  $x^i$

2.3.2.4.4.1.1. Définition. :

Avec les notations du paragraphe précédent :

cèdent :

$$U_{x^i} \stackrel{\text{d\underline{e}}}{\text{f}} W^i \circ N^i = X^{i'} \circ M^i \circ X^i \circ N^i$$

(cf 10 , 6 et 7)

2.3.2.4.4.1.2. Matrice associée à  $U_{x^i}$

avec les choix  $M^i = \underset{\sim}{j} p_i$  et  $N^i = \underset{\sim}{j} n$ ,

$$U_{x^i} = X^{i'} \circ X^i = \underset{\sim}{x}^{i'} \underset{\sim}{x}^i = \underset{\sim}{s}^i ;$$

Chaque matrice  $\underset{\sim}{s}^i$  du cube standard peut donc être associée à l'opérateur  $U_{x^i}$  lui-même associé au tableau  $\underset{\sim}{x}^i$  obtenu par factorisation canonique de  $\underset{\sim}{s}^i$ .

2.3.2.4.4.2. proximité entre opérateurs  $U_{x^i}$  et  $U_{x^j}$

cf 10 , page 6 :  $\langle U_{x^i} , U_{x^j} \rangle = \text{Trace} (\underset{\sim}{s}^i \underset{\sim}{s}^j)$

La matrice  $\underset{\sim}{e}$  :  $m \times m$  des proximités dans  $R^{n(n+1)/2}$  entre juges est identique à la matrice des proximités entre opérateurs associés aux tableaux obtenus par factorisation canonique des matrices du cube standard.

2.3.2.4.4.3. Condition pour que  $\underset{\sim}{e}$  soit la matrice des coefficients RV entre opérateurs  
(cf 10 ).

Si  $\underset{\sim}{x}^i$  désigne le tableau  $p_i \times n$  obtenu par factorisation canonique de  $\underset{\sim}{s}^i$ , élément de  $S$ , on a par définition :



$$RV(\underline{x}^i, \underline{x}^j) = \frac{\langle U_{X^i}, U_{X^j} \rangle}{\|U_{X^i}\| \|U_{X^j}\|}$$

Lorsque S est normalisé, puisqu'alors :

$$\|\underline{s}^i\| = 1 ; \forall i = 1, m, \text{ on a :}$$

$$e_{ij} = \text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j) = RV(\underline{x}^i, \underline{x}^j).$$

Nota : Conditions de centrage :

$\underline{x}^i$  est centrée en ligne :

- soit parce que  $\underline{s}^i$  est issue de la transformation de Torgerson, ④.
- soit par l'application de la transformation ⑦.

2.3.2.4.4.4. Equivalences entre deux juges  $\underline{s}^i$  et  $\underline{s}^j$  :

1 - Lorsque deux opérateurs  $U_{X^i}$  et  $U_{X^j}$  sont à distance nulle dans l'espace d'Hilbert-Schmidt, les tableaux  $\underline{x}^i$  et  $\underline{x}^j$  sont dits équivalents :

$$\|U_{X^i} - U_{X^j}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x}^i \sim \underline{x}^j$$

2 - Cf 10, pages 6-7, si  $\underline{s}^i$  et  $\underline{s}^j$  ont les mêmes éléments propres alors  $d^2(U_{X^i}, U_{X^j}) = 0$ .

$$3 - U_{X^i} = U_{X^j} \Leftrightarrow RV(\underline{x}^i, \underline{x}^j) = 1$$

2.3.2.4.4.5.  $e$  est définie positive :

$$\forall \underline{\alpha} \in R^m, \text{ posons : } \underline{s} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{s}^i$$

$$\|\underline{s}\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{s}^i, \sum_{j=1}^m \alpha_j \underline{s}^j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j \langle \underline{s}^i, \underline{s}^j \rangle = \underline{\alpha}' e \underline{\alpha} \geq 0$$



2.3.2.5. Représentation canonique des Juges

2.3.2.5.1. La factorisation canonique ( 12 pages 325-338)

Soit  $\underline{t}$  :  $q \times q$  une matrice symétrique et définie positive dont les éléments propres sont  $\{\lambda_i, \underline{y}^i ; i = 1, q\}$  :

La matrice  $\underline{Y}$  :  $q \times q$  ayant pour colonnes les vecteurs  $\underline{y}^i$  normés à  $\lambda_i$  (i.e :  $\underline{y}^{i'} \underline{y}^i = \lambda_i$ ) vérifie :

$$\underline{t} = \underline{Y} \underline{Y}'$$

En effet :

$$\underline{t} = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \underline{y}^i \underline{y}^{i'} \quad \text{lorsque} \quad \underline{y}^{i'} \underline{y}^i = 1,$$

Cf théorème 2 de 17 , (rappelé en annexes § 6.1.3.) , et  $\lambda_i > 0, \forall i = 1, q$  .

2.3.2.5.2. Représentations canoniques

(Cf 9 page 5)

Lorsque  $\underline{t}$  est une matrice de produits scalaires entre  $q$  éléments d'une population ( $Q$ ), représentés dans un espace vectoriel isomorphe à  $R^q$  , l'expression  $\underline{t} = \underline{Y} \underline{Y}'$  montre que, pour le choix de la métrique identité sur cet espace,  $\underline{Y}$  représente les coordonnées des vecteurs-images des individus- dans  $R^q$ . La  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\underline{Y}$  donne les composantes sur le  $i^{\text{ème}}$  axe de ces points représentatifs. La représentation ainsi obtenue n'est définie qu'à un arrangement près des colonnes de  $\underline{Y}$ , ce qui correspond à un arrangement dans la numérotation des axes de l'espace.





2.3.2.5.3. Représentation canonique des juges

Soit  $e : m \times m$  la matrice des proximités entre juges définie au § 2.3.2.4.2. et soit  $\{\mu_i, \underline{v}^i ; i = 1, m\}$  l'ensemble de ses éléments propres tels que  $\underline{v}^{i'} \underline{v}^i = \mu_i$  et  $\mu_i > 0$ . Une représentation canonique est définie par  $\underline{X} = (\underline{v}^1, \underline{v}^2, \dots, \underline{v}^m) : m \times m ; (\underline{v}_k^1, \underline{v}_k^2, \dots, \underline{v}_k^m), k^{i\text{ème}}$  ligne de  $\underline{X}$ , représente les composantes du  $k^{i\text{ème}}$  juge dans  $R^m$ , tandis que  $\underline{v}^j$  représente les composantes des juges sur le  $j^{i\text{ème}}$  axe.

2.3.2.6. Inter-Structure

2.3.2.6.1 Définition

Puisque nous désirons visualiser les proximités entre juges par le moyen de représentations planes, nous devons restreindre à  $R^2$  la représentation canonique précédente.

Etant dans une situation analogue à celle de l'analyse factorielle nous pouvons utiliser ses solutions pour la résolution de ce problème.

1 - A partir de la représentation canonique  $\underline{X}$  telle que  $\underline{X} = (\underline{v}^1, \underline{v}^2, \dots, \underline{v}^m)$  et  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  c'est-à-dire où les vecteurs propres de  $e$  sont rangés dans l'ordre décroissant des valeurs propres, nous savons que la réduction à  $R^2$ , de la configuration dans  $R^m$ , la plus fidèle quant au respect des proximités entre éléments représentés, est la projection sur le premier plan factoriel.

La qualité de cette représentation réduite est mesurée par le pourcentage de variance expliquée par les deux premiers facteurs, à savoir

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \quad (\text{la variance est une mesure de la dispersion du nuage})$$



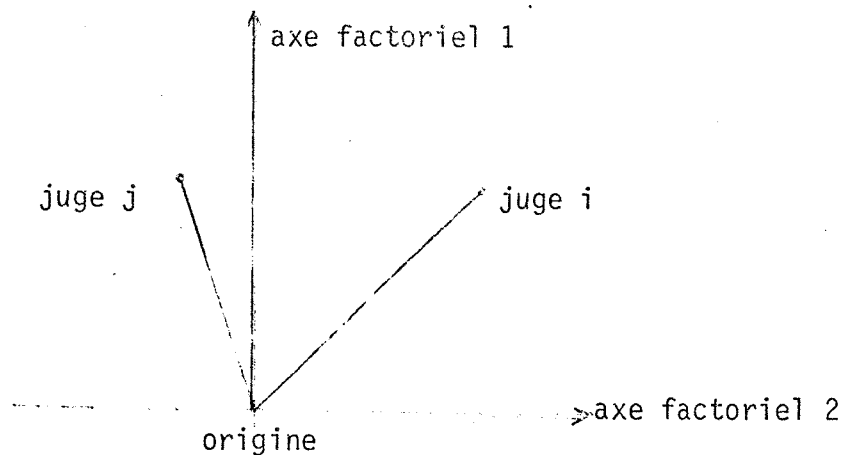
De même la seconde représentation plane, orthogonale à la première et définie par la projection des extrémités des vecteurs-images des individus, appelées nuage des individus, sur le second plan factoriel, lui-même défini par les axes factoriels 1 et 3, explique

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \quad \% \text{ de la variance.}$$

Cet ensemble de projections de la représentation canonique des juges sur les plans factoriels successifs, orthogonaux et ordonnés selon le pourcentage de variance expliquée visualise bien les proximités entre juges (d'autant mieux que le nombre de plans pris en compte est plus élevé).

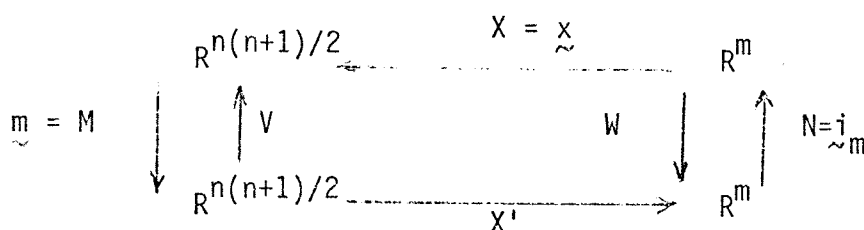
Cet ensemble est appelé l'inter-structure.

Visualisation, par exemple, du premier élément,  $(\underline{v}^1, \underline{v}^2)$ , de l'inter-structure :



2.3.2.6.2. Remarque

Dans le schéma proposé :





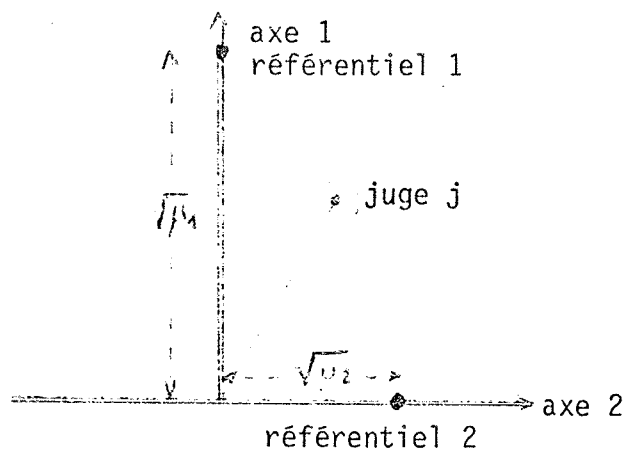
L'espace des juges est  $R^{n(n+1)/2}$ , et un juge  $y$  est représenté par  $\underline{x}^i$ ,  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\tilde{x}$ .

Par contre, dans l'inter-structure proposée les juges sont représentés dans  $R^m$ . Cela tient à l'utilisation de la factorisation canonique ; on peut toujours considérer que  $R^m \subset R^{n(n+1)/2}$ , ce qui est généralement vrai.

### 2.3.2.6.3. Positionnement des référentiels

Les référentiels  $\underline{r}^i$ , définis au § 2.2.1., sont des vecteurs de  $R^{n(n+1)/2}$ , calculés à partir des  $\underline{v}^i$  par  $\underline{r}^i = X \circ N(\underline{v}^i)$ ; Ceci signifie que  $\underline{v}^i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  référentiel dans  $R^m$ , comme il est  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre et que  $\underline{v}^{i'} \underline{v}^i = \mu_i$ , il est aisé de le positionner, sur le  $i^{\text{ème}}$  axe et à une distance  $\sqrt{\mu_i}$  de l'origine.

Par exemple, dans le premier élément de l'inter-structure :



### 2.3.2.7. Représentations canoniques des sujets

Le cube standard  $S$  donne pour chaque juge  $j$  la matrice  $\tilde{s}^j$  des proximités qu'il donne entre les  $n$  sujets.

Soit  $\{ \lambda_{ij}^j, \underline{v}_j^i ; i = 1, n \}$  l'ensemble des éléments propres de  $\tilde{s}^j$  tels que  $\underline{v}_j^{i'} \underline{v}_j^i = \lambda_{ij}^j$ .



La représentation canonique des sujets pour le  $j^{\text{ième}}$  juge est définie par :

$$\underline{\underline{\gamma}}_j = \left( \begin{array}{c|c|c} \gamma_{j1}^1 & \gamma_{j1}^2 & \dots & \gamma_{j1}^n \\ \hline \gamma_{j2}^1 & \gamma_{j2}^2 & \dots & \gamma_{j2}^n \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \gamma_{jn}^1 & \gamma_{jn}^2 & \dots & \gamma_{jn}^n \end{array} \right) : n \times n ;$$

la  $k^{\text{ième}}$  ligne de  $\underline{\underline{\gamma}}_j$ ,  $(\gamma_{jk}^1, \gamma_{jk}^2, \dots, \gamma_{jk}^m)$  représente les composantes du  $k^{\text{ième}}$  sujet dans  $R^n$  tandis que  $\underline{\underline{\gamma}}_j^i$  représente les composantes des  $n$  sujets sur le  $i^{\text{ème}}$  axe.

### 2.3.2.8. Intra-structures

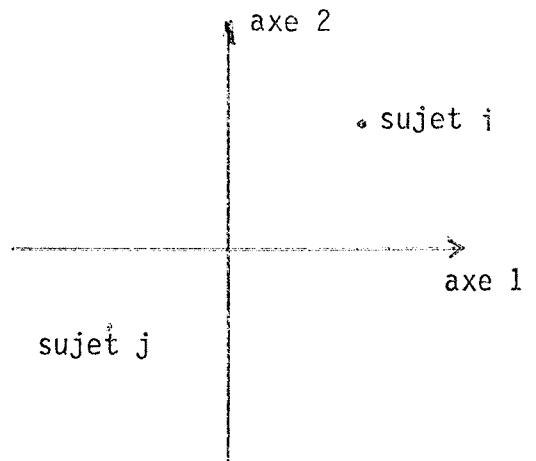
Pour tout juge,  $j$  ( $j=1,m$ ), considérons la représentation canonique  $\underline{\underline{\gamma}}_j = \left( \begin{array}{c|c|c} \gamma_{j1}^1 & \gamma_{j1}^2 & \dots & \gamma_{j1}^{p_j} \\ \hline \gamma_{j2}^1 & \gamma_{j2}^2 & \dots & \gamma_{j2}^{p_j} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \gamma_{jp_j}^1 & \gamma_{jp_j}^2 & \dots & \gamma_{jp_j}^{p_j} \end{array} \right)$  telle que  $\lambda_1^j \geq \lambda_2^j \geq \lambda_3^j \dots \dots \geq \lambda_{p_j}^j$ .

L'ensemble des réductions à  $R^2$  de la configuration des sujets dans  $R^m$ ,  $\left\{ \left( \begin{array}{c|c} \gamma_{j1}^1 & \gamma_{j1}^2 \\ \hline \gamma_{j2}^1 & \gamma_{j2}^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c} \gamma_{j1}^1 & \gamma_{j1}^3 \\ \hline \gamma_{j2}^1 & \gamma_{j2}^3 \end{array} \right), \dots \right\}$ , ordonnées, cf § 2.3.2.6., selon un pourcentage décroissant de variance expliquée, est appelé :

$j^{\text{ième}}$  intra-structure

Visualisation, par exemple, de  $\left( \begin{array}{c|c} \gamma_{j1}^1 & \gamma_{j1}^2 \\ \hline \gamma_{j2}^1 & \gamma_{j2}^2 \end{array} \right) :$

premier élément de la  $j^{\text{ième}}$  intra-structure



### 2.3.3. STRUCTURES ET OPERATEURS

#### 2.3.3.1. L'inter-structure, image de l'espace des opérateurs

Comme il est dit au § 2.3.2.4.4., la matrice  $e : m \times m$  factorisée pour obtenir l'inter-structure a pour élément  $i - j$





le produit scalaire entre les opérateurs  $U_x^i$  et  $U_x^j$  associés à des tableaux (inconnus si la donnée est une proximité originale)  $x^i$  et  $x^j$ , opérateurs ayant pour matrice associée  $\tilde{s}^i$  et  $\tilde{s}^j$ , éléments du cube standard  $S$ .

Par conséquent, la représentation canonique obtenue peut être regardée comme une représentation des  $m$  opérateurs  $U_x^i$  dans un espace contenant l'espace des opérateurs. Dans la base  $(\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \dots, \tilde{r}^p)$  de l'espace représenté, seul  $\tilde{r}^1$  appartient à l'espace des opérateurs  $U_x^i$  (voir § 2.7.4.)

De ce fait, par exemple, le cosinus de l'angle de deux vecteurs représentant des opérateurs (correspondant à des juges ou à des référentiels) est égal au coefficient RV entre ces deux opérateurs. Cette propriété reste vraie dans les plans de l'inter-structure lorsque deux opérateurs sont représentés par deux vecteurs dont les extrémités sont dans le même plan ; enfin ceci est vrai, que le cube standard, soit, ou ne soit pas, normalisé.

2.3.3.2. L'intra-structure  $i$ , image du spectre de l'opérateur  $U_x^i$

La matrice  $\tilde{s}^i$ , associée à  $U_x^i$ , factorisée canoniquement pour obtenir la  $i^{\text{ème}}$  représentation canonique des sujets fournit le spectre  $\{ \lambda_j^i, \tilde{y}_i^j ; j = 1, p_j \}$ .

Les axes  $(\tilde{y}_i^1, \tilde{y}_i^k)$  du plan  $1 - k$  de la  $i^{\text{ème}}$  intra-structure servent de repère pour la représentation des sujets dans  $R^2$  en même temps que

$$\frac{\lambda_i^1 + \lambda_i^k}{\sum_{j=1}^{p_j} \lambda_i^j}$$

donne le pourcentage de variance expliquée par ce plan, la variance étant



une mesure de la dispersion du nuage des sujets, dispersion qui ne dépend pas du repère, mais seulement des distances entre les sujets.

L'ensemble des plans formés par deux axes distincts et orthogonaux  $(\underline{y}_i^1, \underline{y}_i^k)$  visualise la configuration des sujets dans  $R^{p_j}$ , les axes-repère étant les vecteurs propres de  $\underline{s}_i^j$ . De plus les plans sont ordonnés selon le pourcentage de variance expliquée de sorte qu'on puisse obtenir une visualisation des sujets aussi précise qu'on le désire, avec le moins de plans possible.

#### 2.3.3.3. Relations entre inter et intra-structures

Deux juges confondus dans l'inter-structure, c'est-à-dire, pour lesquels  $d^2(U_{x^i}, U_{x^j}) = 0$ , correspondent, d'après l'équivalence 2 du § 2.3.4.4.4., à deux matrices  $\underline{s}_i^i$  et  $\underline{s}_j^j$  qui ont mêmes éléments propres, ce qui signifie que les intra-structures  $i$  et  $j$  sont identiques. Autrement dit, les distances entre les sujets sont les mêmes, calculées à partir de  $\underline{s}_i^i$  ou à partir de  $\underline{s}_j^j$ , ou bien, lorsque  $\underline{x}_i^i$  et  $\underline{x}_j^j$  sont connus, les analyses en composantes principales de ces tableaux sont équivalentes.

C'est en ce sens, distances entre sujets voisines dans l'intra-structure, qu'il faut interpréter la proximité de deux juges dans l'inter-structure.

#### 2.3.4. STRUCTURES ET NORMALISATION

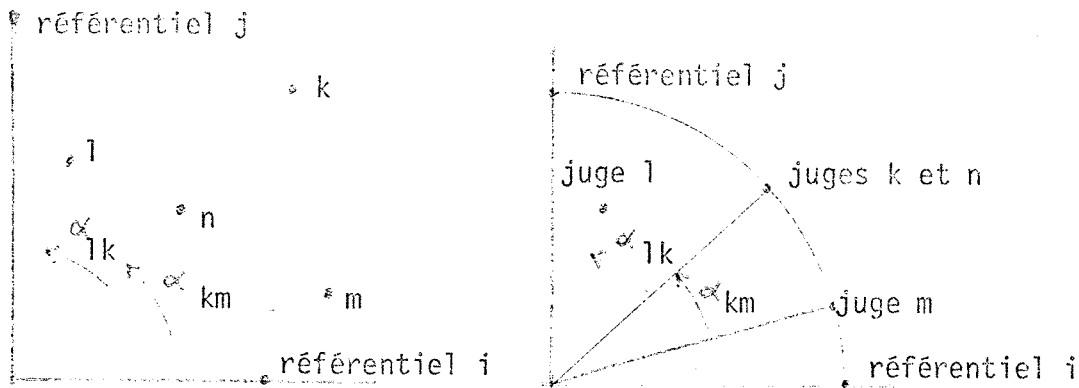
##### 2.3.4.1. Effet de la normalisation sur l'inter-structure

Lorsque le cube standard est normalisé, Cf § 2.3.2.4.4.3.,  $\underline{e}$  est alors la matrice des coefficients RV entre les opérateurs  $U_{x^i}$  ( $i = 1, m$ ). Deux juges qui appartiennent au plan  $i - j$  de



L'inter-structure se trouvent sur le cercle de centre, l'origine, et de rayon unité.

Les référentiels i et j, normalisés, sont sur ce cercle.



Avant normalisation

Après normalisation

La proximité de deux juges sur le cercle, k & m, est exactement représentée. La proximité de deux juges ne se trouvant pas sur le cercle n'est pas correctement représentée :

$$\cos \alpha_{km} = RV(\tilde{x}^k, \tilde{x}^m)$$

$$\cos \alpha_{1k} \neq RV(\tilde{x}^1, \tilde{x}^k)$$

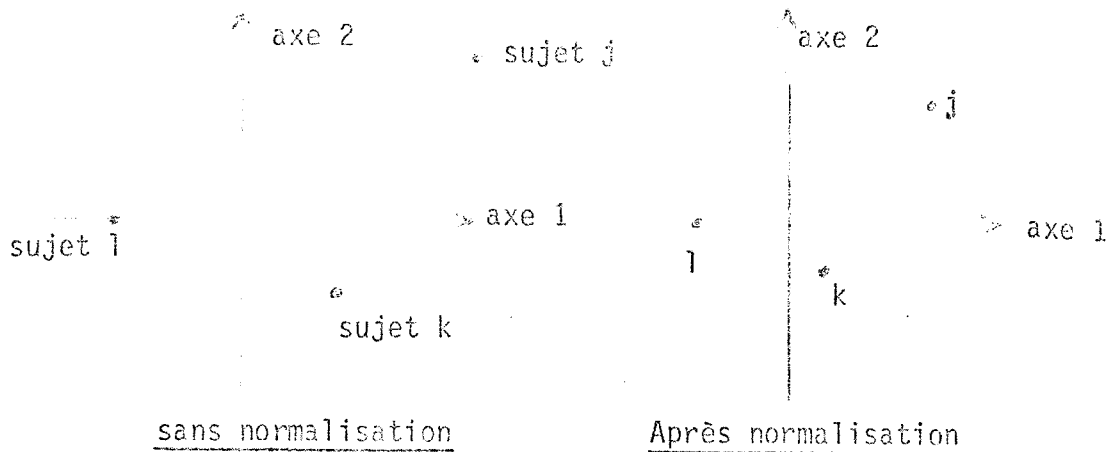
Nota : Les plans de l'interstructure sont analogues à des cercles de corrélations.

#### 2.3.4.3. Effet de la normalisation sur l'intra-structure

Les factorisations de  $\tilde{s}^i$  et de  $\tilde{s}^i / \|\tilde{s}^i\|$  fournissent deux représentations canoniques homothétiques (homothétie de centre l'origine et de facteur  $\sqrt{\|\tilde{s}^i\|}$ ).



Premier plan de l'intra-structure :



Ceci montre que deux juges colinéaires dans l'inter-structure fournissent deux intra-structures homothétiques.

## 2.4 COMPARAISON DES STRUCTURES

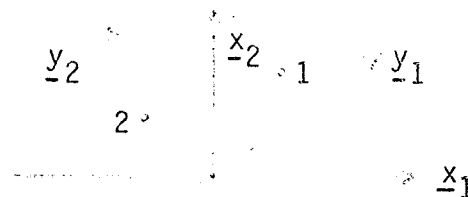
### 2.4.1. EXPOSE DU PROBLEME

Chaque matrice du cube standard  $S = \{s^i : n \times n ; i = 1, m\}$  factorisée canoniquement fournit  $m$  représentations canoniques des sujets :  $\{\delta^i : n \times p_i ; i = 1, m\}$  dans  $R^{p_i}$ .

Chaque représentation est décrite dans un système d'axes orthogonaux différents.

On se propose de comparer deux configurations  $N^k$  ( $k^{\text{ième}}$  nuage) et  $N^j$  autrement qu'en superposant les axes respectifs de chaque repère car, comme on va le voir sur un exemple, cela ne constitue pas une bonne comparaison.

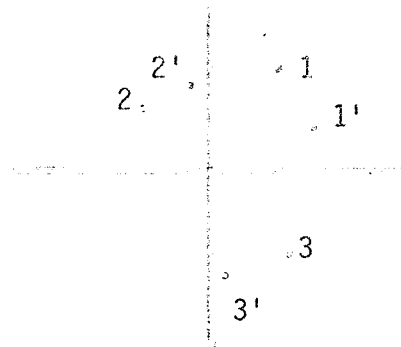
Supposons, dans  $R^2$ , trois sujets dans deux repères orthogonaux







La superposition des axes amène à comparer deux nuages différents :



alors qu'ils sont en fait identiques dans  $R^2$ .

#### 2.4.2. SOLUTION PROPOSEE

Soit  $\underline{x}$  :  $n \times p$  une configuration de  $n$  sujets dans  $R^p$  rapportée à la base canonique  $\underline{e} = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p)$  ; le sujet  $i$  est représenté par :

$$\underline{x}_i \underline{e} = \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j.$$

Soit  $\underline{f} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_q)$  une base canonique de  $R^q$ . On cherche l'expression  $\underline{z}_i \underline{f}$  du  $i^{\text{ème}}$  sujet dans  $R^q$  qui rend minimum la quantité :

$$\| \underline{z}_i \underline{f} - \underline{x}_i \underline{e} \|^2 \quad (p \leq q \leq n)$$

Cette dernière s'écrit :

$$\langle \underline{z}_i \underline{f} - \underline{x}_i \underline{e}, \underline{z}_i \underline{f} - \underline{x}_i \underline{e} \rangle \quad \text{ce qui, en développant, donne :}$$

$$\langle \sum_{j=1}^q z_{ij} \underline{f}_j - \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j, \sum_{j=1}^q z_{ij} \underline{f}_j - \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j \rangle =$$

$$\langle \sum_{j=1}^q z_{ij} \underline{f}_j, \sum_{j=1}^q z_{ij} \underline{f}_j \rangle - 2 \langle \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j, \sum_{j=1}^q z_{ij} \underline{f}_j \rangle +$$

$$\langle \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j, \sum_{j=1}^p x_{ij} \underline{e}_j \rangle =$$



$$\sum_{j_2=1}^q z_{ij_2}^2 \langle \underline{f}_{j_2}, \underline{f}_{j_2} \rangle - 2 \sum_{j_1=1}^p \sum_{j_2=1}^q x_{ij_1} z_{ij_2} \langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle +$$

$$\sum_{j_1=1}^p x_{ij_1}^2 \langle \underline{e}_{j_1}, \underline{e}_{j_1} \rangle$$

Dérivons par rapport à  $z_{ij_2}$  :

$$2 z_{ij_2} \langle \underline{f}_{j_2}, \underline{f}_{j_2} \rangle - 2 \sum_{j_1=1}^p x_{ij_1} \langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle$$

et annulons la dérivée. Alors :

$$z_{ij_2} = \frac{\sum_{j_1=1}^p x_{ij_1} \langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle}{\langle \underline{f}_{j_2}, \underline{f}_{j_2} \rangle}$$

Dans l'espace des sujets, c'est-à-dire, dans  $R^n$ ,  $\langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle =$  corrélation  $(\underline{x}_{j_1}, \underline{z}_{j_2})$  tandis que  $\langle \underline{f}_{j_2}, \underline{f}_{j_2} \rangle = 1$ .

Par conséquent, la matrice d'élément  $j_1 - j_2$ ,  $\langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle$ , est identique à la matrice ayant pour élément  $j_1 - j_2$  :

$$\frac{\text{COV}(\underline{x}_{j_1}, \underline{z}_{j_2})}{\sqrt{\text{VAR}(\underline{z}_{j_2}) \text{VAR}(\underline{x}_{j_1})}}$$

Pour tout sujet  $i$  on a : ( $i = 1, n$ )

$$\underline{z}_i = \underline{x}_i \underset{\sim}{\sigma}_{11}^{-1/2} \underset{\sim}{\sigma}_{12} \underset{\sim}{\sigma}_{22}^{-1/2}$$

en posant :

$$\underset{\sim}{\sigma}_{11} = \text{diag} [ \text{VAR}(\underline{x}_{j_1}) ; j_1 = 1, p ]$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_{22} = \text{diag} [ \text{VAR}(\underline{z}_{j_2}) ; j_2 = 1, q ]$$

$$\left[ \underset{\sim}{\sigma}_{12} \right]_{j_1 j_2} = \langle \underline{e}_{j_1}, \underline{f}_{j_2} \rangle$$



La configuration  $\underline{z} : n \times q$  (des  $n$  sujets dans  $R^q$ ) la plus proche de la configuration  $\underline{x}_{n \times p}$  est donnée par :

$$\underline{z} = \underline{x} \begin{matrix} -1/2 \\ \underline{\sigma}_{11} \\ -1/2 \end{matrix} \begin{matrix} -1/2 \\ \underline{\sigma}_{12} \\ \underline{\sigma}_{22} \end{matrix} \quad \text{ou bien} \quad \underline{z}' = \begin{matrix} -1/2 \\ \underline{\sigma}_{22} \\ -1/2 \end{matrix} \begin{matrix} -1/2 \\ \underline{\sigma}_{21} \\ \underline{\sigma}_{11} \end{matrix} \underline{x}'$$

## 2.5. ANALYSE DES DIFFERENCES

### 2.5.1. IDEES GENERALES DES METHODES D'ANALYSE CONJOINTE (1 & 5)

Disposant de deux populations,

- de sujets sur lesquels est définie une proximité,
- de juges qui définissent cette proximité,

On fait l'hypothèse qu'il existe un "juge de référence" par rapport à qui l'analyse des différences, dans les proximités données, est intéressante pour la compréhension de chaque jugement (i.e. : matrice de proximité d'un juge). En général, ce juge de référence n'appartient pas à la population des juges donnée mais son jugement est construit à partir des jugements de chacun des juges. (Le cas d'une matrice de référence a priori est exclu ici). Cette non appartenance est traduite par les termes de "matrice (de jugement) hypothétique".

### 2.5.2. DEFINITIONS DE LA MATRICE DE REFERENCE

#### 2.5.2.1. Définition 1

Etant donné le cube standard  $S = \{ \underline{s}^i : n \times n ; i = 1, m \}$  et le premier vecteur propre  $\underline{v}^1$  de  $\underline{e}$ ,  $m \times m$ , d'élément  $i - j$  valant  $\text{Trace}(\underline{s}^i \underline{s}^j)$ , la matrice de référence proposée est :

$$\underline{r}^1 = \sum_{i=1}^m \underline{v}^1_i \underline{s}^i$$

où  $\underline{v}^1_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\underline{v}^1$ .



2.5.2.2. Définition 2

Etant donné le 1er vecteur référentiel,  $\underline{r}^1$  défini en 2.2.1., la matrice de référence  $\underline{r}^1$  est la matrice qui donne  $\underline{r}^1$  par l'application  $j_{1k}$  :

$$(\underline{r}^1)_{j_{1k}} = (\underline{r}^1)_{1k} \text{ et } j_{1k} = \frac{1}{2}(l+1) + k ; l = 1, n ; k \leq l.$$

2.5.3. PROPRIETES DE LA MATRICE DE REFERENCE

2.5.3.1. Equivalence des définitions 2.5.2.1. et 2.5.2.2.

Cf § 2.1.1. :  $\underline{r}^1 = \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{i}} \underline{x}^i$  ①

Cf § 2.1.2. :  $(\underline{x}^i)_{j_{1k}} = (\underline{s}^i)_{1k}$  ②

D'où  $\forall l, k : l = 1, n ; k \leq l :$

$$(\underline{r}^1)_{j_{kl}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{i}} (\underline{x}^i)_{j_{1k}} \stackrel{\textcircled{2}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{i}} (\underline{s}^i)_{1k} \text{ , c'est-à-dire :}$$

$$(\underline{r}^1)_{j_{1k}} = (\underline{r}^1)_{1k} \text{ , } \forall l, k ; l = 1, n ; k \leq l.$$

2.5.3.2. Propriété d'optimalité

$\underline{r}^1$  maximise  $\sum_{i=1}^m [\langle \underline{s}^i, \underline{r}^1 \rangle]^2$  parmi toute  $\underline{r}$  de la forme  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{s}^i$ , sous la contrainte  $\underline{\alpha}' \underline{\alpha} = \text{constante}$ , le maximum étant  $\mu_1^2$  pour  $\underline{\alpha}' \underline{\alpha} = 1$ .





La démonstration est analogue à celle du § 2.2.2.2. , le produit scalaire étant celui qui permet le calcul de  $\underline{e}$ , c'est-à-dire : Trace sur  $S(\mathbb{R}^n)$  .

2.5.3.3. Remarque

$\underline{r}^1$  est "matrice propre" de l'opérateur VoM du schéma naturel , § 2.1.5. .

Le terme "matrice propre" possède déjà un sens en algèbre , aussi devrait-on trouver un autre mot pour désigner le concept introduit ici.

2.5.3.4.  $\underline{r}^1$  est définie positive

Preuve : 1/Cf § 2.3.2.4.4.5. ,  $\underline{e}$  est définie positive ; d'autre part,  $\underline{e}$  est à éléments positifs puisque  $\forall i = 1, \bar{m}$  ,  $\forall j = 1, m$  : Trace  $(\underline{s}^i \underline{s}^j) \geq 0$  ; par conséquent, le premier vecteur propre  $\underline{v}^1$ , tel que  $\underline{v}^1 \underline{v}^1 = 1$ , maximise:

$$\underline{v}^1 \underline{e} \underline{v}^1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m e_{ij} \underline{v}_i^1 \underline{v}_j^1 \quad (\text{le maximum étant } \lambda_1 \text{ correspondant à } \underline{v}^1)$$

Supposons qu'il y ait des  $\underline{v}_i^1$  négatifs ; alors,

$$\underline{v}^1 \underline{e} \underline{v}^1 = \sum_{\substack{i,j \\ \underline{v}_i^1 \underline{v}_j^1 \geq 0}} e_{ij} \underline{v}_i^1 \underline{v}_j^1 + \sum_{\substack{i,j \\ \underline{v}_i^1 \underline{v}_j^1 < 0}} e_{ij} \underline{v}_i^1 \underline{v}_j^1$$

Si on change tous les signes - en + , pour les  $\underline{v}_i^j$  négatifs,  $\underline{v}^1 \underline{e} \underline{v}^1$  augmente, ce qui contredit la proposition précédente, à savoir que  $\underline{v}^1$  maximise  $\underline{v}^1 \underline{e} \underline{v}^1$  .

2) - Puisque  $\underline{s}^i \in S$  , cube de matrices de produits scalaires défini- positives et que  $\underline{v}_i^1 \geq 0$ , pour  $i = 1, m$  , on en déduit



que :  $\tilde{r}^1 = \sum_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{i}} s^i$  est définie positive.

Ce résultat assure la qualité des analyses faites en se servant du premier référentiel comme juge hypothétique puisque :  $\tilde{r}^1$  se factorise exactement.

#### 2.5.4. INTRA-STRUCTURE DE REFERENCE

La factorisation canonique de  $\tilde{r}^1$  :

$$\tilde{r}^1 = \tilde{\alpha} \tilde{\alpha}'$$

( $\tilde{\alpha}$  telle que  $\tilde{\alpha}' \tilde{\alpha} = \text{diag.} (p_1, p_2, \dots, p_n)$   
et  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ ).

donne la représentation canonique de référence  $\tilde{\alpha}$  à partir de laquelle on obtient l'intra-structure de référence, ensemble des projections sur les plans factoriels (définis par deux axes factoriels  $\tilde{\alpha}^i$  et  $\tilde{\alpha}^j$ ), ordonnés selon le pourcentage  $\frac{p_i + p_j}{\sum_{k=1}^n p_k}$  de variance expliquée.

#### 2.5.5. ANALYSE DES DIFFERENCES

##### 2.5.5.1. Calcul des différences

Chacune des représentations canoniques des sujets  $\tilde{y}_j$  définie au § 2.3.2.7., est exprimée dans le repère de la représentation de référence, appelé repère référentiel.

Il suffit d'appliquer le résultat du paragraphe 2.4.2. en posant successivement pour tout  $j = 1, m$  et tout  $i = 1, n$  :

$$\tilde{y}_{ji} = (\tilde{y}_{ji}^1, \tilde{y}_{ji}^2, \dots, \tilde{y}_{ji}^m) \quad (\text{i.e. : } i^{\text{ème}} \text{ ligne de } \tilde{y}_j)$$

$$\tilde{\sigma}_{22}^{-1} = (\tilde{\alpha}' \tilde{\alpha})^{-1} = \text{diag.} (1/p_1, 1/p_2, \dots, 1/p_n)$$



$$\hat{\sigma}_{21} = \hat{\alpha} \cdot \hat{\gamma}$$

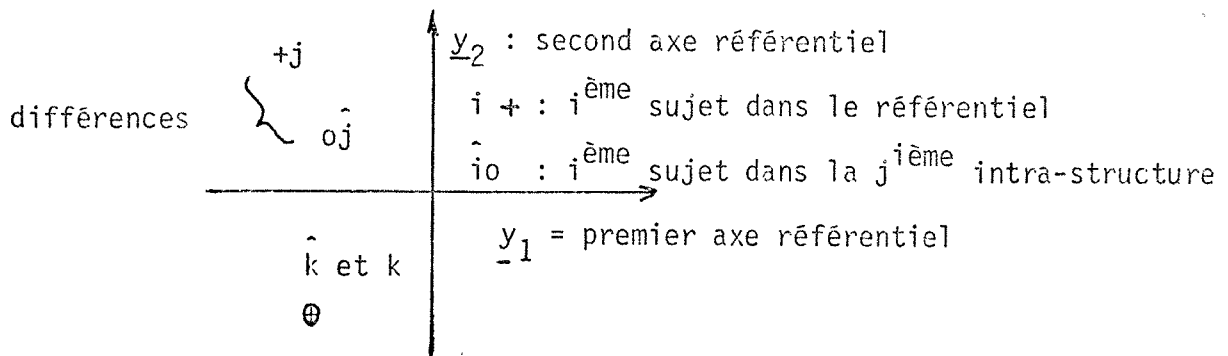
d'où :  $\forall j = 1, m, \forall i = 1, n : \hat{\alpha}_i = (\hat{\alpha}_{ji}^1, \hat{\alpha}_{ji}^2, \dots, \hat{\alpha}_{ji}^m)$

2.5.5.2. Visualisation des différences

De la représentation canonique  $\hat{\alpha}_j$  (matrice ayant pour  $i^{\text{ème}}$  ligne  $(\hat{\alpha}_{ji}^1, \hat{\alpha}_{ji}^2, \dots, \hat{\alpha}_{ji}^m)$ , on extrait les plans  $(\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^2), (\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^3), \dots, \text{etc...}$  de la  $j^{\text{ème}}$  intra-structure, rapportée au repère référentiel ( $j = 1, m$ ). On visualise simultanément autant de couples de plans qu'il est nécessaire pour expliquer un pourcentage de variance fixé d'avance :

$(\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^2)$  et  $(\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^2)$  puis  $(\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^2)$  et  $(\hat{\alpha}_j^1, \hat{\alpha}_j^2) \dots$

On obtient, par exemple pour le premier couple :



Ainsi, les différences de positionnement sont visualisées et les pourcentages de variance expliquée par chaque axe, soit  $v_i$  pour le nuage de référence et  $v_i^j$  pour le nuage du  $j^{\text{ème}}$  juge, fournissent une indication sur la pondération globale et relative des axes par le  $j^{\text{ème}}$  juge :

pois donné par le  $j^{\text{ème}}$  juge à l'axe  $i$  :  $\frac{v_i^j}{v_i}$

(indication approximative).



2.5.5.3. Mesure de la qualité des représentations

2.5.5.3.1. Le coefficient RV

Les projections des nuages dans le repère référentiel introduisent des distorsions quant aux distances entre sujets visualisées.

$$\begin{aligned} \text{Or, } RV(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}_j) &= \frac{\text{Trace}(\underline{\alpha}\underline{\alpha}' \underline{\gamma}_j \underline{\gamma}_j')}{\|\underline{\alpha}\underline{\alpha}'\| \|\underline{\gamma}_j \underline{\gamma}_j'\|} \\ &= \frac{\text{Trace}(\underline{\gamma}_j' \underline{\alpha}\underline{\alpha}' \underline{\gamma}_j)}{\|\underline{r}^1\| \|\underline{s}^j\|} = \frac{\text{Trace}(\underline{\sigma}'_{21} \underline{\sigma}_{21})}{\|\underline{r}^1\| \|\underline{s}^j\|} \end{aligned}$$

Le coefficient RV n'indique pas directement le pourcentage de variance expliqué après projection : on peut très bien avoir pour la  $j^{\text{ième}}$  intra-structure :

$$\begin{aligned} v_j &= \text{pourcentage avant et après projection, et simultanément} \\ RV(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}_j) &\neq 1 \end{aligned}$$

Cela tient au fait que le coefficient RV mesure (par rapport à l'intra-structure de référence) non seulement une variation dans la disposition des sujets décrits dans l'intra-structure, mais aussi une variation dans l'orientation des axes de l'intra-structure.

Dans la mesure où  $\underline{\sigma}_{21}$  détermine la projection, le coefficient RV entre l'intra-structure de référence,  $\underline{\alpha}$ , et l'intra-structure  $j$ ,  $\underline{\gamma}_j$ , donne une indication globale de la distorsion due à la projection.

Remarquons que  $RV(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}_j) = 1$  lorsque :

1 - soit  $\underline{x} = \underline{y}$ , c'est-à-dire,  $\underline{\alpha} = \underline{\gamma}_j$ , d'où, puisqu'alors

$$\underline{\sigma}_{21} = \text{diag.} (p_1, p_2, \dots, p_n)$$





$$\underline{\underline{G}}_{22}^{-1} \underline{\underline{G}}_{21} = \underline{\underline{i}}_n \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\alpha}}'_j = \underline{\underline{Y}}_j$$

2 - soit  $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{y}}$  à une <sup>rotation orthogonale</sup> permutation circulaire près des axes, car alors, il existe  $\underline{\underline{k}} : n \times n$ , telle que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{k}}\underline{\underline{k}}' &= \underline{\underline{i}}_n \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\alpha}}'_k = \underline{\underline{Y}}_j \quad \text{d'où} \quad \|\underline{\underline{\sigma}}_{21}\|^2 = \text{Trace} (\underline{\underline{G}}'_{21} \underline{\underline{G}}_{21}) \\ &= \text{Trace} (\underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{\alpha}}' \underline{\underline{Y}}_j \underline{\underline{Y}}'_j) = \text{Trace} (\underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{\alpha}}' \underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{k}}\underline{\underline{k}}' \underline{\underline{\alpha}}') = \text{Trace} [(\underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}}')^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \|\underline{\underline{r}}^1\| &= \sqrt{\text{Trace} [(\underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}}')^2]} = \sqrt{\text{Trace} [(\underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{k}}\underline{\underline{k}}' \underline{\underline{\alpha}}')^2]} \\ &= \sqrt{\text{Trace} [(\underline{\underline{Y}}_j \underline{\underline{Y}}'_j)^2]} = \|\underline{\underline{s}}^j\| : \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \text{RV} (\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{Y}}_j) = \frac{\text{Trace} [(\underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}}')^2]}{\text{Trace} [(\underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}}')^2]} = 1 .$$

Enfin, pour que  $\text{RV} (\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{Y}}_j) = 0$ , il faut :

1 - soit  $\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{0}}$  (ce qui implique  $\underline{\underline{s}}^j = \underline{\underline{0}}$ ,  $\forall j = 1, m$  car alors  $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{v}}^1 = \underline{\underline{0}}$  et  $\underline{\underline{r}}^1 = \underline{\underline{0}}$ ).

2 - soit  $\underline{\underline{Y}}_j = \underline{\underline{0}}$

Dans les deux cas, l'analyse des différences est sans intérêt.

#### 2.5.5.3.2. Calcul du pourcentage de variance visualisée

Une indication plus précise de la distorsion est fournie en recalculant le pourcentage de variance expliqué par chaque plan de l'intra-structure après projection.



2.6 ANALYSE DE L'EVOLUTION

=====

2.6.1. DONNEES CONCERNEES

Lorsque l'indice  $i$  du cube standard  $S = \{ \underline{s}^i : n \times n ; i = 1, m \}$  est un indice d'instant, c'est-à-dire, lorsque  $\underline{s}^i$  représentent un même juge à des moments différents, S est dit chronologique et l'analyse proposée ci-dessous est applicable.

2.6.2. ANALYSE DE L'EVOLUTION

2.6.2.1. Calcul des intra-structures

Chaque représentation canonique  $\underline{\xi}_j$  ( $j = 1, m$ ) est d'abord exprimée dans le repère référentiel comme il est fait au § 2.5.5.1. .

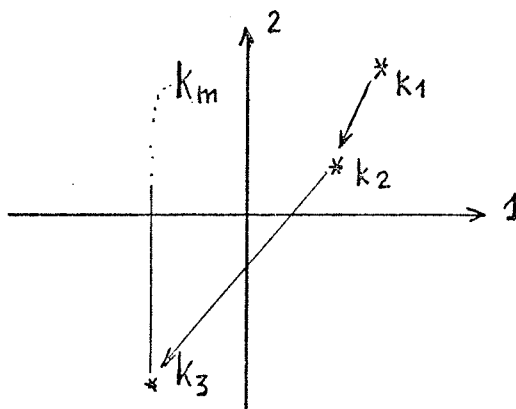
Soient  $\hat{\underline{\alpha}}_j : n \times n$  les représentations canoniques des sujets dans  $R^n$  rapportées au même repère.

2.6.2.2. Visualisation de l'évolution

Les plans  $(i - k)$  pris dans l'ordre correspondant à l'ordre de pourcentage décroissant de variance expliquée, de toutes les intra-structures,

$\{ (\hat{\underline{\alpha}}_j^i, \hat{\underline{\alpha}}_j^k) ; j = 1, m \}$  sont simultanément visualisés

en commençant par ceux qui expliquent le plus de variance et en nombre suffisant pour expliquer un pourcentage fixé de variance :



Par exemple, dans

$\{ (\hat{\underline{\alpha}}_j^1, \hat{\underline{\alpha}}_j^2) ; j = 1, m \}$

positionnement du sujet  $k$  noté  $k_j$ .

Est donné ensuite le pourcentage de variance expliquée par chaque



axe pour les différentes configurations.

### 2.6.2.3. Mesure de la qualité des représentations

Comme au § 2.5.2.3. , les coefficients RV  $(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}_j)$  ;  $j = 1, m$  donnent, pour chaque représentation canonique une indication de la distorsion. La répartition de cette distorsion selon les plans est donnée par les pourcentages de variance expliquée par les axes définissant ces plans, c'est-à-dire, pourcentage de la variance visualisée.

### 2.7.1. AUTRES MATRICES DE REFERENCE

La définition 2.5.2.1. (ou 2.5.2.2.) peut être généralisée :

Etant donné  $\{ \underline{\mu}^i, \underline{\nu}^i ; i = 1, m \}$  le spectre de  $\underline{e} : m \times m$  d'élément  $e_{ij} = \text{Trace} (\underline{s}^i \underline{s}^j)$  où  $\underline{s}^i \in S = \{ \underline{s}^i : n \times n ; i = 1, m \}$ .

Une  $k^{\text{ième}}$  matrice de référence ( $k = 1, m$ ) peut être définie par :

$$\underline{r}^k = \sum_{i=1}^m \nu_i^k \underline{s}^i$$

Toutes ces matrices  $\underline{r}^k$  ;  $k = 1, m$  vérifient :

1 - La propriété d'optimalité du § 2.5.3.2. , les maximums étant  $\mu_k^2$  respectivement.

2 -  $\underline{r}^k$  est "matrice propre" de VoM dans le schéma "naturel" 2.1.5..

Par contre, la propriété de défini-positivité 2.5.3.4. n'est assurée que pour  $k = 1$ , ce qui enlève quelque peu d'intérêt à ces matrices de référence  $\underline{r}^2, \dots, \underline{r}^m$  pour les analyses des différences ou de l'évolution car pour ces analyses,  $\underline{r}^k$  ;  $k = 2, m$  , doivent être rendues défini-positives ce qui a pour conséquence, outre l'approximation, que la propriété d'opti-



malité n'est plus vérifiée par ces approximations  $\hat{r}^k$  ; on a seulement :

$$0 \leq \sum_{i=1}^m [ \hat{s}^i , \hat{r}^k ]^2 \leq \mu_k^2$$

De plus,  $\hat{r}^k$  ne sont plus "matrices propres" et donc il n'est plus possible de les positionner dans l'inter-structure comme il est indiqué au § 2.3.2.6.3.. Il faudrait faire appel à la technique décrite dans 13 , pages 582-585 pour réaliser correctement ce positionnement.

### 2.7.2. AUTRES STRUCTURES

Les structures (inter ou intra) proposées découlent des choix essentiels suivants :

- 1 - Des métriques M et N dans le schéma de dualité proposé.
- 2 - De l'usage de la factorisation canonique.

### 2.7.3. TABLEAUX A Q INDICES, Q > 3

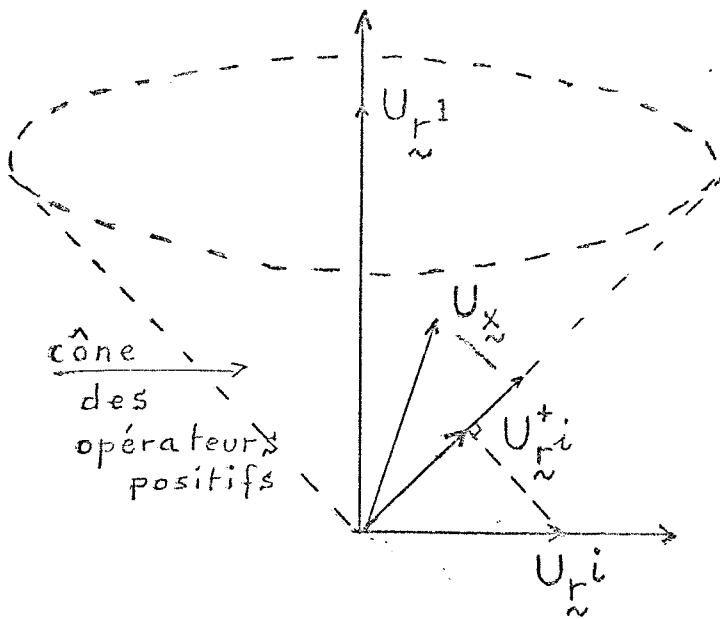
Lorsque  $q = 4$ , la donnée est un ensemble de cubes  $H = \{ S_1 , \dots , S_p \}$  ; un juge est un cube tandis qu'un sujet est une matrice de produits scalaires entre matrices de proximités.

L'inter-structure visualise les cubes  $S_1 , \dots , S_p$  , tandis que les intra-structures sont les interstructures issues de chacun des cubes.





2.7.4. ANALYSES COMPLEMENTAIRES



Notons  $U_{\tilde{r}^i}$  ;  $i = 1, m$ , les opérateurs associés aux référentiels  $\tilde{r}^i$  ; soit  $U_{\tilde{r}^i}^+$  l'opérateur associé à la matrice  $\tilde{r}^{+i}$  définie positive la plus proche de  $\tilde{r}^i$  au sens des moindres carrés généralisés, c'est-à-dire, qui réalise :

$$\begin{cases} \min : \text{Trace} [ (\tilde{r}^i - \tilde{x})^2 ] \\ \tilde{V}_x \text{ défini positive.} \end{cases}$$

L'opérateur  $U_{\tilde{r}^i}^+$  est donc l'opérateur  $U_{\tilde{x}}$  qui rend  $\|U_{\tilde{r}^i} - U_{\tilde{x}}\|^2$  minimum parmi les  $U_{\tilde{x}}$  tels que  $\|U_{\tilde{x}}\|^2 = \text{constante}$ .  $U_{\tilde{r}^i}^+$  est donc la projection de  $U_{\tilde{r}^i}$  sur le cône des opérateurs  $U_{\tilde{x}}$  tel que  $\tilde{x}$  soit définie positive.

Dans la mesure où  $\text{Trace} (\tilde{r}^i - \tilde{r}^{i+})^2$  est voisin de zéro, puisqu'il existe un tableau de données réel de référence  $i$  associée à  $\tilde{r}^{i+}$ , il peut être intéressant de compléter les analyses (de différences ou d'évolution) faites à l'aide de  $\tilde{r}^1$  par les analyses faites avec  $\tilde{r}^{i+}$ ,  $i = 2, m$ , au moins pour les matrices  $\tilde{s}^i$  voisines de ces projections.



### 3 - COMPARAISONS

---

#### 3.1 METHODE DE L.R. TÜCKER =====

##### 3.1.1. PRESENTATION

Il s'agit d'une méthode d'analyse conjointe, proposée en 1972, décrite dans 21, et dont voici l'essentiel : la donnée à analyser est un cube de proximités entre  $n$  sujets,  $C. = \{ \underset{\sim}{a}^i : n \times n ; i = 1, m \}$ , fournies par  $m$  juges.

Si  $\underset{\sim}{x} : n \times p$  désigne une représentation des sujets dans  $R^p$ , Tücker cherche  $\underset{\sim}{x}$  et,  $\forall i = 1, m$ , une forme quadratique définie positive (non nécessairement diagonale)  $q^i$  telles que :

$$\forall i = 1, m : \underset{\sim}{a}^i = \underset{\sim}{x} \underset{\sim}{q}^i \underset{\sim}{x}'$$

Sa solution, algébrique, est la suivante :

1 - Pour tout  $i = 1, m$ , on écrit  $\underset{\sim}{a}^i$  sous la forme :

$$\underset{\sim}{a}^i \approx (\underset{\sim}{\gamma}^i \underset{\sim}{\lambda}_i) (\underset{\sim}{\gamma}^i \underset{\sim}{\lambda}_i)'$$

où  $\underset{\sim}{\gamma}^i$  sont les vecteurs propres rangés en colonne et  $\underset{\sim}{\lambda}_i$  la matrice diagonale des valeurs propres rangées dans l'ordre des vecteurs correspondants;  $r_i$  étant le nombre de ses valeurs propres positives, on a :  $\underset{\sim}{\gamma}^i : n \times r_i$ .



2 - On crée la matrice  $\underline{a} = (\underline{\gamma}^1 \underline{\lambda}_1 \mid \dots \mid \underline{\gamma}^m \underline{\lambda}_m)$   
 $: n \times (\sum_{i=1}^m r_i)$ , de rang p tel que :

$$\max_{i=1,m} r_i \leq p \leq n$$

qui est décomposée en  $\underline{a} = \underline{x} \underline{c}'$  tels que :

$$\underline{x}' \underline{x} = \underline{i}_p ; \quad \underline{x} : n \times p \quad \& \quad \underline{c} : (\sum_{i=1}^m r_i) \times p .$$

Ce qui donne  $\underline{x}$  et  $\underline{c}$  (qui sont de rang p).

3 - En posant  $\underline{c}' = (\underline{c}^1 \mid \dots \mid \underline{c}^m)$  il vient :

$$\underline{a} = (\underline{\gamma}^1 \underline{\lambda}_1 \mid \dots \mid \underline{\gamma}^m \underline{\lambda}_m) = (\underline{x} \underline{c}^1 \mid \dots \mid \underline{x} \underline{c}^m) .$$

On identifie,  $\forall i = 1, m : \underline{\gamma}^i \underline{\lambda}_i \equiv \underline{x} \underline{c}^i$  d'où :

$$\underline{a}^i = (\underline{\gamma}^i \underline{\lambda}_i) (\underline{\gamma}^i \underline{\lambda}_i)' = \underline{x} \underline{c}^i \underline{c}^i \underline{x}' = \underline{x} \underline{q}^i \underline{x}'$$

ce qui donne  $\underline{q}^i = \underline{c}^i \underline{c}^i$  .

### 3.1.2. COMPARAISON AVEC S.T.A.T.I.S.

#### 3.1.2.1. Inter-structure

Elle n'est pas recherchée par L.R. Tucker.

#### 3.1.2.2. Intra-structure de référence

$\underline{x} : n \times p$ .

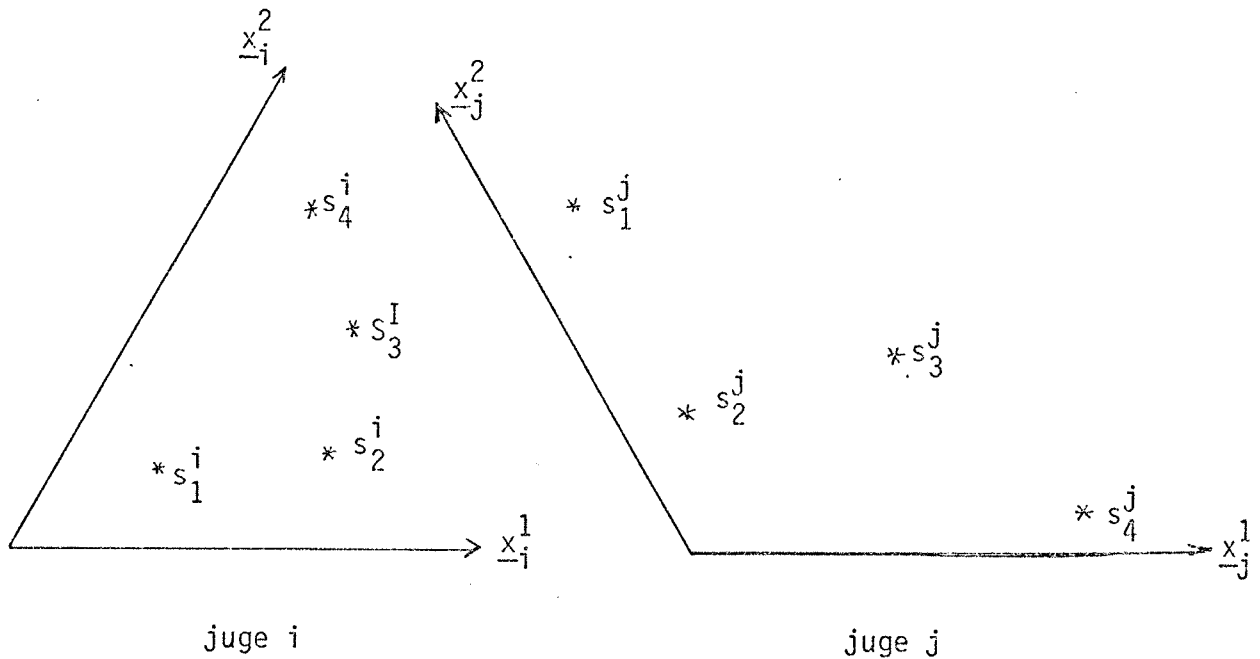
Soit  $(\underline{x}^j, \underline{x}^k)$ , la réduction à  $R^2$  qui explique le plus de variance de la configuration dans  $R^p$  ; rien n'assure que ce pourcentage de variance expliquée soit optimal.



### 3.1.2.3. Analyse des différences

Les différences analysées sur les intra-structures  $\underline{x}_i^1$  et  $\underline{x}_j^1$  ( $i \neq j$ ) sont les différences de pondération (un poids nul équivaut à la réduction de 1 de la dimension de l'espace) ainsi que les différences de rotation des axes de l'espace de référence.

A cause des rotations, les repères des intra-structures  $i$  et  $j$  ne sont plus orthogonaux et ceci est un inconvénient : en effet, la comparaison de deux configurations des mêmes sujets qui sont repérées de manière différente n'est pas aisée :



### 3.1.2.4. Analyse de l'évolution

non envisagée par l'auteur.





3.1.2.5. Exemple  $\{ \tilde{a}_i : 4 \times 4 ; i = 1,4 \}$

$\tilde{a}_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$
$A_1$	2			
$B_1$	0	2		
$C_1$	-2	0	2	
$D_1$	0	-2	0	2
=====				
$\tilde{a}_2$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$D_2$
$A_2$	5			
$B_2$	3	5		
$C_2$	-5	-3	5	
$D_2$	-3	-5	3	5
=====				
$\tilde{a}_3$	$A_3$	$B_3$	$C_3$	$D_3$
$A_3$	5			
$B_3$	-3	5		
$C_3$	-5	3	5	
$D_3$	3	-5	-3	5
=====				
$\tilde{a}_4$	$A_4$	$B_4$	$C_4$	$D_4$
$A_4$	8			
$B_4$	0	8		
$C_4$	-8	0	8	
$D_4$	0	-8	0	8

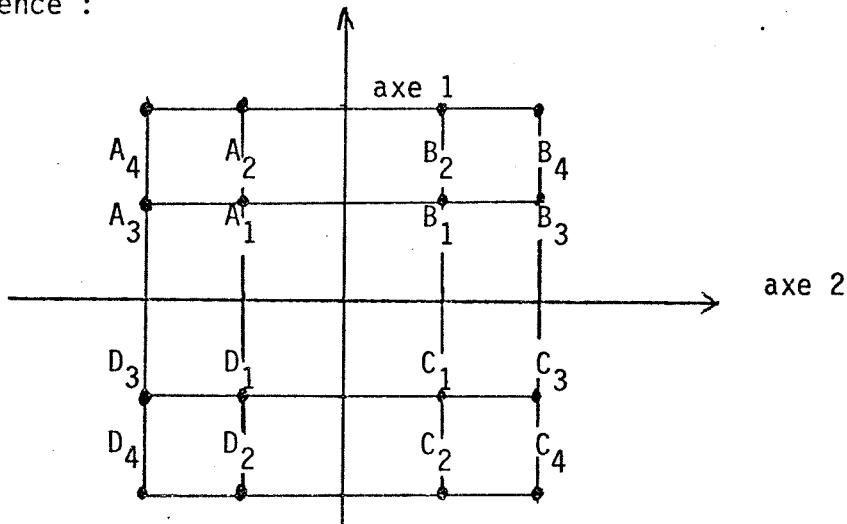


$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4 \begin{matrix} \tilde{x} \\ \tilde{x} \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{c}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \tilde{q}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

S.T.A.T.I.S. donne  $\tilde{x}$  pour référentiel 1 normalisé et visualise le poids  $\sqrt{(q_i)_{jj}}$  donné par le  $i^{\text{ème}}$  juge à l'axe  $j$  de l'intra-structure de référence :



$A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i = 1, 4$ ) : visualise  $\tilde{a}^i = \tilde{x} \tilde{q}^i \tilde{x}'$ .



3.2 METHODE DE J.D. CARROLL & J.J. CHANG.

=====

3.2.1. PRESENTATION

Il s'agit d'une méthode d'analyse conjointe, proposée en 1972 (après Tucker) sous le nom d'IDIOSCAL, décrite dans 3 et dont voici l'essentiel.

La donnée à analyser est un cube de distances entre n sujets,  $C3 = \{ \underline{d}^i : n \times n ; i = 1, m \}$ , fournies par m juges.

La solution de Carroll comporte 3 étapes, à savoir :

1 - Recherche d'une première estimation de l'espace des sujets, commun à tous les juges ( i e : l'analogue de la représentation canonique de référence pour S.T.A.T.I.S.) :

Calcul de  $\underline{d} : n \times n$  telle que  $d_{jk}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{ijk}^i)^2$

$\underline{d}$  est transformée en une matrice de produits scalaires

$\underline{s} : n \times n$  en utilisant la transformation de Torgerson.

Enfin,  $\underline{s}$  est factorisée canoniquement  $\underline{s} = \underline{Y} \underline{Y}'$ , d'où :

$\underline{Y} : n \times p$  ( $\underline{s}$  a p valeurs propres positives) dont la i<sup>ème</sup> ligne donne les coordonnées dans  $R^p$  du i<sup>ème</sup> sujet.

2 - Recherche d'une meilleure approximation  $\hat{\underline{d}}$ , de  $\underline{d}$  :

(Usage de la procédure N.I.L.E.S. (cf. 18 ).

Connaissant  $\underline{d}$  et  $\underline{Y} = (\underline{Y}_1 | \dots | \underline{Y}_p)$  on cherche  $\underline{r}$  telle que  $d_{jk}^2 = (\underline{Y}_j - \underline{Y}_k)' \underline{r} (\underline{Y}_j - \underline{Y}_k)$  d'où :  $\hat{\underline{d}} = \underline{Y} \underline{r} \underline{Y}'$ .

$\underline{r}$  est ensuite factorisée sous la forme :

$$\underline{r} = \underline{\beta} \underline{\lambda}^2 \underline{\beta}' ; (\underline{r} \underline{\beta} = \underline{\beta} \underline{\lambda} \quad \& \quad \underline{\beta}' \underline{\beta} = \underline{\lambda}^{-1})$$

$\hat{\underline{d}}$  s'écrit alors :  $\underline{Y} \underline{\beta} \underline{\lambda} \underline{\lambda}' \underline{\beta}' \underline{Y}'$

ce qui donne  $\hat{\underline{d}}_{n \times p} = \underline{Y} \underline{\beta} \underline{\lambda}$  comme meilleur espace commun.



3 - Recherche des espaces individuels (intra-structures)  $\underline{y}^i$  ;  
 $i = 1, m$  , de la forme  $\underline{\delta} \underline{q}^i$  où  $\underline{q}^i$  est une transformation régulière quel-  
 conque (usage de N.I.L.E.S.):

Connaissant  $\underline{d}^i$  et  $\underline{\delta} = (\underline{\delta}_1 \mid \dots \mid \underline{\delta}_p)$ , on estime  $\underline{r}^i$  ,  
 telle que :

$$d_{jk}^{i2} = (\underline{\delta}_j - \underline{\delta}_k)' \underline{r}^i (\underline{\delta}_j - \underline{\delta}_k)$$

Comme  $\underline{r}$  précédemment,  $\underline{r}^i$  est factorisée :

$$\underline{r}^i = \underline{\beta}^i \underline{\lambda}^{i2} \underline{\beta}^{i'}$$

Enfin posant  $\underline{r}^i = \underline{q}^i \underline{q}^{i'}$  , on déduit  $\underline{q}^i = \underline{\beta}^i \underline{\lambda}^i$  et le  
 $i^{\text{ème}}$  espace individuel  $\underline{y}^i = \underline{\delta} \underline{q}^i$ .

### 3.2.2. COMPARAISON AVEC S.T.A.T.I.S.

#### 3.2.2.1. Inter-structure

Les juges sont représentés dans un repère  
 orthonormé ; la composante sur le  $j^{\text{ème}}$  axe du juge  $i$  est le poids qu'il  
 donne à l'axe  $j$  de l'intra-structure de référence.

#### 3.2.2.2. Intra-structure de référence

Il s'agit de la matrice  $\underline{\delta}$  :  $n \times p$  obtenue  
 en fin de seconde étape dans IDIOSCAL.

Le critère de choix de  $\underline{\delta}$  étant que  $\hat{\underline{d}} = \underline{\delta} \underline{\delta}'$  approche au mieux  
 $\underline{d}$  qui est construite à l'aide des  $\underline{d}^i$ . La métrique  $\underline{r}$  dans l'espace de réfê-  
 rence n'a d'autre objet que la recherche d'un meilleur ajustement après  
 que l'hypothèse  $d_{jk}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_{jk}^i)^2$  , reliant espaces individuels et es-  
 pace commun, ait été faite.





### 3.2.2.3. Analyse des différences

Les différences analysées entre deux intra-structures  $\tilde{y}^i$  et  $\tilde{y}^j$  sont les différences entre les métriques  $\tilde{r}^i$  et  $\tilde{r}^j$  (où entre les transformations régulières  $\tilde{q}^i$  et  $\tilde{q}^j$ ). On retrouve donc les mêmes difficultés, au niveau de l'interprétation des résultats, que dans la méthode de L.R. Tücker lorsque  $\tilde{r}^i$  comprend des rotations différentielles des axes du repère référentiel.

### 3.2.2.4. Exemple

Etant donné un cube, on considère ses arêtes comme une population statistique représentée dans  $R^3$ . La donnée est la matrice de produits scalaires entre vecteurs ayant pour origine le centre de gravité du cube et pour extrémité ces arêtes. On imagine qu'un groupe de six personnes regardant ce cube pondère les axes de  $R^3$ , chacune à sa manière et décrit le volume qu'elle voit (le cube déformé selon les pondérations) par une matrice de produits scalaires définie comme pour la description du cube.

La donnée, pour S.T.A.T.I.S. est donc :

( $\tilde{X}_i$  = matrice donnée par la  $i^{\text{ème}}$  personne et

A, B, C, ... H = ensemble des arêtes du volume)



X1	A	B	C	D	E	F	G	H
A	3.00000							
B	1.00000	3.00000						
C	1.00000	-1.00000	3.00000					
D	-1.00000	1.00000	1.00000	3.00000				
E	-1.00000	-3.00000	1.00000	-1.00000	3.00000			
F	-3.00000	-1.00000	-1.00000	1.00000	1.00000	3.00000		
G	1.00000	-1.00000	-1.00000	-3.00000	-1.00000	-1.00000	3.00000	
H	-1.00000	1.00000	-3.00000	-1.00000	-1.00000	1.00000	1.00000	3.00000

X2	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2.25001							
B	1.75001	2.25001						
C	0.25000	-0.25000	2.25000					
D	-0.25000	0.25000	1.75000	2.25000				
E	-1.75001	-2.25001	0.25000	-0.25000	2.25001			
F	-2.25001	-1.75001	-0.25000	-0.25000	-1.75001	2.25001		
G	0.25000	-0.25000	-1.75000	-2.25000	0.25000	-0.25000	2.25000	
H	-0.25000	0.25000	-2.25000	-1.75000	-0.25000	0.25000	1.75000	2.25000

X3	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2.06250							
B	1.93750	2.06250						
C	0.06250	-0.06250	2.06251					
D	-0.06250	0.06250	1.93750	2.06251				
E	-1.93750	-2.06250	0.06250	-0.06250	2.06250			
F	-2.06250	-1.93750	-0.06250	0.06250	-1.93750	2.06250		
G	0.06250	-0.06250	-1.93750	-2.06250	0.06250	-0.06250	2.06250	
H	-0.06250	0.06250	-2.06251	-1.93750	-0.06250	0.06250	1.93750	2.06251

X4	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2.00000							
B	2.00000	2.00000						
C	0.0	0.0	2.00000					
D	0.0	0.0	2.00000	2.00000				
E	-2.00000	-2.00000	0.0	0.0	2.00000			
F	-2.00000	-2.00000	0.0	-0.0	-2.00000	2.00000		
G	0.0	0.0	-2.00000	-2.00000	0.0	0.0	2.00000	
H	0.0	0.0	-2.00000	-2.00000	0.0	0.0	2.00000	2.00000

X5	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2.00000							
B	0.0	2.00000						
C	2.00000	0.0	2.00000					
D	0.0	2.00000	0.0	2.00000				
E	0.0	-2.00000	0.0	-2.00000	2.00000			
F	-2.00000	0.0	-2.00000	0.0	0.0	2.00000		
G	0.0	-2.00000	0.0	-2.00000	2.00000	0.0	2.00000	
H	-2.00000	0.0	-2.00000	0.0	0.0	2.00000	0.0	2.00000

X6	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1.00000							
B	-1.00000	1.00000						
C	1.00000	-1.00000	1.00000					
D	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000				
E	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000			
F	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000		
G	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	
H	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000	1.00000



S.T.A.T.I.S. fournit les six intra-structures suivantes :

X1			
A	1.00000	1.00000	1.00000
B	1.00000	-1.00000	-1.00000
C	1.00000	-1.00000	1.00000
D	1.00000	-1.00000	-1.00000
E	-1.00000	-1.00000	1.00000
F	-1.00000	-1.00000	-1.00000
G	-1.00000	1.00000	1.00000
H	-1.00000	-1.00000	-1.00000

X2			
A	1.00000	1.00000	0.50000
B	1.00000	1.00000	-0.50000
C	1.00000	-1.00000	0.50000
D	1.00000	-1.00000	-0.50000
E	-1.00000	-1.00000	0.50000
F	-1.00000	-1.00000	-0.50000
G	-1.00000	1.00000	0.50000
H	-1.00000	1.00000	-0.50000

X3			
A	1.00000	1.00000	0.25000
B	1.00000	-1.00000	-0.25000
C	1.00000	-1.00000	0.25000
D	1.00000	-1.00000	-0.25000
E	-1.00000	-1.00000	0.25000
F	-1.00000	-1.00000	-0.25000
G	-1.00000	1.00000	0.25000
H	-1.00000	1.00000	-0.25000

X4			
A	1.00000	1.00000	0.0
B	1.00000	1.00000	0.0
C	1.00000	-1.00000	0.0
D	1.00000	-1.00000	0.0
E	-1.00000	-1.00000	0.0
F	-1.00000	-1.00000	0.0
G	-1.00000	1.00000	0.0
H	-1.00000	1.00000	0.0

X5			
A	1.00000	0.0	1.00000
B	1.00000	0.0	-1.00000
C	1.00000	0.0	1.00000
D	1.00000	0.0	-1.00000
E	-1.00000	0.0	1.00000
F	-1.00000	0.0	-1.00000
G	-1.00000	0.0	1.00000
H	-1.00000	0.0	-1.00000

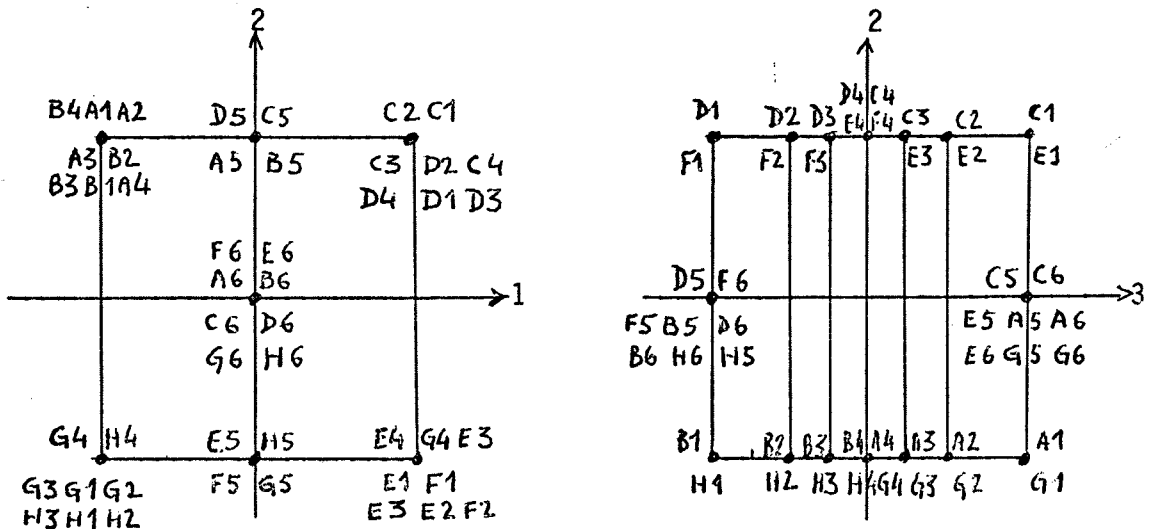
X6			
A	0.0	0.0	1.00000
B	0.0	0.0	-1.00000
C	0.0	0.0	1.00000
D	0.0	0.0	-1.00000
E	0.0	0.0	1.00000
F	0.0	0.0	-1.00000



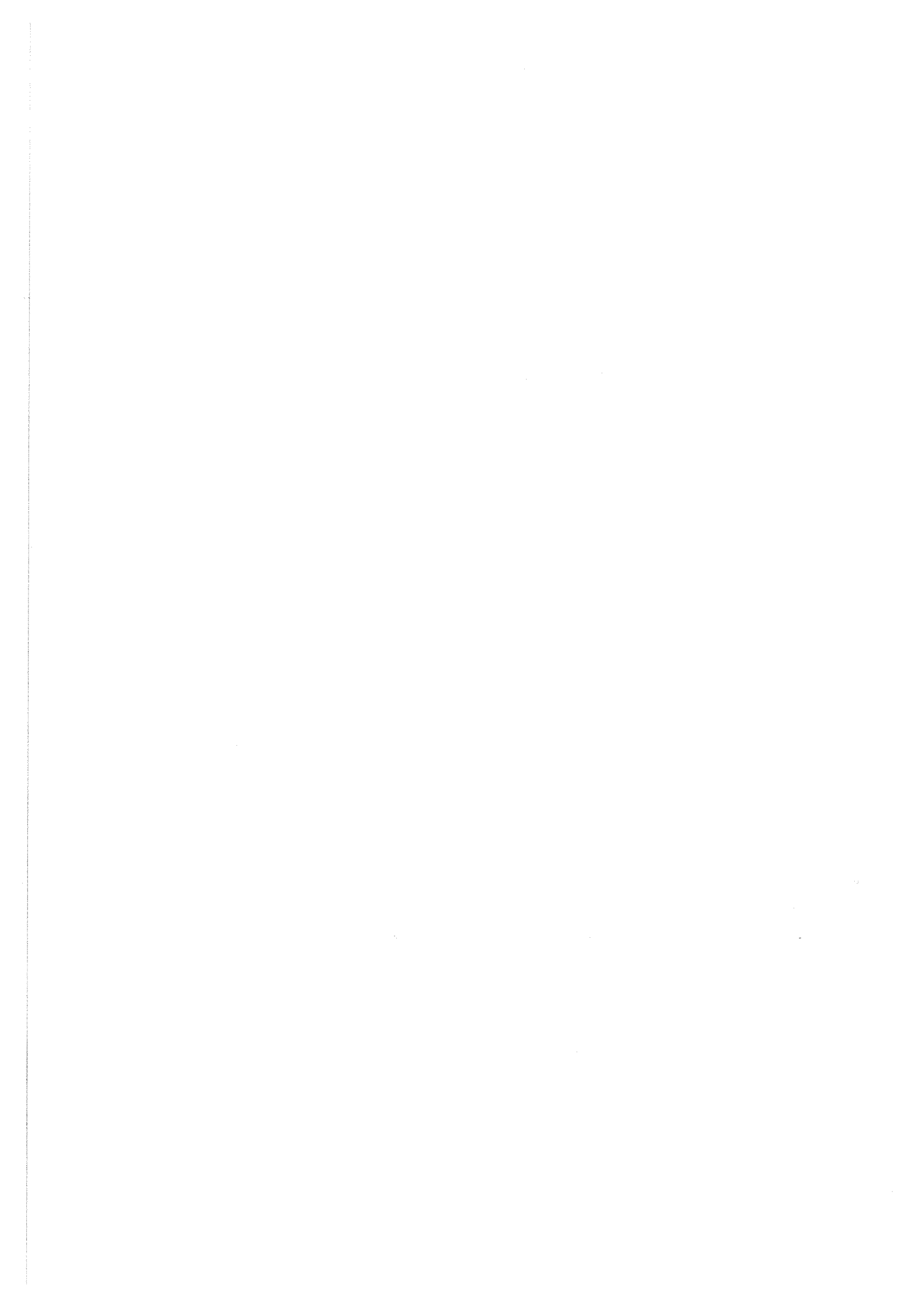
d'où l'on déduit immédiatement les poids  $p_{ij}$  donnés par le  $i^{\text{ème}}$  individu à l'axe  $j$  :

$P_{ij}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	1	1	1
$i = 2$	1	1	1/2
$i = 3$	1	1	1/4
$i = 4$	1	1	0
$i = 5$	1	0	1
$i = 6$	0	0	1

La vision de chaque individu est donnée par les plans 1-2 et 2-3 de leurs intra-structures. (représentées simultanément ci-dessous).



$(A_i, B_i, \dots, H_i)$  = arêtes du volume vu par la  $i^{\text{ème}}$  personne.





3.3 LA DOUBLE ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES DE J.M. BOUROCHE

3.3.1. PRESENTATION

Il s'agit d'une méthode d'analyse conjointe proposée en 1975, sous le sigle D.A.C.P. , décrite dans 2 et dont voici l'essentiel :

La donnée à analyser est un cube chronologique de profils,

$$C7 = \{ \tilde{x}^i : n \times p ; i = 1, m \} . \text{ (n sujets, p variables).}$$

La méthode comprend deux parties, à savoir :

1 - Analyse des composantes principales des centres de gravité

$$\underline{g}^k = \sum_{i=1}^m x_{ij}^k \quad (x_{.j}^k \text{ est la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de } \tilde{x}^k)$$

2 - Connaissant les axes factoriels  $\{ (\underline{u}_1^i, \dots, \underline{u}_q^i) ; i = 1, m \}$  des nuages  $N^i$  centrés sur leur centre de gravité respectif, recherche d'un "meilleur" système d'axes  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q)$ . (i e : l'analogue du repère référentiel de S.T.A.T.I.S.).

Quatre possibilités sont offertes :

a) -  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q)$  est l'un des  $(\underline{u}_1^i, \dots, \underline{u}_q^i)$ .

b) -  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q)$  axe factoriel d'un nuage  $U_{i=1, m} N^i$  (union des m nuages).

c) - Recherche séquentielle :  $\underline{v}_j$  trouvé, on cherche

$$\underline{v}_{j+1} \text{ (j=1, \dots, q-1) tel que } \sum_{i=1}^m \cos^2 (\underline{v}_{j+1}, \underline{u}_{j+1}^i) \text{ soit maximum. (solution analytique)}$$

d) - Recherche globale de  $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q)$  tel que :

$$\sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^m \cos^2 (\underline{v}_l, \underline{u}_l^t) \text{ soit maximum.}$$

Un critère ,  $\emptyset (t, \tau)$ , permet de comparer les différents



choix. [  $\emptyset (t, \tau) =$  mesure de la perte d'explication de variance lorsqu'on passe des  $q$  premiers axes d'un nuage  $N^t$  aux  $q$  premiers axes d'un autre nuage  $N^\tau$  ] .

### 3.3.2. COMPARAISON AVEC S.T.A.T.I.S.

#### 3.3.2.1. Inter-structure

Elle est fournie par l'analyse des composantes principales de la matrice  $\underline{g} = (\underline{g}^1, \dots, \underline{g}^m) : p \times m$ , les vecteurs  $\underline{g}^k$  étant ceux du § 3.3.1., 1°).

Deux matrices de profils  $\underline{x}^i$  et  $\underline{x}^j$  ayant deux centres de gravités égaux ( $\underline{g}^i = \underline{g}^j$ ) seront donc confondues dans cette représentation. Ce qui n'est pas le cas dans S.T.A.T.I.S. puisque cette condition  $y$  est seulement nécessaire. L'indication globale de l'évolution des matrices  $\underline{x}^i$  ( $i = 1, m$ ) nous paraît être meilleure dans S.T.A.T.I.S. puisqu'elle prend en compte toutes les variations de positionnement des sujets et non seulement la variation des sujets moyens.

#### 3.3.2.2. Intra-structure de référence

J.M. BOUROCHE ne recherche que les axes de l'intra-structure de référence. Cela est suffisant pour l'analyse de l'évolution qu'il se propose. C'est l'analyse des différences qui conduit à rechercher une telle intra-structure et cela n'est pas son propos.

#### 3.3.2.3. Analyse de l'évolution

Il s'agit de la représentation simultanée des projections sur les plans factoriels des  $m$  configurations obtenues par A.C.P. à partir des tableaux chronologiques  $\underline{x}^i$  ( $i = 1, m$ ) centrés et exprimées dans le "meilleur système d'axes" précédemment trouvé.



Rappelons que l'A.C.P. de  $\tilde{x}^i : n \times p_i$  équivaut à la factorisation canonique de  $\tilde{s}^i = \tilde{x}^i \tilde{x}^{i'}$  ( $i = 1, m$ ). La différence entre S.T.A.T.I.S. & D.A.C.P. se trouve seulement dans le repère référentiel utilisé ou plus exactement dans le critère utilisé pour le déterminer. Avant de tenter une comparaison formelle des critères, remarquons que quel que soit le critère retenu par la D.A.C.P., il ne fait intervenir, cf § 3.3.1., 2°), que le nombre minimal  $q$  d'axes factoriels des systèmes de chaque nuage :

$$q = \min_{t=1, m} n_t \text{ où } n_t = \text{nombre d'axes factoriels du nuage } N^t$$

et non pas les nombres  $n_1, \dots, n_m$ . Alors que le critère de S.T.A.T.I.S. (défini par la propriété d'optimalité, § 2.5.3.2., au niveau des opérateurs) fait nécessairement (implicitement) intervenir toutes les dimensions de chaque nuage. Afin de montrer la différence entre le critère de S.T.A.T.I.S. et ceux de la D.A.C.P. dans les recherches séquentielle ou globale du système, développons :

$$\sum_{k=1}^m [\langle \tilde{r}^1, \tilde{s}^k \rangle]^2 \text{ à l'aide des spectres } \{ \mu_i, \underline{v}^i \} \text{ de } \tilde{r}^1$$

$$\text{et } \{ \lambda_j^k, \underline{u}_k^j \} \text{ de } \tilde{s}^k : \tilde{r}^1 = \sum_i \mu_i \underline{v}^i \underline{v}^{i'} \text{ et}$$

$$\tilde{s}^k = \sum_j \lambda_j^k \underline{u}_k^j \underline{u}_k^{j'} \text{ entraînent que :}$$

$$\langle \tilde{r}^1, \tilde{s}^k \rangle_{\mathcal{P}(R^n)} = \sum_i \sum_j \langle \mu_i \underline{v}^i \underline{v}^{i'}, \lambda_j^k \underline{u}_k^j \underline{u}_k^{j'} \rangle =$$

$$\sum_i \sum_j \mu_i \lambda_j^k \langle \underline{v}^i \underline{v}^{i'}, \underline{u}_k^j \underline{u}_k^{j'} \rangle = \sum_i \sum_j \mu_i \lambda_j^k \langle \underline{v}^i, \underline{u}_k^j \rangle^2$$

$$\text{En posant : } \langle \underline{v}^i, \underline{u}_k^j \rangle = \text{corrélation } (\underline{v}^i, \underline{u}_k^j)$$

$$= \|\underline{v}^i\| \|\underline{u}_k^j\| \text{cosinus } (\underline{v}^i, \underline{u}_k^j) = \cos (\underline{v}^i, \underline{u}_k^j)$$



On voit que S.T.A.T.I.S. maximise :

$$\sum_{k=1}^m \left[ \sum_i \sum_j \mu_i \lambda_j^k \cos^2 (\underline{v}^i, \underline{u}_k^j) \right]^2$$

C'est cette expression qu'il faut comparer à

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \sum_{k=1}^m \cos^2 (\underline{v}^{j+1}, \underline{u}_k^{j+1}) \text{ maximum } \forall j = 1, \dots, q-1 \\ \text{et} \\ \underline{v}^{j+1} \perp \underline{v}^j, \underline{v}^j \text{ vérifiant } f_1. \text{ (critère de la recherche sé-} \end{array} \right.$$

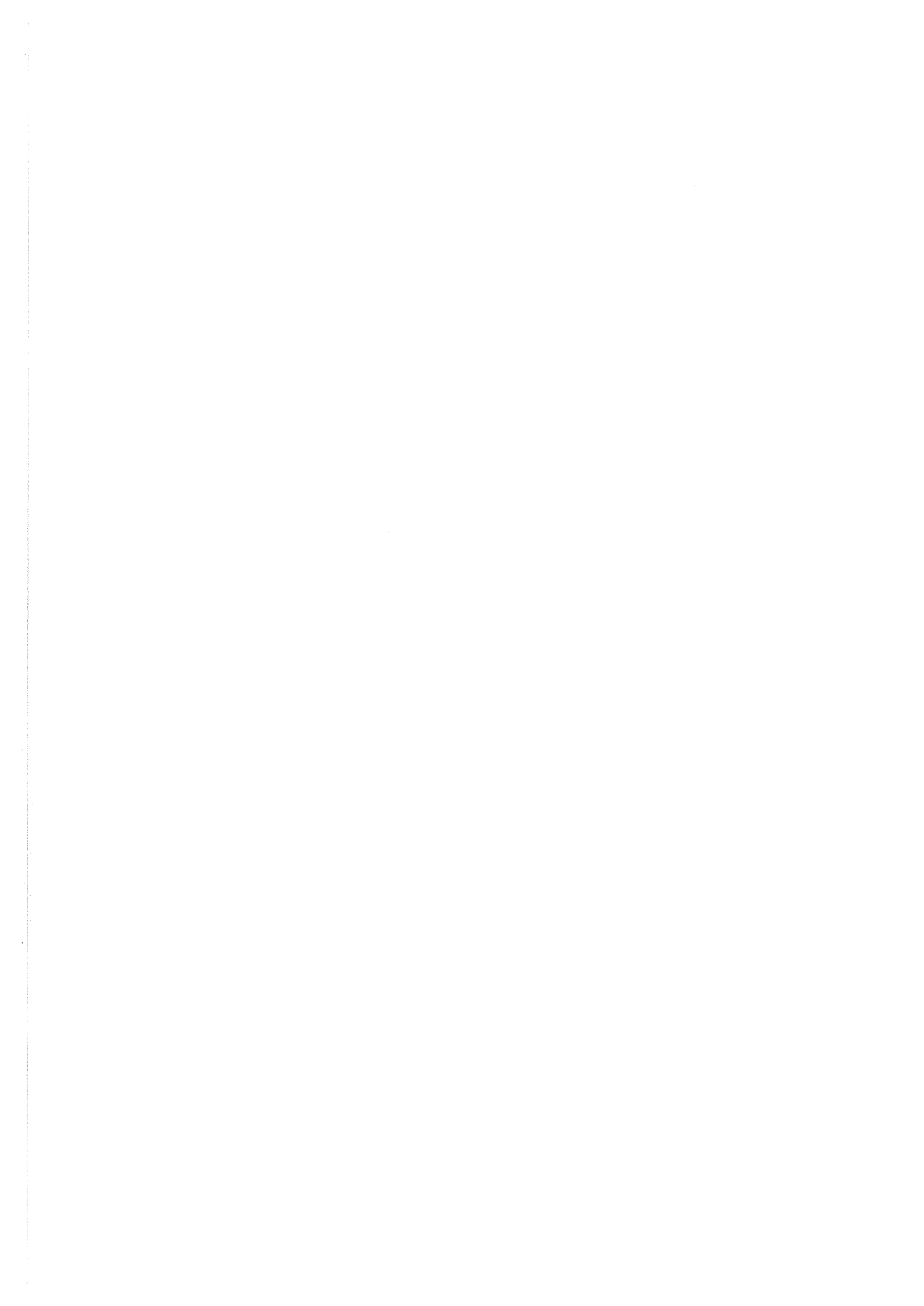
quentielle) ou bien à :

$$f_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^q \cos^2 (\underline{v}^i, \underline{u}_k^i) \text{ maximum. (critère de la recherche}$$

globale).

Reprenant l'exemple du paragraphe 3.1.2.5., la D.A.C.P. donne les configurations sur le meilleur système  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$  :

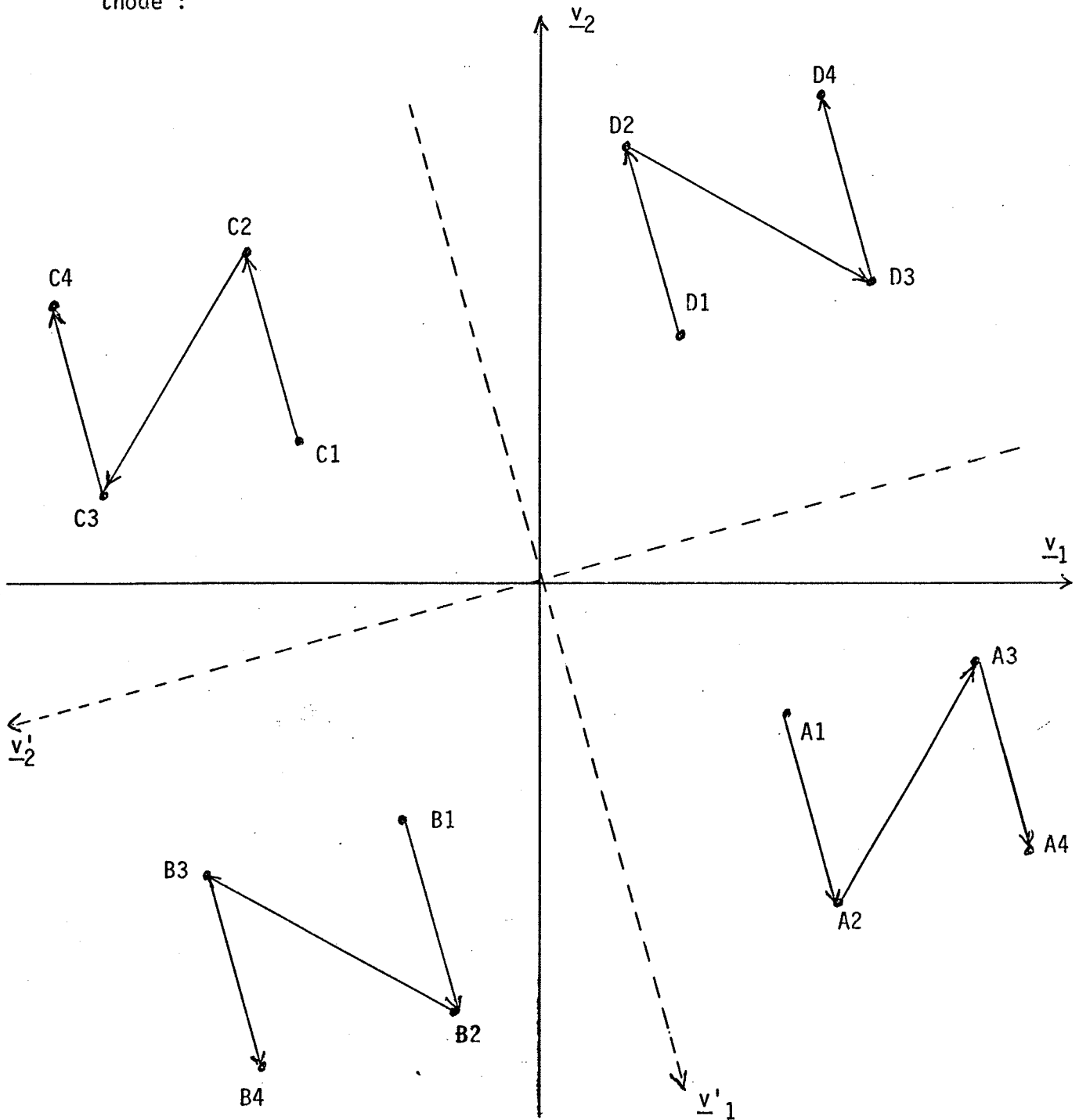
points	axe 1	axe 2
A1	0,8246	-0,4572
B1	-0,4572	-0,8246
C1	-0,8246	-0,4572
D1	0,4572	0,8246
A2	1,0083	-1,0980
B2	-0,2735	-0,4654
C2	-1,0083	1,0980
D2	0,2735	1,4654
A3	1,4654	-0,2734
B3	-1,0980	-1,0083
C3	-1,4654	0,2734
D3	1,0980	1,0083
A4	1,6491	-0,9143
B4	0,9143	-1,6491
C4	-1,6491	0,9143
D4	0,9143	1,6491





Ceci constitue un résultat -du point de vue de l'analyse de l'évolution- identique à la solution de S.T.A.T.I.S..

Si  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$  désigne le repère référentiel de S.T.A.T.I.S., on peut faire coïncider les configurations données par l'une et l'autre méthode :





4 - APPLICATIONS

4.1 COMPARAISON DES RESULTATS DE CLASSIFICATION

4.1.1. DONNEES DE LA CLASSIFICATION

De la note d'information du C.E.R.E.Q. n° 29 du 15 septembre 1975, nous extrayons d'une étude sur l'accès à l'emploi à la sortie de l'I.U.T. (promotion de 1972) le tableau suivant :

situations Z.E.A.T.	HOMMES			FEMMES		
	actifs et service militaire	études temps plein	demande d'emploi non sat.	actifs	études temps plein	demande d'emploi non sat.
Nord	81	18	1	85	10	4
Centre-Est	72	26	2	66	33	1
Méditerranée	82	16	2	68	15	10
Sud-Ouest	74	23	3	66	21	10
Ouest	79	19	2	71	18	6
Bassin Parisien	74	25	1	72	21	5
Région Parisienne	83	17	0	73	20	6



Note : Z.E.A.T. = Zone d'Etude & d'Amenagement du Territoire définie par l'I.N.S.E.E. ; les identifiants utilisés pour ces Z.E.A.T. dans le programme sont respectivement NOR, CES, MED, SOU, OUE, BPA, RPA & TOR. (ce dernier pour total régions).

#### 4.1.2. LES ALGORITHMES DE CLASSIFICATIONS

Nous avons retenu les algorithmes de classification hiérarchique proposés par M. JAMBU en novembre 1970 dans un document du CENTRE DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION SUR LA CONSOMMATION (C.R.E.D.O.C.).

Chaque méthode d'agrégation ayant été successivement choisie pour classifier les Z.E.A.T. sur la base des données précédentes, chacune fournit une matrice de distances ultramétriques, sauf pour la dernière méthode (barycentre) où la distance n'est pas ultramétrique. Voici la liste de ces méthodes ainsi qu'en vis à vis les identifiants utilisés dans le programme.

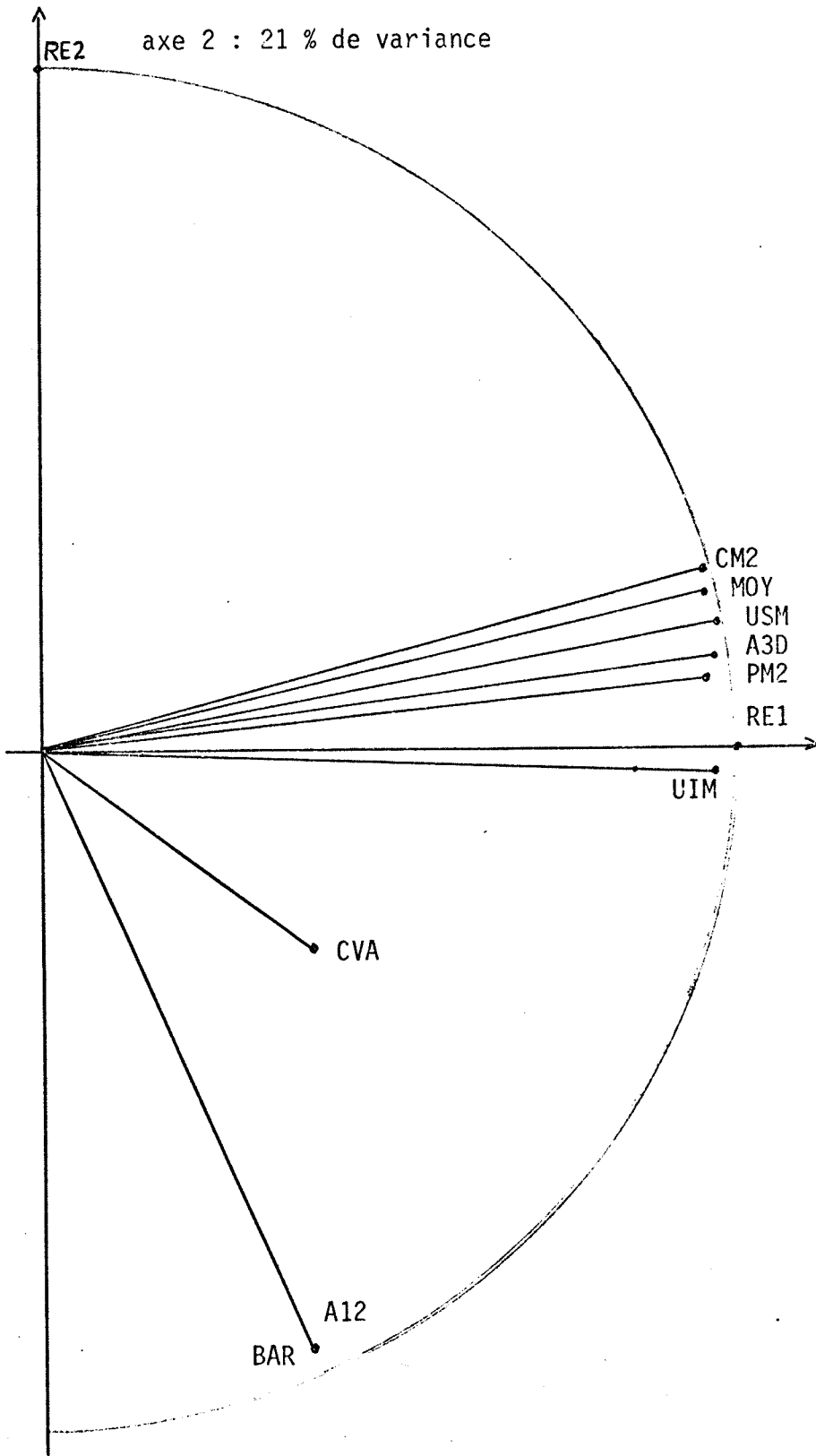
1	Ultramétrie inférieure maxima	:	U.I.M.	
2	Ultramétrie supérieure minima	:	U.S.M.	
3	Moyenne	:	MOY	
4 } 5 } 6 }	Distances angulaires	:	{ A 12 A 12 A 3D	
7		Maximisation du moment d'ordre 2 d'une partition	:	PM 2
8		Maximisation du moment d'ordre 2 d'une classe	:	CM 2
9	Maximisation de la variance d'une classe	:	CVA	
10	Barycentre	:	BAR	

NOTE : Les deux premières distances angulaires fournissent la même ultramétrie aussi ont-elles le même identifiant.



#### 4.1.3. INTER-STRUCTURE

Les données -matrices de distances correspondant à chaque méthode de classification- sont normalisées.



RE 1 est l'identifiant de la matrice référentielle n° 1, RE 2 celui de la matrice de référence n° 2.

On remarque que UIM est la méthode la plus proche du référentiel 1, tandis que BAR et A 12 sont les méthodes les plus éloignées de ce même référentiel.

CVA est mal représentée.

axe 1 : 67 % de variance

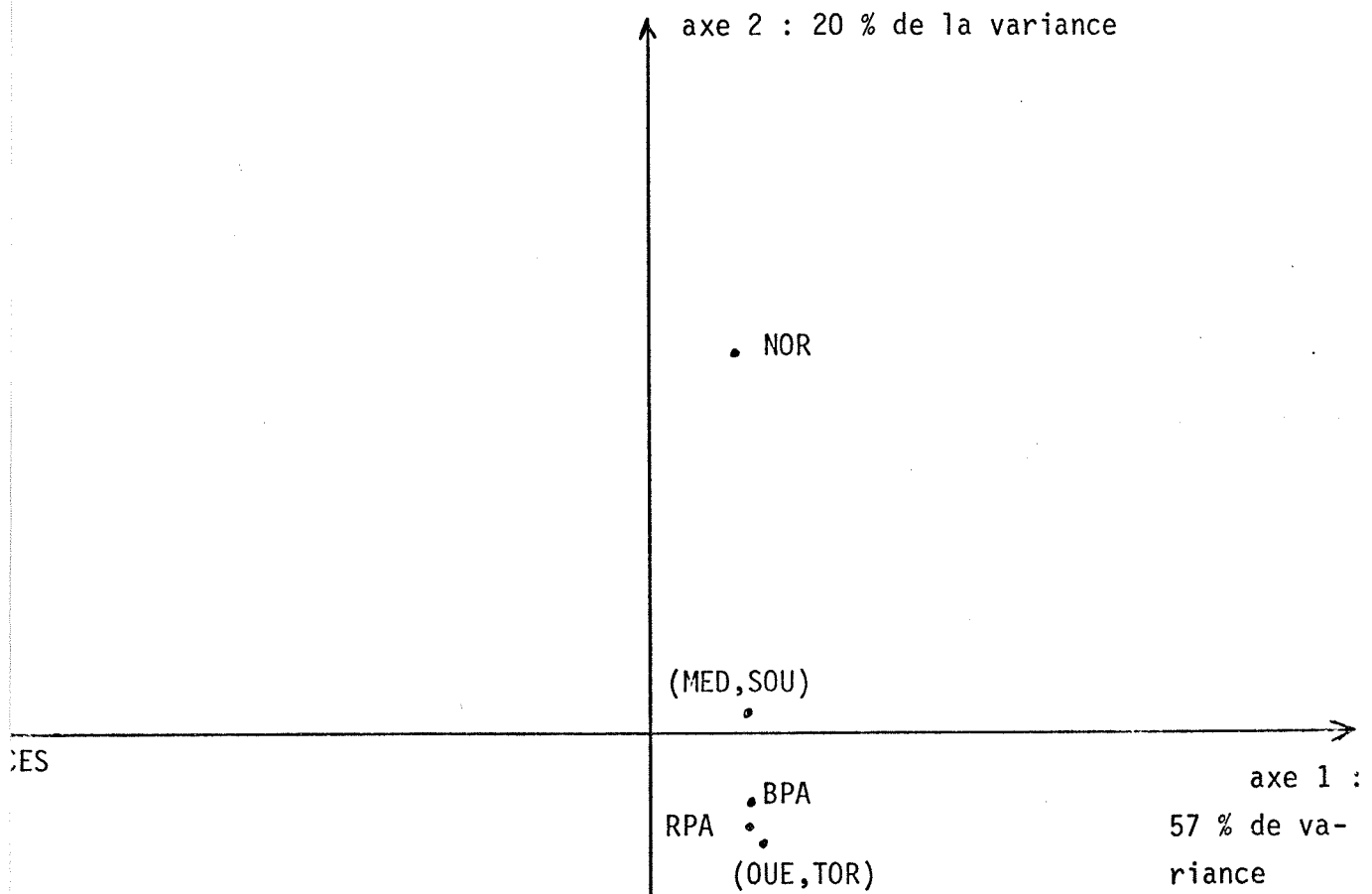
Le plan 1-2 de l'inter-structure visualise 88 % de la variance totale du nuage des opérateurs.





4.1.4. INTRA-STRUCTURE

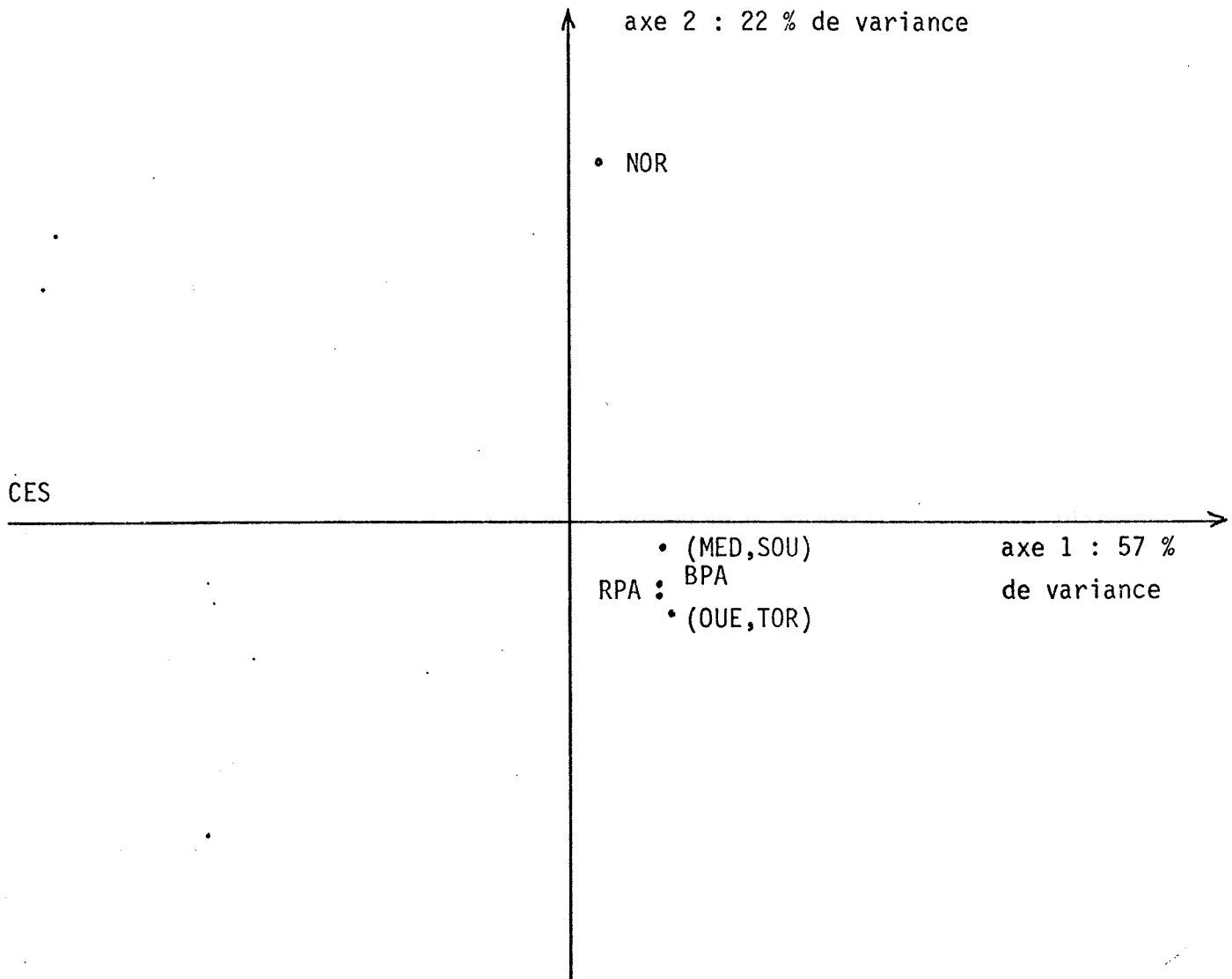
REFERENTIEL 1



Le plan 1-2 de l'intra-structure de référence visualise 77 % de la variance. Les régions, Centre-Est et Nord sont bien séparées des autres Z.E.A.T. .



4.1.5. INTRA-STRUCTURE DE U.I.M.



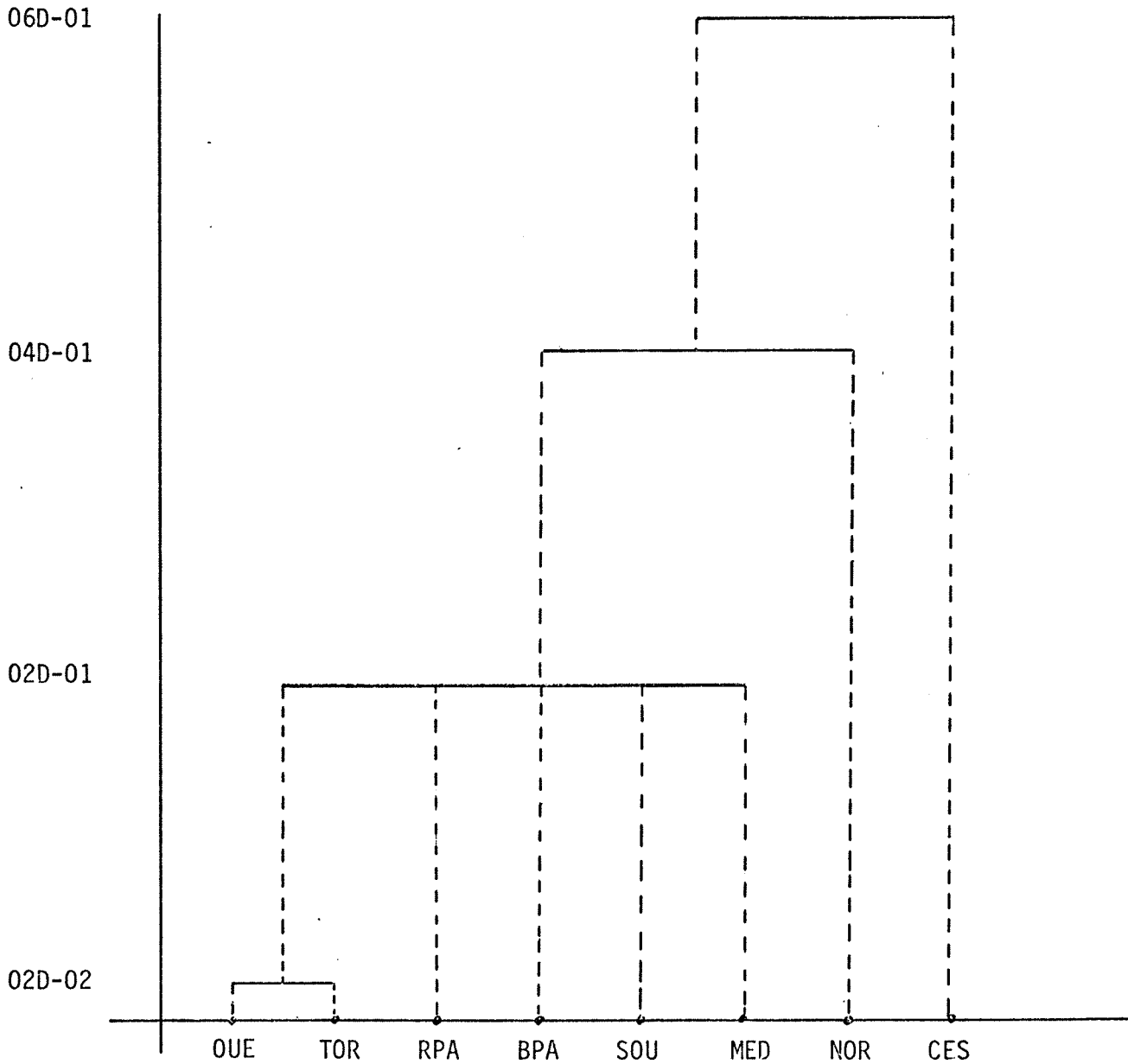
Le plan 1.2. de l'intra-structure de U.I.M. visualise 79 % de la variance. Comme pour le référentiel 1, les Z.E.A.T. Centre-Est et Nord sont bien séparées des autres. Rappelons que U.I.M. est proche de RE 1 dans l'inter-structure. Compte tenu du pourcentage de variance de l'axe 1, CES est davantage séparé que NOR du groupe central de Z.E.A.T. .



4.1.6. ARBRE DE CLASSIFICATION DONNE PAR U.I.M.

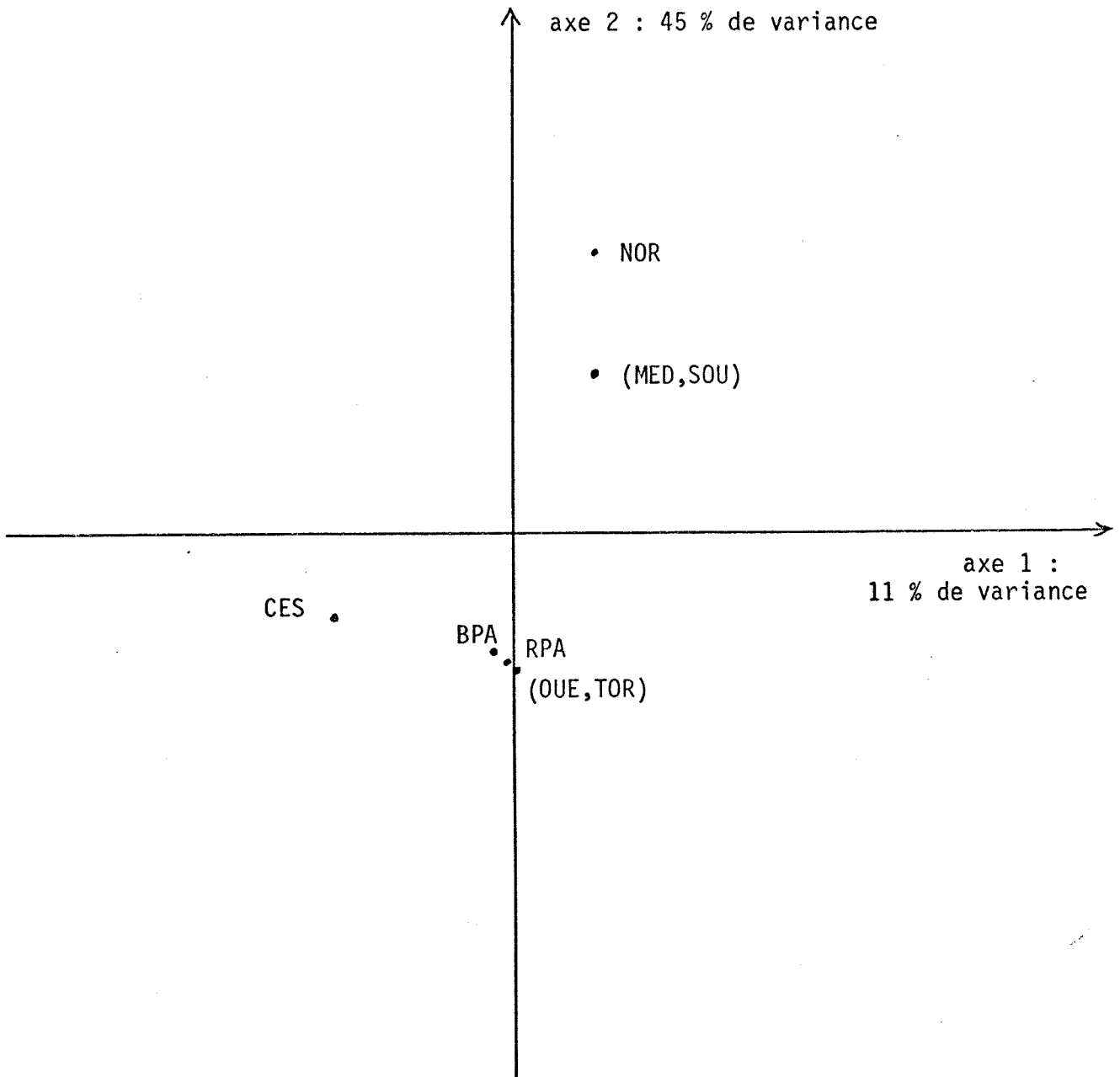
Ultramétrie inférieure maxima

Noeud	indice	ainé	benjamin	poids
9	0.2D-02	5	8	2
10	0.2D-01	7	9	3
11	0.2D-01	4	10	4
12	0.2D-01	3	11	5
13	0.2D-01	6	12	6
14	0.4D-01	1	13	7
15	0.6D-01	2	14	8





4.1.7. INTRA-STRUCTURE DE C.V.A.



Le plan 1.2 de l'intra-structure de C.V.A. visualise 56 % de la variance.

C.V.A. est la méthode qui était mal représentée dans l'inter-structure.

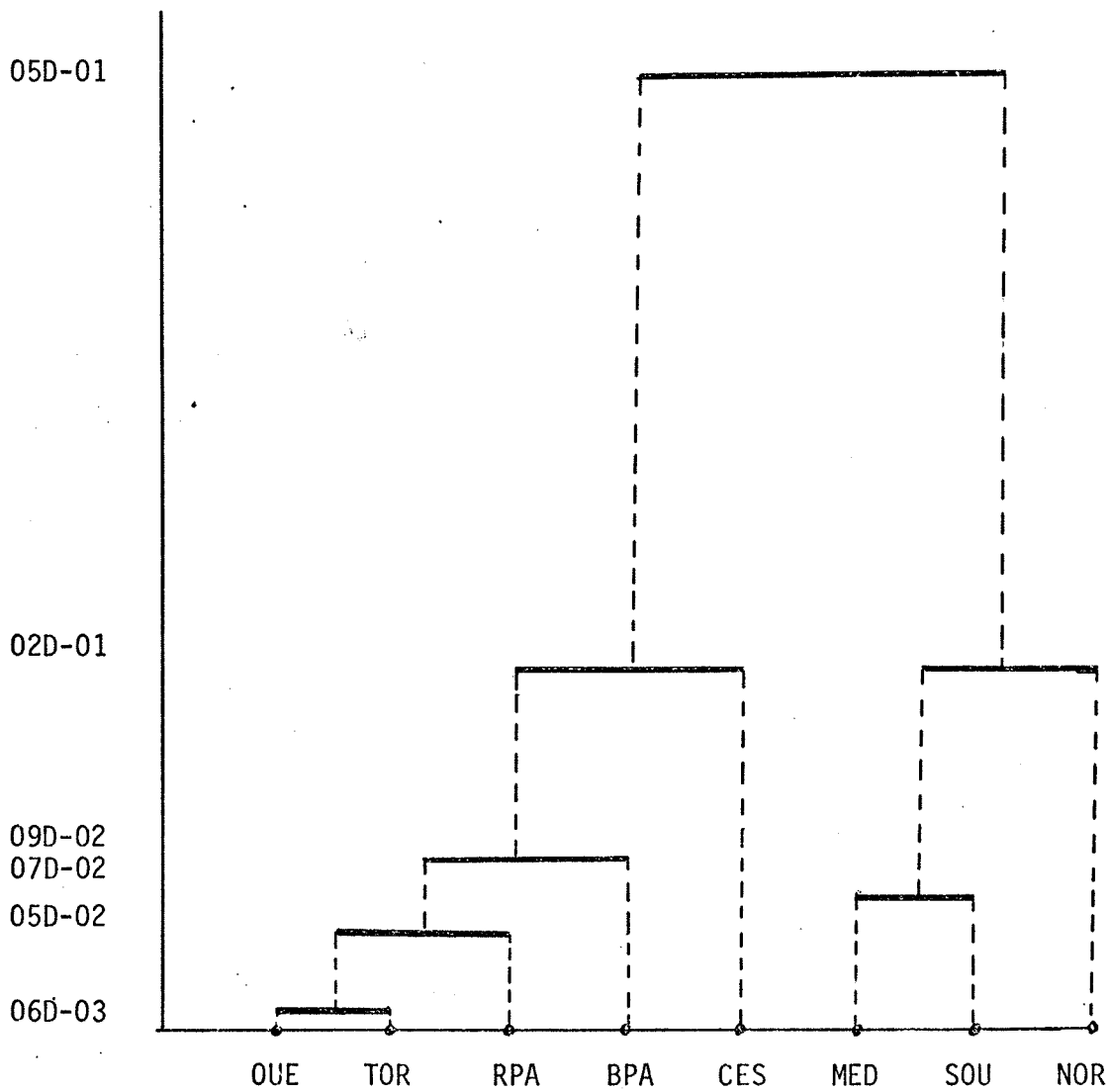




4.1.8. ARBRE DE CLASSIFICATION DONNE PAR C.V.A.

Variance d'une classe

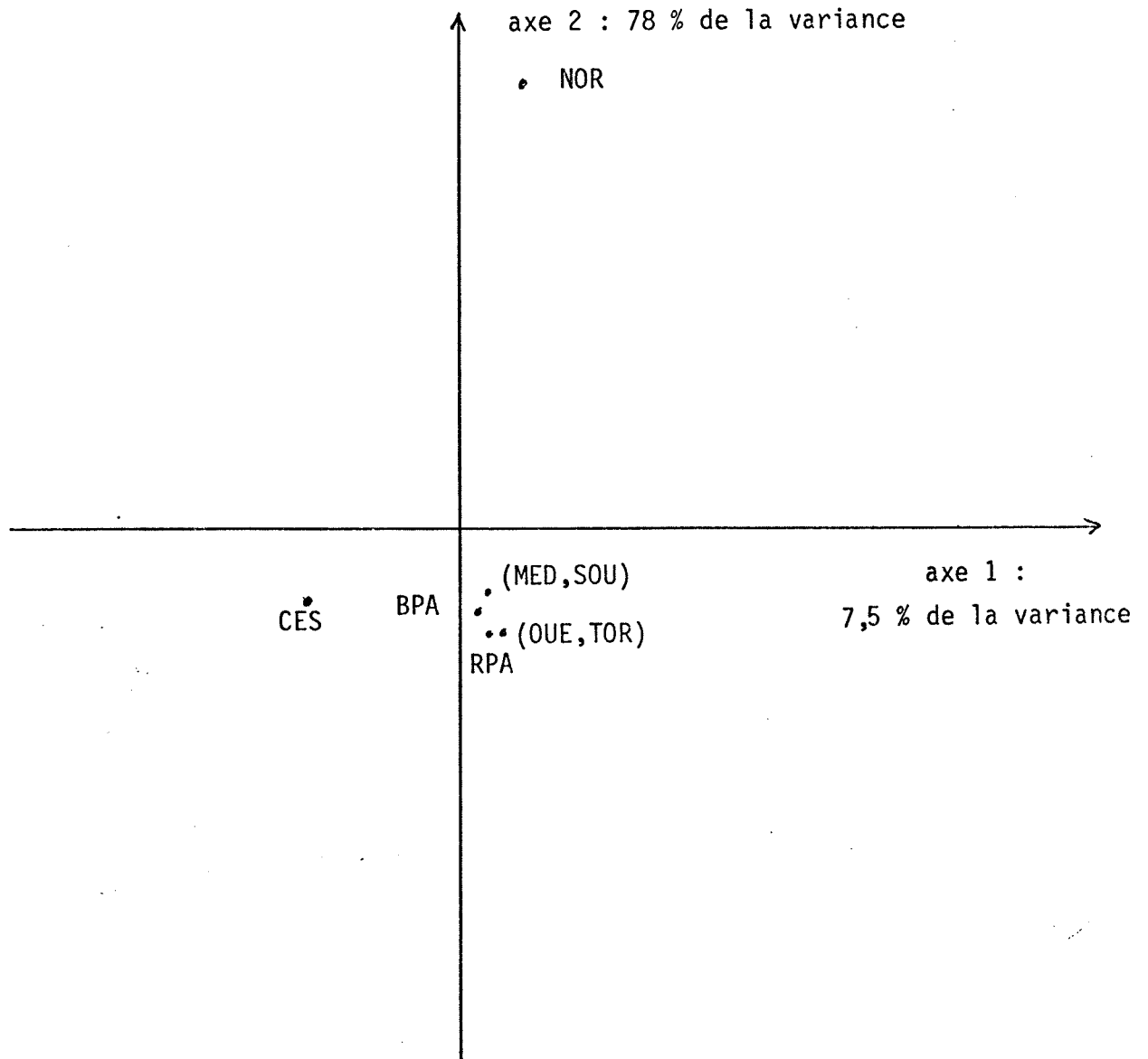
Noeud	indice	ainé	benjamin	poids
9	0.6D-03	5	8	2
10	0.5D-02	7	9	3
11	0.7D-02	3	4	2
12	0.9D-02	6	10	4
13	0.2D-01	2	12	5
14	0.2D-01	1	11	3
15	0.5D-01	13	14	8





4.1.9. INTRA-STRUCTURE DE B.A.R.

Le plan 1.2 visualise 85,5 % de la variance



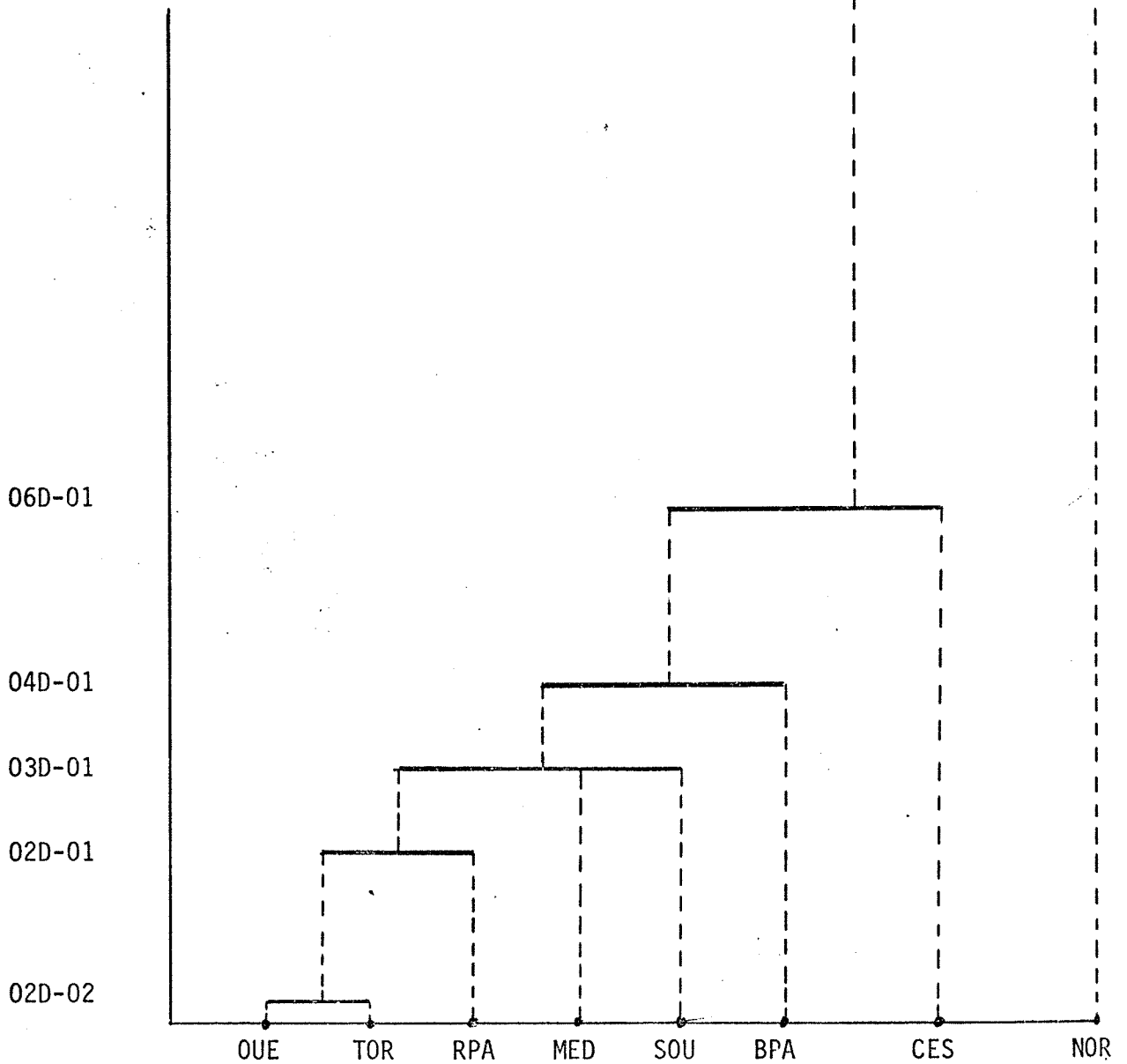
La Z.E.A.T. Centre-Est rejoint le groupe de Z.E.A.T. tandis que le Nord est nettement détaché . Rappelons que B.A.R. est la méthode la plus éloignée de RE 1 dans l'inter-structure.



4.1.10 ARBRE DE CLASSIFICATION DONNE PAR B.A.R.

Barycentre

Noeud	indice	ainé	benjamin	poids
9	0.2D-02	5	8	2
10	0.2D-01	7	9	3
11	0.3D-01	3	10	4
12	0.3D-01	4	11	5
13	0.4D-01	6	12	6
14	0.6D-01	2	13	7
15	0.2D+00	1	14	8





#### 4.1.11 INTERPRETATION DU RESULTAT

Un regard sur le tableau de données initial montre :

1 - que l'opposition Nord-Centre Est - autres Z.E.A.T. est due

- pour ce qui est de Nord - autres Z.E.A.T. : au fort pourcentage d'actifs.

- pour ce qui est de Centre-Est - autres Z.E.A.T. : au fort pourcentage de personnes poursuivant des études.

2 - toutes les Z.E.A.T. autre que le Nord et le Centre Est , ont un profil ressemblant.

3 - la région Ouest est la plus ressemblante de l'ensemble des Z.E.A.T. .

Ces trois réalités apparaissent bien dans l'intra-structure de U.I.M. (et donc de RE 1), ainsi que dans l'intra-structure de B.A.R. ; cependant, U.I.M. met l'accent sur le pourcentage de gens poursuivant leurs études alors que B.A.R. montre surtout le pourcentage des actifs.

En conclusion pour le praticien, nous ne disons pas qu'une méthode est meilleure qu'une autre, mais que le choix d'une méthode de classification a une incidence sur l'interprétation (économique ou politique ..) des résultats.

D'autre part, il est clair que, pour le statisticien, l'intra-structure ne saurait remplacer avantageusement la représentation arborescente obtenue à l'aide d'une l'ultramétrie. Par contre l'inter-structure, pour visualiser globalement des graphes de classifications, nous paraît être intéressante .





4.2 ANALYSE DE RELATIONS D'ORDRE

=====

4.2.1. DONNEES

Six dégustateurs de vins donnent une note de préférence à chacun des huit vins qui leur sont proposés. Les dégustateurs sont notés D1, D2, ... D6, tandis que les vins ont pour identifiants V1, V2, ... , V8. Un vin hypothétique, noté XX, reçoit (cf § 2.3.2.3.2.2., transformation 1) la même note de la part de chacun des juges (on a supposé que c'est le vin idéalement bon).

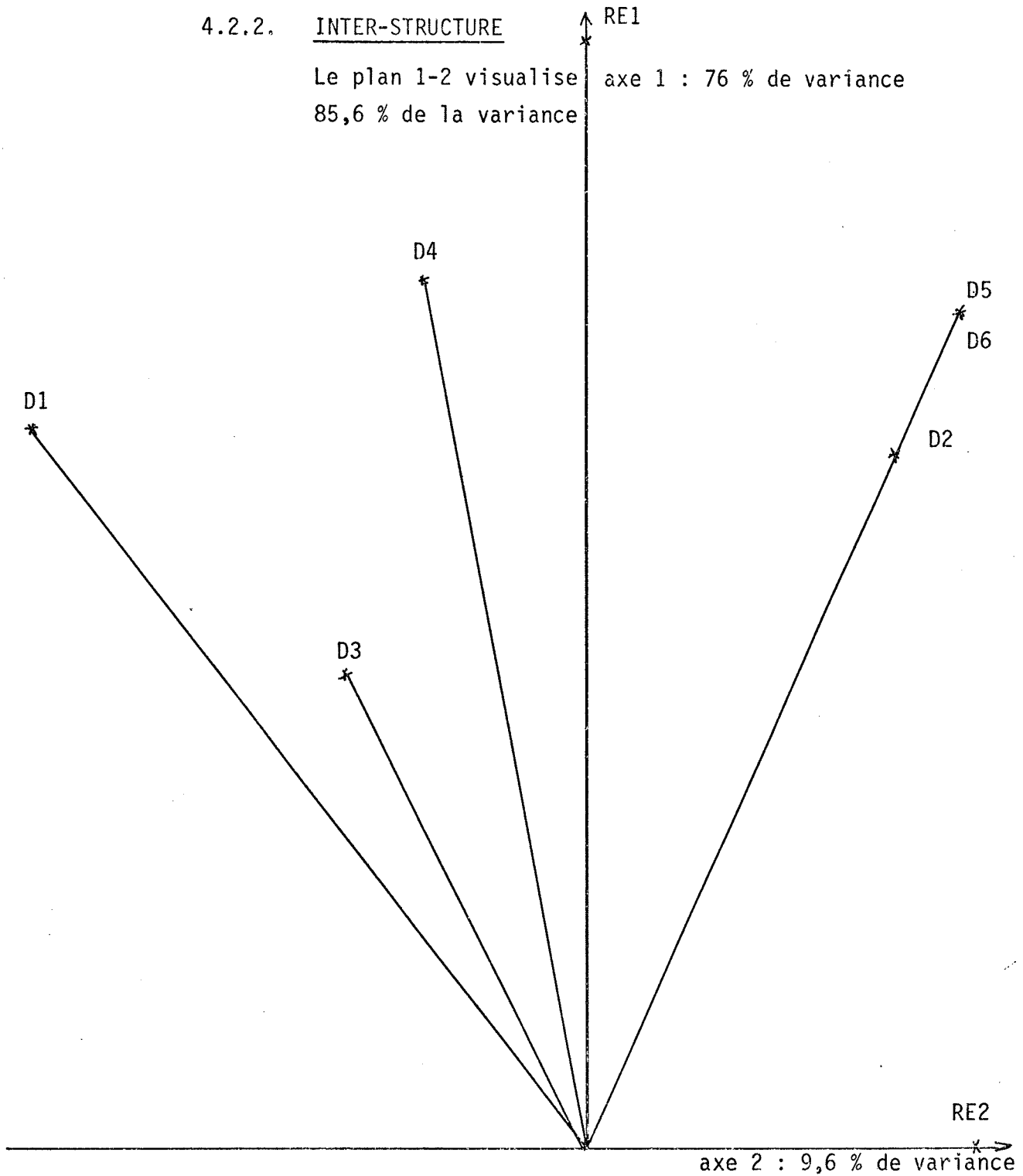
	D1	D2	D3	D4	D5	D6
V1	1	2	8	2	2	2
V2	2	6	6	7	6	7
V3	3	1	1	1	2	1
V4	4	6	2	6	8	8
V5	5	2	3	3	1	3
V6	6	2	6	4	5	3
V7	7	2	3	8	2	3
V8	8	8	3	5	7	6
XX	1	1	1	1	1	1

Les données ne sont ni centrées, ni normalisées.



4.2.2. INTER-STRUCTURE

Le plan 1-2 visualise  
85,6 % de la variance



Traduction de la structure : D2, D5 et D6 apprécient les vins de la même manière ; D1, qui s'est contenté de numéroter les vins, peut être regardé comme un mauvais juge..... ce qui incite à penser que D3 et D4 sont de moins bons dégustateurs que D2, D5 et D6.



Cette typologie se retrouve dans les intra-structures..

4.2.3. INTRA-STRUCTURES (plans 1-2) : voir page suivante.

Dégustateurs	axe 1	axe 2	plan 1 - 2
D1	81,2	14,0	95,2
D2	90,6	5,05	95,65
D3	65,4	1,34	66,74
D4	92,4	1,34	93,74
D5	92,1	4,78	92,88
D6	94,5	4,26	98,76
RE1	87,4	5,39	92,79

Pourcentages de variance expliquée

4.2.4. INTERPRETATION DU RESULTAT

Du point de vue des dégustateurs, le classement général des vins donné par le référentiel 1 (V1\*\*), dans l'ordre meilleur → moins bon est le suivant :

V3, V1, V5, V6, V7 , V2, V4, V8

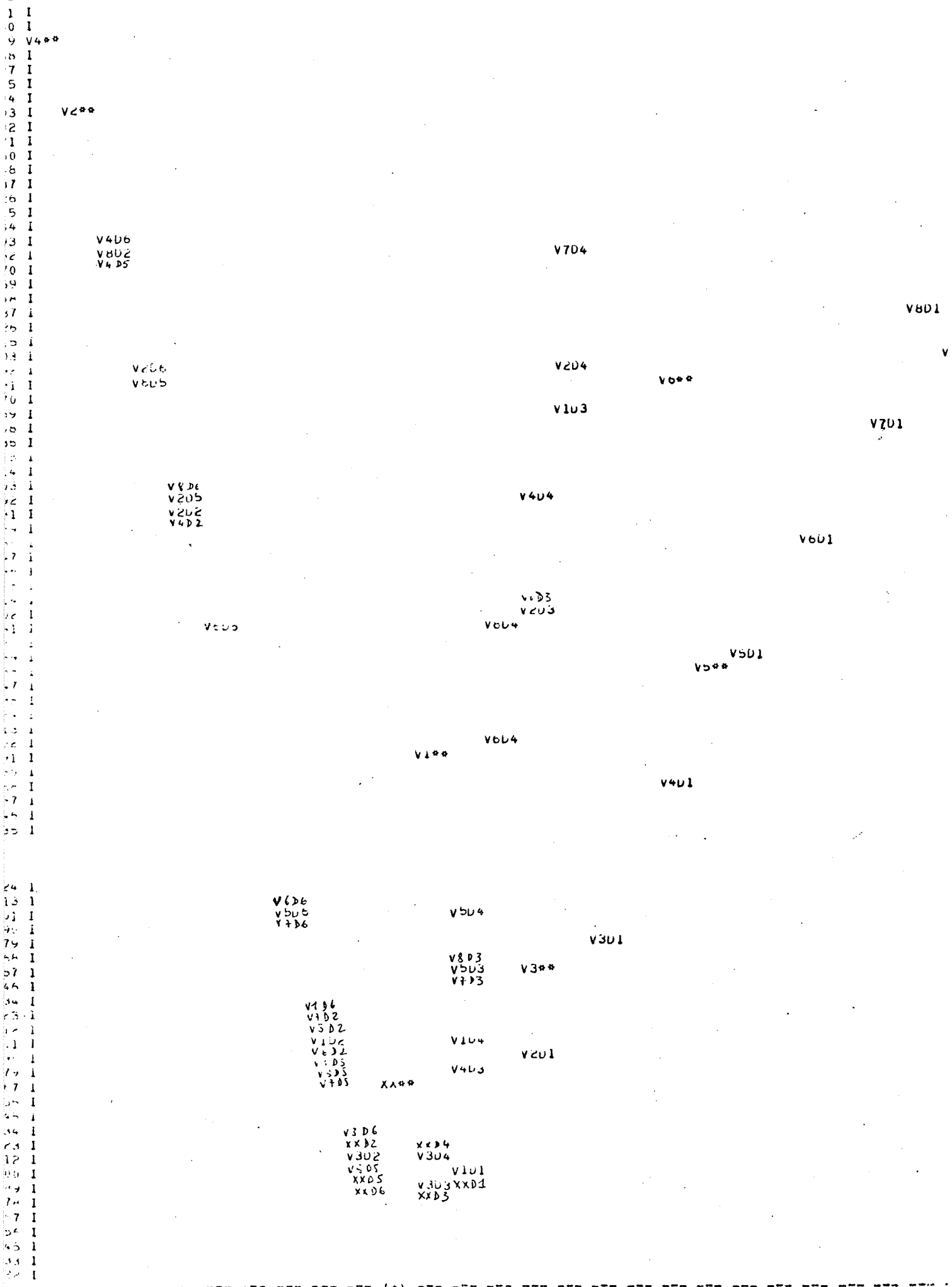
Le dégustateur qui respecte le mieux cet ordre est D6 ; puis viennent D4 et D5, puis D2, enfin D1 et D3. Pour dire cela, il suffit de ranger les dégustateurs dans l'ordre décroissant des coefficients RV entre un dégustateur et le référentiel n° 1.

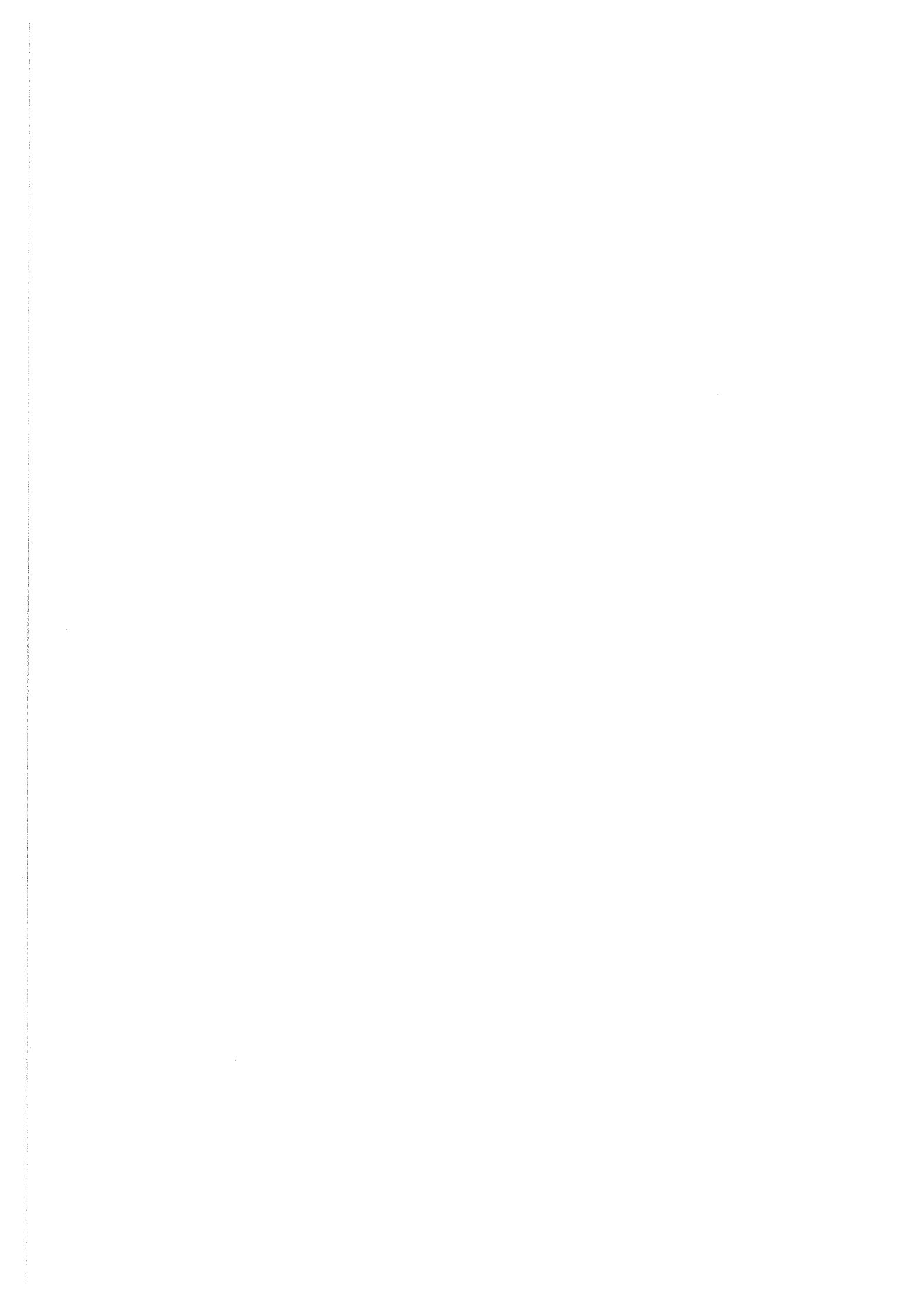
Coefficient RV entre le référentiel et un juge :

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
RE1	0,82	0,91	0,67	0,92	0,92	0,94



1) = 0.0 0.0 7.  
AXE VERTICAL = 3/4 FOIS UNITE AXE HORIZONTAL







4.2.5. REMARQUE

L'ordre des vins donné par chaque juge se retrouve dans l'intra-structure de ce juge. La méthode offre davantage d'intérêt lorsque les vins sont classés selon plusieurs critères, chacun des dégustateurs donnant son classement pour chaque critère : s'il y a  $p_i$  critères pour le  $i^{\text{ème}}$  juge, la donnée est :

$$\{ \tilde{0}^i : n \times p_i ; i = 1, m \}$$

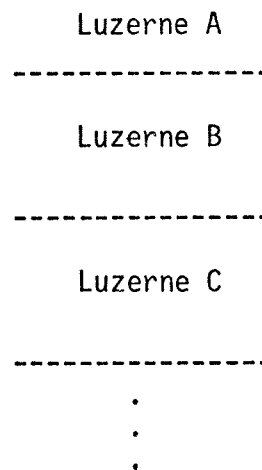
(n vins et m dégustateurs).

4.3 ANALYSE DE DONNEES CHRONOLOGIQUES  
=====

4.3.1. DONNEES

Les données proviennent d'une expérience biologique qui consiste à faire pousser des luzernes cote à cote :

A des instants différents l'expérimentateur coupe ces luzernes et pèse la matière sèche produite entre deux coupes.



Considérons quatre coupes notées C1, C2, C3 et C4 et, pour chacune d'elles, le tableau des mesures des quantités de matière produites ; à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de ce tableau, on lira la quantité de matière sèche produite par la  $i^{\text{ème}}$  luzerne en présence de la luzerne j.



(Les luzernes i et j sont mitoyennes). Supposons que six luzernes nous intéressent et notons-les : LA, LB, LC, LD, LE, LF . Ces données ne seront ni centrées, ni normalisées.

DONNÉES A TRAITER :

C1

0.27E 03	0.25E 03	0.34E 03	0.32E 03	0.33E 03	0.24E 03
0.20E 03	0.22E 03	0.27E 03	0.28E 03	0.27E 03	0.22E 03
0.63E 02	0.68E 02	0.11E 03	0.12E 03	0.11E 03	0.70E 02
0.75E 02	0.77E 02	0.13E 03	0.13E 03	0.13E 03	0.79E 02
0.63E 02	0.62E 02	0.97E 02	0.10E 03	0.12E 03	0.69E 02
0.19E 03	0.21E 03	0.24E 03	0.27E 03	0.27E 03	0.22E 03

C2

0.19E 03	0.19E 03	0.26E 03	0.25E 03	0.24E 03	0.16E 03
0.15E 03	0.14E 03	0.19E 03	0.21E 03	0.19E 03	0.13E 03
0.70E 02	0.85E 02	0.13E 03	0.13E 03	0.13E 03	0.72E 02
0.90E 02	0.92E 02	0.14E 03	0.14E 03	0.14E 03	0.71E 02
0.61E 02	0.55E 02	0.87E 02	0.11E 03	0.11E 03	0.49E 02
0.20E 03	0.20E 03	0.23E 03	0.24E 03	0.24E 03	0.19E 03

C3

0.71E 02	0.68E 02	0.90E 02	0.81E 02	0.84E 02	0.39E 02
0.85E 02	0.77E 02	0.11E 03	0.12E 03	0.10E 03	0.62E 02
0.66E 02	0.64E 02	0.90E 02	0.85E 02	0.88E 02	0.47E 02
0.82E 02	0.77E 02	0.10E 03	0.10E 03	0.10E 03	0.53E 02
0.54E 02	0.44E 02	0.65E 02	0.76E 02	0.73E 02	0.33E 02
0.17E 03	0.15E 03	0.18E 03	0.17E 03	0.18E 03	0.14E 03

C4

0.29E 02	0.29E 02	0.29E 02	0.29E 02	0.34E 02	0.12E 02
0.66E 02	0.59E 02	0.91E 02	0.81E 02	0.81E 02	0.38E 02
0.61E 02	0.66E 02	0.71E 02	0.69E 02	0.73E 02	0.41E 02
0.91E 02	0.64E 02	0.92E 02	0.84E 02	0.90E 02	0.38E 02
0.53E 02	0.41E 02	0.55E 02	0.66E 02	0.63E 02	0.24E 02
0.16E 03	0.13E 03	0.16E 03	0.14E 03	0.15E 03	0.11E 03

LA

LB

LC

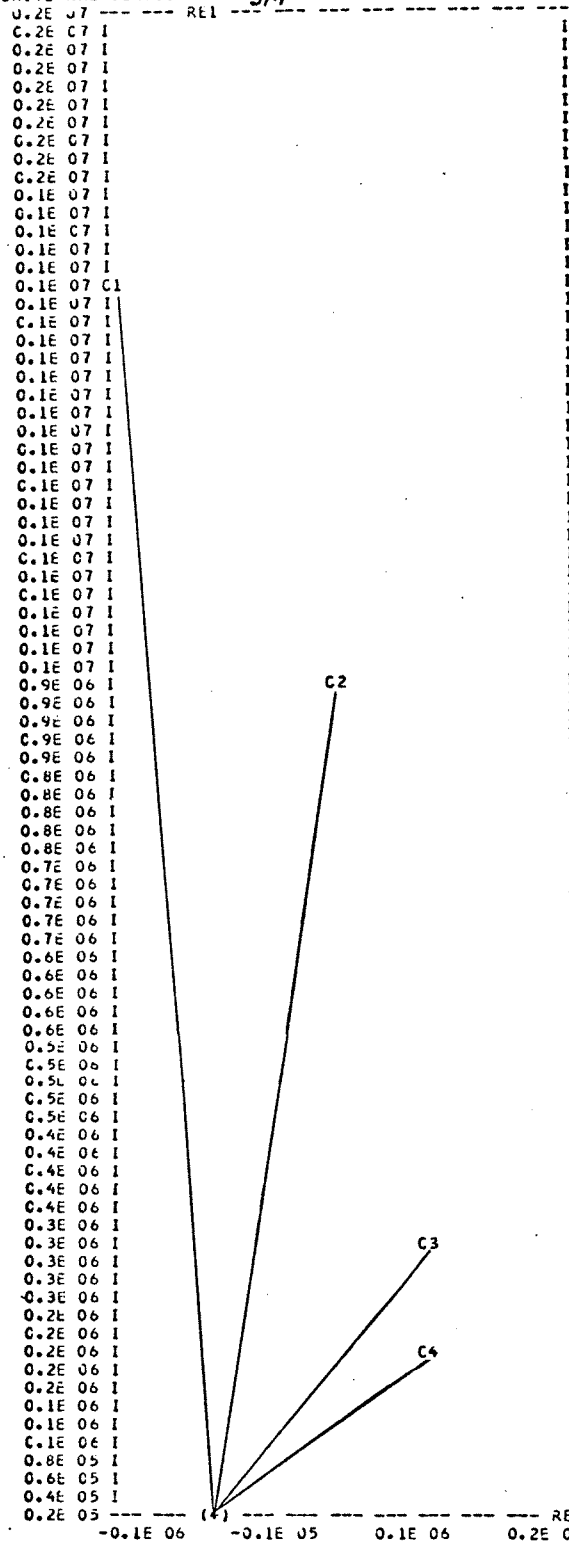
LD

LE

LF



LAMDA( 1) = 97. 0.0 4.  
 UNITE AXE VERTICAL = 3/4 FOIS UNITE AXE HORIZONTAL



4.3.2. INTER-STRUCTURE

Le plan 1-2 visualise 99,7 % de la variance totale.

LAMDA( 2) = 2.7 0.0 1.

QUALITE DE LA REPRESENTATION GRAPHIQUE MESUREE PAR LE POURCENTAGE D'ERREUR SUR LES DISTANCE (DUE A LA REDUCTION AU PLAN OU A L'AXE DE LA CONFIGURATION)

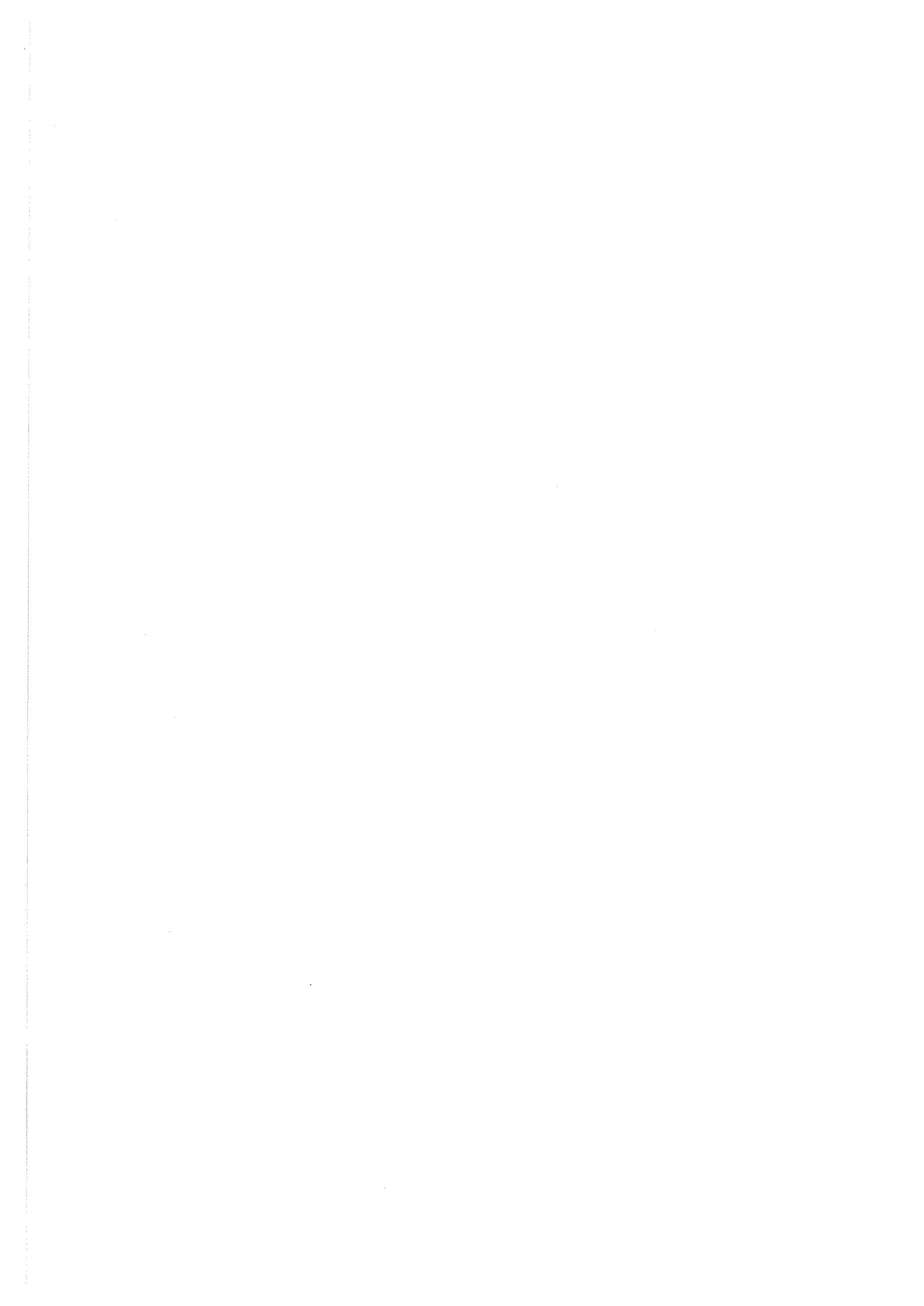
	C1	C2	C3	C4
C1	0.0			
C2	0.16E 01	0.0		
C3	0.74E-02	0.88E 00	0.0	
C4	0.49E-02	0.90E 00	0.18E 01	0.0

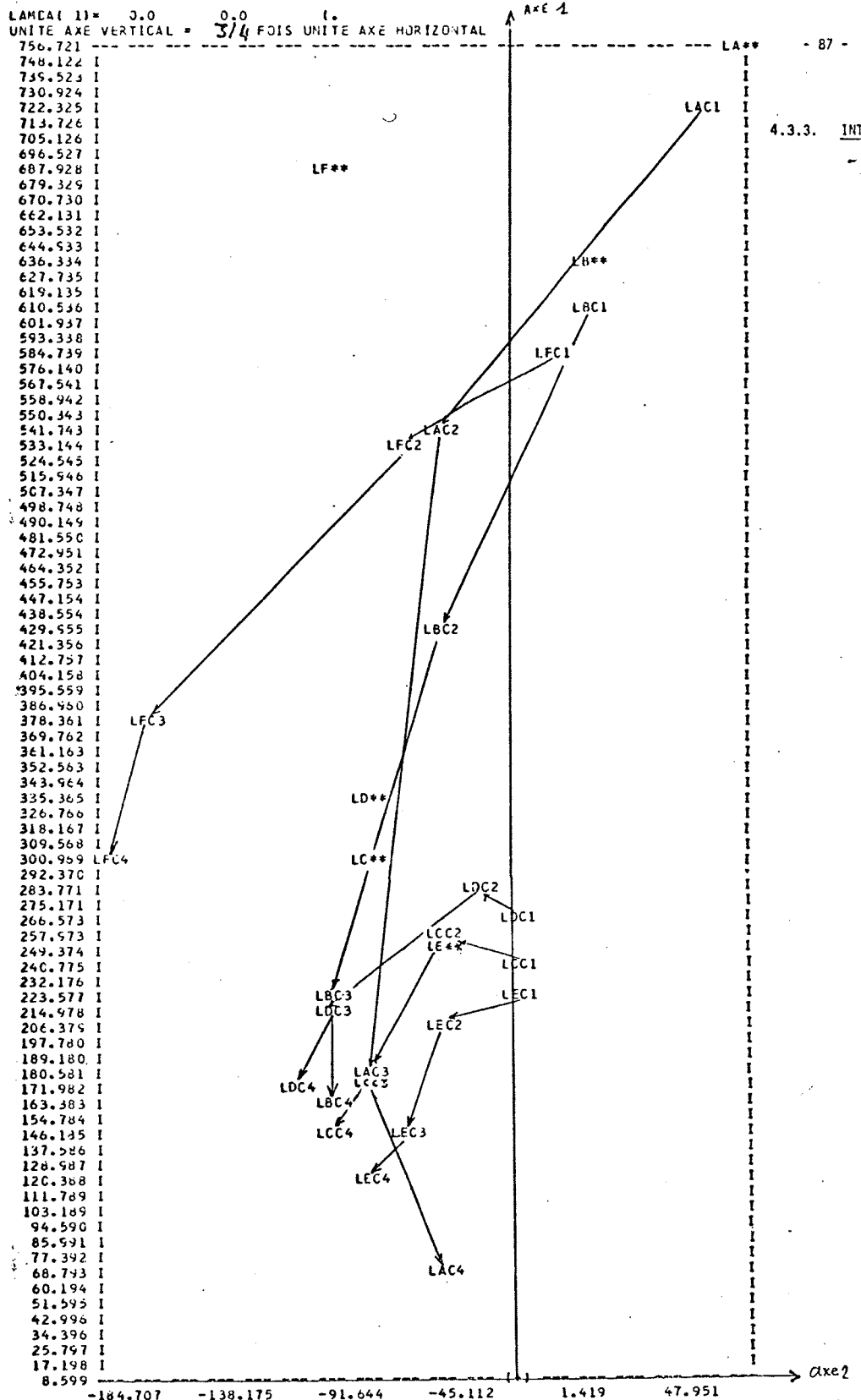
PROPRIETES DE LA REPRESENTATION 0

MESURE DE L'APPARTENANCE AU PLAN=DISTANCE DES JUGES A L'ORIGINE 0 EXACTE 0 PROJETEE 0

	EXACTE 0	PROJETEE 0
C1	0.14E 07	0.14E 07
C2	0.92E 06	0.92E 06
C3	0.35E 06	0.35E 06
C4	0.24E 06	0.23E 06

POUR 2 JUGES APPARTENANT AU PLAN FACTORIEL, LA PROXIMITE REPRESENTEE EST EXACTE ET, SI ON POSE  $\alpha(I, J)$  = ANGLE ENTRE LE REFERENTIEL I, L'ORIGINE 0 & LE JUGE J, ALORS 0  $\text{COSINUS}(\alpha(I, J)) = \text{COEF. RV}(\text{REFERENTIEL I, JUGE J})$ .





4.3.3. INTRA-STRUC  
 - RES :

POINTS MULTIPLES = (LCC2,LE\*\*)(LAC3,LCC3)(  
 % DE VARIANCE -- JUGES X AXES ;

	AXE 1	AXE 2
C1	99.3	0.524
C2	98.8	0.622
C3	86.3	13.0
C4	72.6	25.8
RE1	98.2	1.38

MESURE DE L'APPROXIMATION DUE AUX PROJECTIONS DANS L'ESPACE REFERENTIEL 1 DES 4 ESPACES INDIVIDU  
 ( COEFFICIENT RV ENTRE LE REFERENTIEL ET CHAQUE JUGE )

	C1	C2	C3	C4
RE1	0.10E 01	0.99E 00	0.87E 00	0.74E 00





#### 4.3.4. INTERPRETATION

Dans l'inter-structure, l'axe 1 représente un classement des coupes suivant leur production totale :

coupe	production
C1	919,11
C2	776,88
C3	479,55
C4	374,07

Les quatre coupes s'échelonnent au cours de l'été et il apparaît une contrainte en eau provoquant une diminution de production à chaque coupe.

L'évolution des luzernes est surtout représentée par l'axe 1 des intra-structures ; selon cet axe les luzernes sont positionnées en fonction de leur production au cours du temps. Les intra-structures permettent donc de détailler le phénomène "production" déjà décrit dans l'inter-structure.

La stabilité d'une luzerne (faible variation dans le rendement) est signe de sa résistance, ce que l'expérience confirmera par le fait que la luzerne A meurt entre la 4<sup>ème</sup> et la 5<sup>ème</sup> coupe.



## 5 - CONCLUSION

---

La méthode proposée ramène l'étude comparative de plusieurs tableaux de données à la recherche des liaisons entre les analyses des composantes principales qui seraient faites sur chacun des tableaux.

Les analyses sont comparées globalement en associant à chaque tableau un opérateur de la classe de HILBERT-SCHMIDT et en visualisant les proximités calculées entre ces opérateurs.

Le référentiel construit correspond à une analyse des composantes principales "meilleur compromis" entre toutes les A.C.P. de chaque tableau.

L'analyse des différences ou d'évolution entre ces A.C.P. est rendue possible en projetant, au sens de la régression, les espaces engendrés par le spectre de chaque opérateur dans l'espace engendré par le spectre de l'opérateur associé à la matrice de référence.

La cohérence de description au niveau des intra-structures est assurée d'une part parce qu'une analyse globale des tableaux permet de construire un opérateur de référence, d'autre part parce que le spectre de cet opérateur sert de repère référentiel pour la description de toutes les intra-structures.

Bien que la synthèse réalisée entre analyse-conjointe, positionnement & analyse de composantes principales soit réussie, il reste quelques imperfections à la méthode -quelques-unes ayant été signalées-.



Je remercie ceux qui voudront bien nous faire part de leurs critiques ; en échange, et pour terminer, j'esquisse quelques directions de développement à leur intention :

1 - Diversification des applications : appliquer la méthode (ou les idées qui y sont contenues) au traitement de variables qualitatives et comparer avec l'analyse canonique et celle des correspondances, l'appliquer aussi au traitement des données ordinales.

2 - En augmentant la taille des échantillons (sujets et juges) la description des données-mesures d'un phénomène tend vers la description du phénomène. Dans le cas de données chronologiques, il peut être avantageux de remplacer l'opérateur "référentiel" par un opérateur de "prévision" permettant de prolonger la trajectoire des sujets dans l'analyse de l'évolution.

3 - Généralisation des analyses -régression, discriminante...- en transposant leur formalisme dans l'espace des opérateurs. Dans cette voie la méthode proposée ici a montré comment une analyse des composantes du nuage d'opérateurs généralise l'analyse des composantes principales du nuage des sujets pour un seul tableau.



6 - ANNEXES

---

6.1 RAPPEL DE THEOREMES

=====

Les notations sont celles des auteurs de [17].

6.1.1. THEOREME 1

Etant données  $S : p \times p$ ,  $T : p \times p$  et  $W : p \times p$

la condition nécessaire pour que :

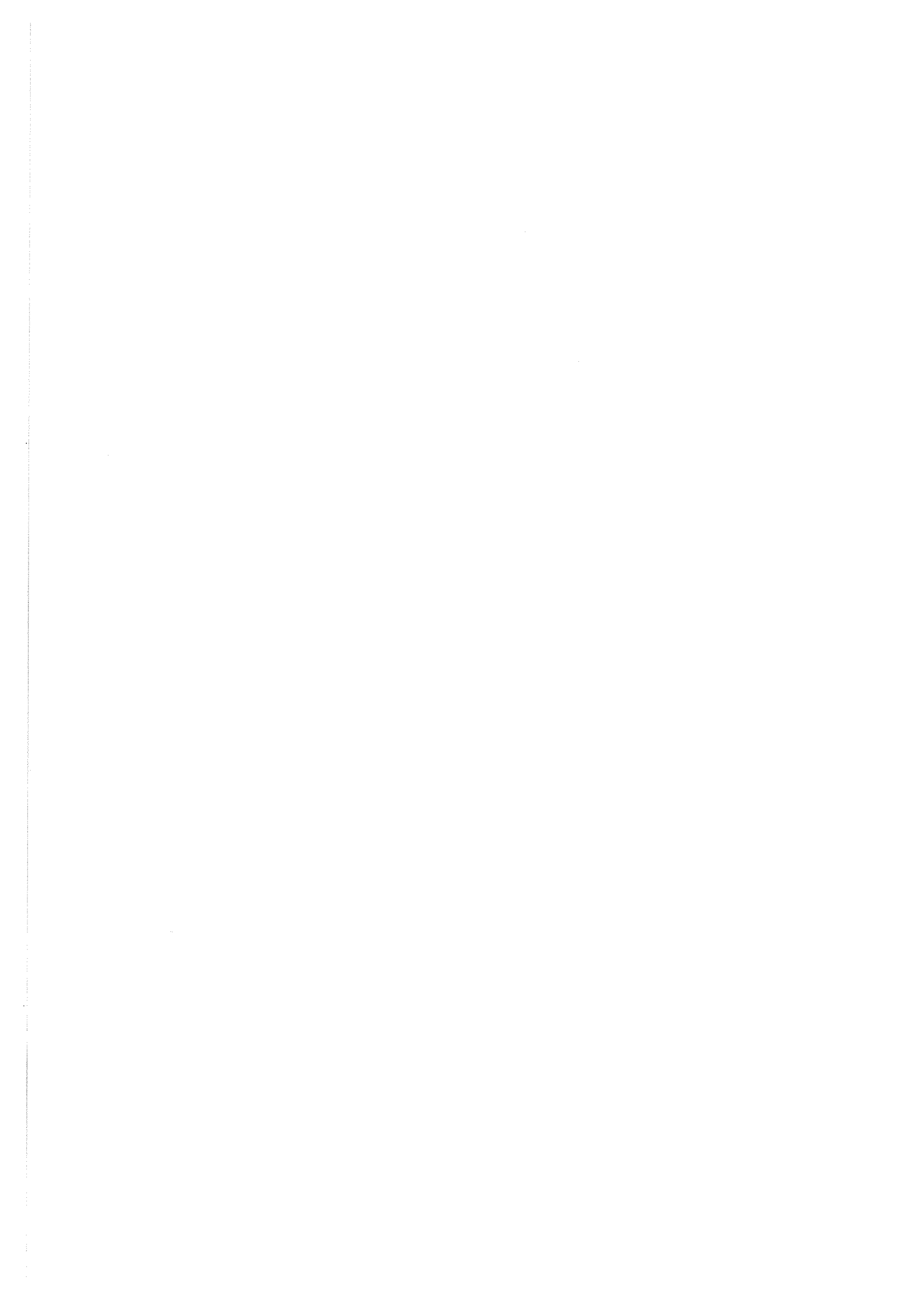
$$L = \sum_{i \leq j}^p W_{ij} (S_{ij} - \sum_{l=1}^p T_{li} T_{lj})^2$$

soit minimisée par rapport à  $T$  est  $T(A' + A) = 0$ , où  $A : p \times p$  est définie par :

$$A_{ij} = \begin{cases} W_{ij} (S_{ij} - \sum_{l=1}^p T_{li} T_{lj}) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : Une condition nécessaire pour qu'une fonction différentielle  $L$  soit un minimum par rapport à  $T$  est que les dérivées partielles par rapport à chaque élément de  $T$  soient égales à zéro, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_{kk'}} &= -2 \sum_{m=1}^{k'} W_{mk'} (S_{mk'} - \sum_{l=1}^p T_{lm} T_{lk'}) T_{km} \\ &\quad - 2 \sum_{n=k'}^p W_{k'n} (S_{k'n} - \sum_{l=1}^p T_{lk'} T_{ln}) T_{kn} \end{aligned}$$





Un calcul direct montre que

$$\frac{\partial L}{\partial T_{kk'}} = 0 \iff T(A' + A) = 0$$

### 6.1.2. COROLLAIRE

Une condition nécessaire pour que  $\text{Tr}(S - T'T)^2$  soit un minimum par rapport à  $T$  arbitraire est :  $T(S - T'T) = 0$ .

Preuve : On vérifie facilement que ,

$$L = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p W_{ij} (S_{ij} - \sum_{l=1}^p T_{li} T_{lj})^2 \quad \text{avec}$$

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ est équivalent à } \text{Tr}(S - T'T)^2$$

Minimiser  $L$  par rapport à chaque  $T_{kk'}$  revient à minimiser  $\text{Tr}(S - T'T)^2$  par rapport à  $T$  puisque pour ce choix de  $W$ ,  $L = \text{Tr}(S - T'T)^2$ .

Il découle du théorème 1 que :

$$(A' + A) = 2(S - T'T) \text{ d'où}$$

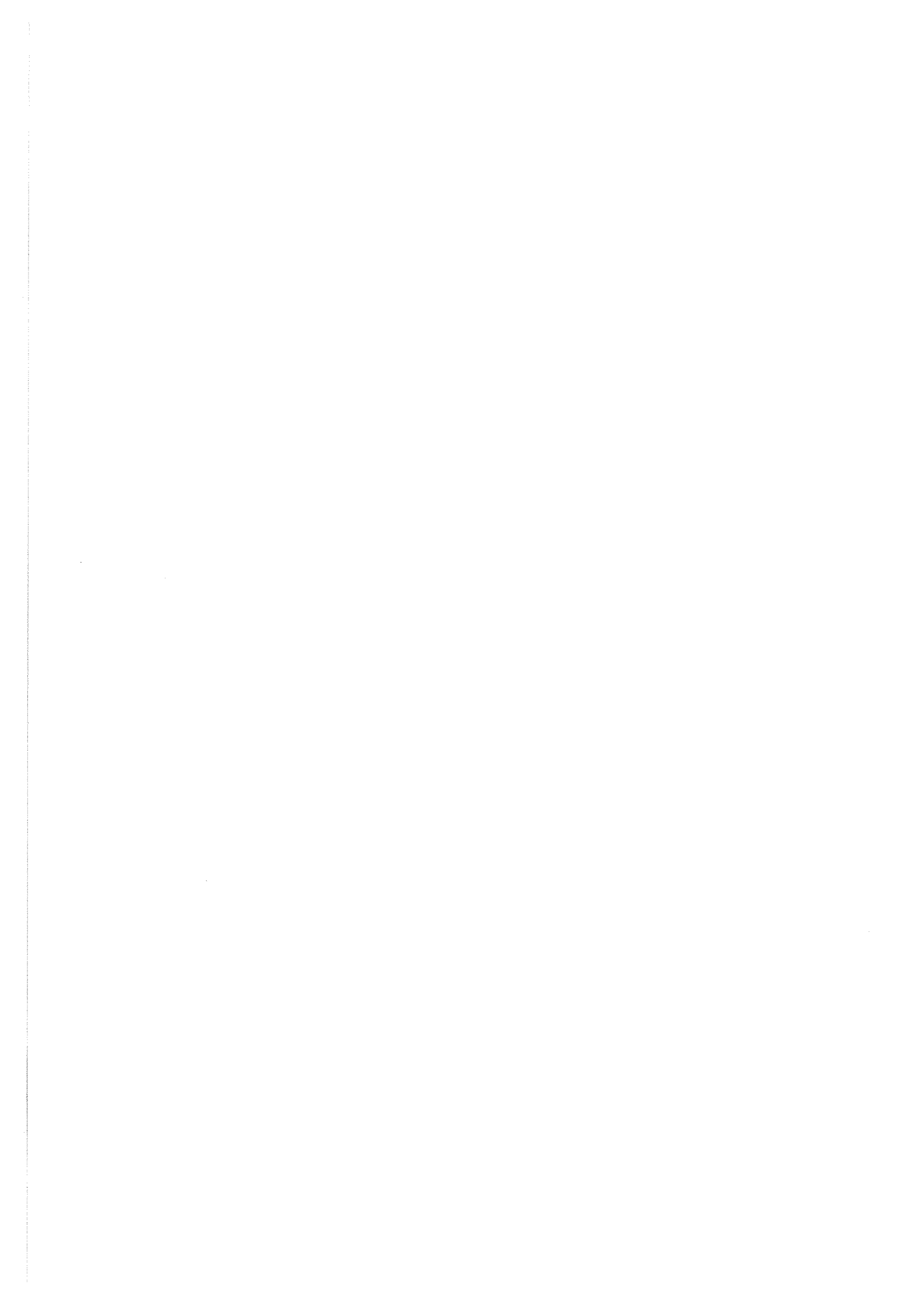
$$T(A' + A) = 0 \implies T(S - T'T) = 0.$$

### 6.1.3. THEOREME 2

Si  $S$  est une matrice réelle symétrique et si  $\text{Tr}(S - T'T)^2$  est minimisé par rapport à une matrice réelle  $T$ , alors

$$T'T = \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i P_i P_i'$$

où  $\lambda_i, P_i$  sont respectivement les valeurs propres positives et leurs vecteurs propres associés de  $S$ .



Preuve : Si S est semi-définie positive, il existe alors T telle que  $S = T'T$  et donc  $S - T'T = 0$  et la somme des carrés pour chaque élément est nulle et de ce fait un minimum.

Quand S est quelconque, on peut écrire :

$$S = P_1 \Lambda_1 P_1' - P_2 \Lambda_2 P_2' \quad \text{où}$$

1) -  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des matrices diagonales ayant des éléments non négatifs.

2) - Les éléments diagonaux de  $\Lambda_1$  sont les k valeurs propres non négatives de S.

3) - Les éléments diagonaux de  $\Lambda_2$  sont les valeurs absolues des (p-k) valeurs propres négatives de S.

4) -  $P_1$  est une matrice p x k des vecteurs propres associés aux valeurs propres non négatives respectives de S.

5) -  $P_2$  est une matrice p x (p-k) des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives négatives de S.

Le corollaire du théorème 1 établit que la condition nécessaire pour que  $\text{Tr} (S - T'T)^2$  soit un minimum par rapport à T est  $T(S - T'T) = 0$ .

Donc :  $T'T (S - T'T) = 0$  et  $(T'T(S - T'T))' = (0)'$  entraîne  $(S - T'T) T'T = 0$  puisque  $(S - T'T)$  est la différence de 2 matrices symétriques et est donc symétrique.

Donc :  $(S - T'T)$  et  $T'T$  commutent et ont les mêmes vecteurs propres (cf. GRAYBILL, (1961), théorème 1.32).

Il s'en suit que :

$$T'T = P_1 \Gamma_1 P_1' + P_2 \Gamma_2 P_2' \quad \text{et}$$

$$S - T'T = P_1 (\Lambda_1 - \Gamma_1) P_1' - P_2 (\Lambda_2 + \Gamma_2) P_2'$$



où  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement les mêmes matrices pour  $T'T$  et  $(S - T'T)$ ,  
et où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont des matrices diagonales d'éléments non négatifs ,

$$\begin{aligned} (S - T'T)^2 &= P_1(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 P_1' - P_1(\Lambda_1 - \Gamma_1) P_1' P_2(\Lambda_2 + \Gamma_2) P_2' \\ &\quad - P_2(\Lambda_2 + \Gamma_2) P_2' P_1(\Lambda_1 - \Gamma_1) P_1' + P_2(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2 P_2' \end{aligned}$$

Puisque  $P_1$  et  $P_2$  sont des matrices de vecteurs propres de  $S$ , elles sont orthogonales (entre elles) et les produits croisés sont nuls.

D'où :

$$(S - T'T)^2 = P_1(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 P_1' + P_2(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2 P_2'$$

Minimiser  $\text{Tr}(S - T'T)^2$  revient à minimiser les valeurs propres de  $(S - T'T)^2$  (on le vérifie facilement en notant que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S - T'T)^2 &= \text{Tr}(P_1(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 P_1') + \text{Tr}(P_2(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2 P_2') \\ &= \text{Tr}(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 P_1' P_1 + \text{Tr}(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2 P_2' P_2 \\ &= \text{Tr}(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 + \text{Tr}(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2 \\ &= \text{la somme des valeurs propres de } (S - T'T)^2 . ) \end{aligned}$$

Pour minimiser  $\text{Tr}(S - T'T)^2$ , il faut choisir  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de telle sorte que la somme des valeurs propres de  $(S - T'T)^2$  soit un minimum.

Ainsi  $\text{Tr}(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2 + \text{Tr}(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2$  est minimisé à condition que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  soient des matrices diagonales d'éléments non négatifs. Puisque  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont des matrices diagonales ayant des éléments non négatifs, on en déduit que  $\text{Tr}(\Lambda_2 + \Gamma_2)^2$  est minimisé lorsque  $\Gamma_2 = 0$  et  $\text{Tr}(\Lambda_1 - \Gamma_1)^2$  est minimisé lorsque  $\Gamma_1 = \Lambda_1$ .



Donc  $T'T = P_1 \Lambda_1 P_1'$  ce qui équivaut à

$$T'T = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i P_i P_i'$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres positives et  $P_i$  sont les vecteurs propres associés.

-0-0-0-0-0-





7 - BIBLIOGRAPHIE

---

- 1 - BOUROCHE J.M. (1972)  
Note de travail n° 174 , S.E.M.A. (M.I).
- 2 - BOUROCHE J.M. (1975)  
Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI.
- 3 - CARROLL J.D. & CHANG J.J. (1972)  
Handout for talk on IDIOSCAL  
Bell. Labs. M.H.N.J.
- 4 - C.E.E.E. (1974)  
Analyse des données multidimensionnelles  
C.3E, PARIS.
- 5 - DUSSAIX A.M. (1973)  
Note de travail n° 191, S.E.M.A. (M.I.).
- 6 - ESCOUFIER Y. (1970)  
Thèse d'état, Faculté des Sciences de Montpellier.
- 7 - ESCOUFIER Y. (1973)  
Le traitement des variables vectorielles  
Biometrics 29, 750, 760
- 8 - ESCOUFIER Y. (1973)  
L'analyse canonique  
Ch. 5, cours DEA, Mathématiques Appliquées, Montpellier.
- 9 - ESCOUFIER Y. (1974)  
Le positionnement multidimensionnel  
Rapport Technique n° 7404, CRIG , Montpellier.



- 10 - ESCOUFIER Y. (1975)  
Utilisation de la notion d'opérateur associé à un tableau  
Note de travail , journées d'études , INSEE.
- 11 - FENELON J.P. & LEBART L. (1973)  
Statistique et Informatique Appliquées  
DUNOD.
- 12 - GOWER J.C. (1966)  
Some distances properties of latent root  
Biometrika, vol. 53.
- 13 - GOWER J.C. (1968)  
Adding a point to vector diagramm  
Biometrika, vol. 55,3 .
- 14 - GOWER J.C. (1971)  
A general coefficient of similarity  
Biometrika, vol. 27.
- 15 - KRUSKAL J.B. (1964)  
Non metric multidimensional scaling  
Psychometrika , vol. 29, n° 2.
- 16 - KRUSKAL J.B. (1964)  
Multidimensional scaling by optimizing godness of fit  
Psychometrika, Vol. 29, n° 1.
- 17 - NEIL C., SCHWERTMAN, ALLEN D.M. (1973)  
The smoothing of an indefinite matrix with applications to  
growth curve analysis with missing observations  
Rapport Technique n° 56 , Université du KENTUCKY.
- 18 - N.I.L.E.S. (procédure) (1971)  
Note de travail n° 143 , S.E.M.A. (Metra International)



- 19 - RAO C.R. (1965)  
Revue Sankhya A , vol. 26, pages 239-358.
- 20 - TORGERSON W.S. (1958)  
Theory and method of scaling  
Wiley & Sons, Inc. , New-York.
- 21 - TUCKER L.R. (1973)  
L'analyse conjointe  
cours DEA, Mathématiques Appliquées, Montpellier

-0-0-0-0-

