UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES DE GRENOBLE

INSTITUT DE SCIENCES SOCIALES ET MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DEPARTEMENT INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUE EN SCIENCES SOCIALES

==========

"UNE η-ACP D'UN HYPERCUBE DE DONNEES"

==========

Thèse pour le doctorat de 3ème cycle en

Mathématiques appliquées aux Sciences Sociales

présentée et soutenue publiquement

le 11 avril 1986

par

Esteban POLIT M.O.

Président : Monsieur Guy ROMIER

Examinateurs : Monsieur Pierre CAZES

Monsieur G.DROUET D'AUBIGNY

UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES DE GRENOBLE

INSTITUT DE SCIENCES SOCIALES ET MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DEPARTEMENT INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUE EN SCIENCES SOCIALES

==========

"UNE η-ACP D'UN HYPERCUBE DE DONNEES"

========

Thèse pour le doctorat de 3ème cycle en

Mathématiques appliquées aux Sciences Sociales

présentée et soutenue publiquement

le 11 avril 1986

par

Esteban POLIT M.O.

Président : Monsieur Guy ROMIER

Examinateurs : Monsieur Pierre CAZES

Monsieur G.DROUET D'AUBIGNY

Henk Kiers

UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES DE GRENOBLE

INSTITUT DE SCIENCES SOCIALES ET MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DEPARTEMENT INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUE EN SCIENCES SOCIALES

==========

"UNE π-ACP D'UN HYPERCUBE DE DONNEES"

========

Thèse pour le doctorat de 3ème cycle en

Mathématiques appliquées aux Sciences Sociales

présentée et soutenue publiquement

le 11 avril 1986

par

Esteban POLIT M.O.

Président : Monsieur Guy ROMIER

Examinateurs : Monsieur Pierre CAZES

Monsieur G.DROUET D'AUBIGNY

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Guy ROMIER, Professeur à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble pour m'avoir proposé cette voie de recherche, pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du Jury.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Gérard DROUET D'AUBIGNY, Maître Assistant à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble pour avoir dirigé ce travail. Sa disponibilité permanente, ses conseils, ses remarques minutieuses ont été déterminantes. La patience qu'il a eu de lire et corriger mes manuscrits à plusieurs reprises a permis l'achèvement de cette thèse.

Je remercie Monsieur Pierre CAZES Professeur à l'Université Paris-Dauphine qui a eu la gentillesse de se déplacer à Grenoble en me faisant l'honneur de participer au Jury.

Un grand MERCI à tous mes collègues de l'IMSS pour leur amical soutien et plus spécialement à Monsieur Michel PLAUHINEC qui m'a beaucoup aidé tout au long de mon travail.

Je remercie aussi les personnels administratifs de l'IMSS et du Département Statistique de l'IUT II de Grenoble ainsi que Madame Geneviève BICAIS qui a frappé avec soin cette thèse.

TABLE DES MATIERES

I - INTRODUCTION

1.1 - Premières définitions ---------- 1
1.1.1 - Définition de n-hypercube de données -------- 1
1.1.2 - Représentations d'un n-hypercube ---------- 3
1.1.3 - Représentation matricielle d'un n-hypercube de données ---------- 5
1.2 - La généralisation du modèle TUCKER3 ---------- 9
1.3 - Brève description du travail par chapitres ---------- 16

II - UNE INTERPRETATION DE L'A.C.P. COMME UNE PROJECTION DANS $E^* \otimes F^*$ ---------- 17

2.1 - Notations et lemmes ---------- 18
2.2 - L'espace $E^* \otimes F^* = \mathcal{L}_2(E \times F ; \mathbb{R})$ ---------- 21
2.3 - Les sous-espaces $\langle E', F' \rangle$ de $E^* \otimes F^*$ ---------- 25
2.4 - La recherche du sous-espace de la forme $\langle E', F' \rangle$ plus proche de $x \in E^* \otimes F^*$ ---------- 31
2.4.1 - Le problème ---------- 32
2.4.2 - Une propriété de la solution ---------- 33
2.4.2.1 - Le système ---------- 33
2.4.2.2 - Une solution du système ---------- 35
2.4.3 - La solution du problème P2 ---------- 39
2.4.4 - Un cas particulier : le meilleur sous-espace de la forme $\langle E, F' \rangle$ ---------- 43
2.5 - Une caractérisation de l'ensemble Γ ---------- 45

III - UNE GENERALISATION DE L'A.C.P. ---------- 51

3.1 - Notations ---------- 52

3.2 - L'espace $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i^* = \mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n ; \mathbb{R})$ ---------- 54

3.3 - Un isomorphisme d'espace euclidien entre E^* et $M_{\mathbb{R}}$ -------- 57

3.3.1 - L'isomorphisme ---------- 57

3.3.2 - La matrice de $y = Q(x)$ ---------- 60

3.3.3 - L'effet d'un changement des bases ---------- 63

3.3.4 - Un cas particulier et une nouvelle notation- ----- 65

3.4 - Le sous-espace de la forme $<\{F_i\}>$ ---------- 66

3.5 - L'ensemble Γ ---------- 71

3.6 - Une généralisation du modèle de Tucker : le modèle TUCKERN ---------- 78

3.6.1 - Le modèle TUCKERN ---------- 78

3.6.2 - Le problème de la décomposition d'un tenseur ----- 83

3.6.3 - La solution du modèle TUCKERN. L'algorithme TUCKALSN ---------- 88

3.6.3.1 - Une condition nécessaire : le système S2 88

3.6.3.2 - Résolution algorithmique du système S2 - 90

3.6.3.2.1 - Un changement de base pour simplifier les calculs ---------- 90

3.6.3.2.2 - L'algorithme TUCKALSN ---------- 91

3.6.3.2.3 - La pertinence de l'algorithme --- 95

3.6.3.2.4 - La solution rapportée à la base de départ ---------- 110

3.6.4 - Quelques propriétés de la solution ---------- 111

3.6.4.1 - La qualité de la représentation -------- 112

3.6.4.2 - L'emboîtement ---------- 115

IV - CUBE CENTRAL, COMPOSANTES PRINCIPALES, PROPRIETES D'OPTIMALITÉ ---------- 121

4.1 - Cube central, composantes principales : définitions -------- 122

4.1.1 - L'hypercube central et l'hypercube des n-composantes principales ---------- 124
4.1.2 - Les représentations matricielles du cube central et des composantes principales ---------- 127
4.1.3 - Un cas particulier : le cas $n_2 = \{k\}$ ---------- 130
4.1.3.1 - La matrice des k-composantes principales - 130
4.1.3.2 - La $j^{ème}$ k-composante principale ---------- 132
4.1.4 - Les n-composantes principales comme une généralisation des composantes principales d'une ACP ---------- 134

4.2 - Propriétés d'optimalité des composantes principales -------- 136

4.2.1 - Meilleure représentation euclidienne d'une matrice - 137
4.2.1.1 - Définition ---------- 137
4.2.1.2 - Une propriété des meilleures représentations euclidiennes ---------- 138
4.2.2 - Propriétés d'optimalité des composantes principales de l'ACP ---------- 139
4.2.3 - Propriétés conservées par la n-ACP ---------- 147
4.2.4 - Propriétés perdues par la n-ACP ---------- 161

V - UNE INTERPRETATION DES SORTIES DE LA n-ACP ---------- 169

5.1 - Une interpretation des matrices U_i. Les éléments idéaux ---- 172

5.2 - Une interpretation du cube central ---------- 175

5.3 - Une interprétation des matrices des n-composantes principales 177

5.4 - Les espaces E^k et F^k des individus ---------- 179

5.4.1 - La représentation cartésienne ---------- 179
5.4.2 - La qualité des représentations et les contributions 184
5.4.3 - Interprétation de la représentation cartésienne de F^k ---------- 188

5.5 - L'espace des conditions et la matrice des k-composantes principales ---------- ---------- 190

5.6 - Meilleure représentation cartésienne d'un nuage de points - 192

5.7 - Les ACP des représentations matricielles du cube projeté. Les représentations graphiques des lignes et colonnes de $\hat{X}^n$ ---------- 199

ANNEXES ---------- 209

BIBLIOGRAPHIE ---------- 291

CHAPITRE I - INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est d'étendre l'Analyse en Composantes Principales à l'étude des tableaux à n entrées. Plusieurs travaux ont été publiés dans ce sens. Ils ont traité le sujet du point de vue de la factorisation d'une matrice multi-dimensionnelle. Nous considérons les données comme définissant une forme n-linéaire que nous essayons d'approcher par une forme n-linéaire de rang plus petit. Cette approche nous permet d'introduire des métriques autres que la métrique unité et d'obtenir des interprétations simples des représentations graphiques et des résultats obtenus.

Ce premier chapitre introductif précise la portée de notre étude, le situe par rapport aux travaux publiés sur le sujet et met en place quelques notations préliminaires employées dans la suite.

On définit tout d'abord les concepts de n-hypercube de données et de matrice multidimensionnelle et l'on introduit la notion de représentation matricielle d'un n-hypercube de données. On précise ensuite la signification de ce que nous appelons n-Analyse en Composantes Principales, et finalement on décrit d'une manière très succinte le contenu des chapitres de cette thèse.

1.1 - PREMIERES DEFINITIONS

1.1.1 - Définition de n-hypercube de données

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note [n] l'ensemble des n premiers entiers positifs. Lorsqu'il n'y a pas possibilité de confusion on pourra écrire n à la place de [n].

Soient $\{p_i\}_{i \in n}$ une famille de n entiers positifs et $P = \{[p_i]\}_{i \in n}$ la famille des ensembles non vides $[p_i]$ associée à la famille $\{p_i\}_{i \in n}$. Notons C le produit cartésien des éléments de P :

$$C = [p_1] \times [p_2] \times \ldots \times [p_n] = \prod_{i=1}^{n} [p_i] = \{1,\ldots,p_1\} \times \{1,\ldots,p_2\} \times \ldots \times \{1,\ldots,p_n\}$$

le cardinal de C est :

$$\text{card}(C) = \prod_{i=1}^{n} p_i =: p$$

On appelle n-hypercube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i \in n}$ toute application χ de C dans $\mathbb{R}$:

$$\chi : C \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \mapsto \chi(i_1, i_2, \ldots, i_n) =: x_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Puisque en général on n'exige pas pour tous i et j que p_i soit égal à p_j il serait plus exact de parler d'hyper-parallélépipède de données, néanmoins cette imprécision ne conduisant pas à des ambigüités on préfère par simplicité utiliser le mot cube. De même on utilise indistinctement les mots cube et hypercube lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

La matrice réelle n-dimensionnelle de terme générique

$$(x_{i_1 i_2 \ldots i_n}) : \begin{matrix} i_1 \in [p_1] \\ i_2 \in [p_2] \\ \vdots \\ i_n \in [p_n] \end{matrix}$$

est, elle aussi, appelée n-hypercube de données.
On dit que le cube de données χ est constitué de n modes, le i-ème mode ayant p_i éléments.

Exemple : Un 3-cube de notes :

Dix individus participent à chacune des 5 épreuves d'une compétition, chaque participation est notée par 4 juges. La fonction qui à tout triplet formé par un individu, une épreuve et un juge assigne la note correspondante est un 3-cube de données. Le premier mode de ce cube est constitué par les

10 individus ; le deuxième par les 5 épreuves et le troisième par les 4 juges. Si $i \in [10]$, $j \in [5]$, et $k \in [4]$ alors x_{ijk} désigne la note attribuée par le $k^{ème}$ juge au $i^{ème}$ individu dans le $j^{ème}$ épreuve.

1.1.2 - Représentations d'un n-hypercube

Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n et soit σ une relation d'ordre total sur A. Si $i \in [n]$ on désigne par $\sigma(i)$ le $i^{ème}$ élément de A selon l'ordre σ. Si a est le $i^{ème}$ élément de l'ensemble A selon l'ordre σ, c'est-à-dire si $\sigma(i) = a$, on écrit $\sigma^{-1}(a) = i$ ou bien pos(a) = i. pos(a) indique le rang de l'élément a dans l'ensemble ordonné A.

Soient χ et C définis au paragraphe précédent, et σ une relation d'ordre totale sur C. On dit que le n-uple ordonné.

$$(\chi(\sigma(1)), \chi(\sigma(2)), \ldots \chi(\sigma(n))$$

constitue la σ-représentation du cube de données χ.
Il est clair qu'à chaque relation d'ordre σ définie sur C correspond une seule représentation de χ. Deux relations d'ordre sur C sont privilégiées dans ce travail pour représenter un cube de données : l'ordre lexicographique et l'ordre σ-lexicographique :

Ordre lexicographique :

Soient $c = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ et $c' = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ deux éléments de C. Si pour tout $k \in [n]$ $i_k = j_k$ on a c = c'. Si ceci n'est pas le cas il existe un unique $k \in [n]$ tel que

$$(i_k \neq j_k) \text{ et } (k' < k \Rightarrow i_{k'} = j_{k'})$$

alors si $i_k < j_k$ on pose $c < c'$ sinon $c' < c$.
On montre que la relation $<$ ainsi construite est une relation d'ordre total sur l'ensemble C, appelée ordre lexicographique.
Les éléments de C ordonnés lexicographiquement sont :

$$(1,1,\ldots,1) < (1,1,\ldots,2) < (1,1,\ldots,3) < \ldots < (1,1,\ldots p_n)$$
$$< (1,1,\ldots,2,1) < \ldots < (p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

cet ordre est caractérisé par le fait qu'une composante varie d'autant plus vite qu'elle est placée plus à droite du n-uple.
La <-représentation du cube χ est alors :

$$(x_{11\ldots1}, x_{11\ldots2}, x_{11\ldots3}, \ldots, x_{11\ldots p_n}, x_{11\ldots21}, \ldots, x_{11\ldots2p_n}, \ldots, x_{p_1p_2\ldots p_n})$$

Ordre σ-lexicographique

Soit σ une permutation de l'ensemble $[n] = \{1,2,\ldots, n\}$. σ est une bijection de $[n]$ dans $[n]$, qui permet de définir sur C la relation d'ordre $<_\sigma$ suivante :
Soient $c = (i_1,i_2,\ldots,i_n)$ et $c' = (j_1,j_2,\ldots,j_n)$ deux éléments de C ; si $c \neq c'$ il existe un unique $k \in [n]$ tel que

$$(i_{\sigma(k)} \neq j_{\sigma(k)}) \text{ et } (k' < k \Rightarrow i_{\sigma(k')} = j_{\sigma(k')})$$

alors si $i_{\sigma(k)} < j_{\sigma(k)}$ on pose $c <_\sigma c'$; et on pose $c' <_\sigma c$ dans le cas contraire.
On montre qu'en effet $<_\sigma$ est une relation d'ordre sur C et on l'appelle l'ordre σ-lexicographique. La représentation de χ selon l'ordre $<_\sigma$ est appelée la σ-représentation de χ.

Exemple : Soient n=3, p_1=3, p_2=2, p_3=2. On définit le 3-cube de données χ par :

$$\chi : \{1,2,3\} \times \{1,2\} \times \{1,2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(3,1,2)	$x_{312} = 10$
(2,2,2)	$x_{222} = 8$
(2,1,1)	$x_{211} = 5$
(2,2,1)	$x_{221} = 7$
(1,2,1)	$x_{121} = 3$
(1,1,1)	$x_{111} = 1$
(3,2,2)	$x_{322} = 12$
(3,2,1)	$x_{321} = 11$
(3,1,1)	$x_{311} = 9$
(2,1,2)	$x_{212} = 6$
(1,2,2)	$x_{122} = 4$
(1,1,2)	$x_{112} = \sqrt{2}$

La représentation de χ selon l'ordre lexicographique est :
$(1,\sqrt{2},3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)$.
Si σ est la permutation $\sigma\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ les éléments de C écrits par ordre croissant sont :

(1,1,1), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,1), (3,1,1), (3,2,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,2), (3,1,2), (3,2,2) ; et la σ-représentation du cube χ est $(1,3,5,7,9,11,\sqrt{2},4,6,8,10,12)$; dans cette représentation l'indice qui varie le plus vite est le deuxième et le troisième est le plus lent.

1.1.3 -Représentation matricielle d'un n-hypercube de données.

Soit A un ensemble de cardinal supérieur à 2. On appelle bi-partition de A toute partition de A en deux classes. Si l'on dote chacune de ces deux classes d'un ordre total on parle de bipartition ordonnée.

Toute bipartition ordonnée de [n] permet de définir une permutation sur cet ensemble : soit $\pi = \{\pi_1,\pi_2\}$ une bipartition ordonnée de [n]. Notons $n_1 = \text{card}(\pi_1)$ et $n_2 = \text{card}(\pi_2)$. Evidemment :

$$n_1+n_2 = n \; ; \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \; ; \quad \pi_1 \cup \pi_2 = [n].$$

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ les ordres définis sur π_1 et π_2 respectivement. On définit la permutation σ par :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n_1 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n_1) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n_1 & n_1+1 & \dots & n\\ \mathcal{O}_1(1) & \mathcal{O}_1(2) & \dots & \mathcal{O}_1(n_1) & \mathcal{O}_2(1) & \dots & \mathcal{O}_2(n_2)\end{pmatrix}$$

et on dit que σ est la permutation associée à π.

Réciproquement la donnée d'une permutation σ de [n] et d'un entier n_1 $(1 \le n_1 < n)$ permet de définir une unique bipartition ordonnée de [n]. L'entier n_1 sert à "couper" la permutation.

Soient alors χ un cube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i \in n}$, η une bipartition ordonnée de [n] et σ la permutation associée à η. Soient C_1 et C_2 les produits cartésiens des familles $\{[p_{\sigma(i)}]\}_{i \in [n_1]}$ et $\{[p_{\sigma(n_1+i)}]\}_{i \in [n_2]}$ respectivement et considérons C_1 et C_2 ordonnés lexicographiquement. Soient $(j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \ldots, j_{\sigma(n_1)})$ le $i^{ème}$ élément de C_1 et $(j_{\sigma(n_1+1)}, j_{\sigma(n_1+2)}, \ldots, j_{\sigma(n)})$ le $j^{ème}$ élément de C_2 c'est-à-dire

$$pos((j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \ldots, j_{\sigma(n_1)})) = i$$

$$pos((j_{\sigma(n_1+1)}, \ldots, j_{\sigma(n)})) = j.$$

Définition :

La matrice (tableau croisé) $\overset{\eta}{X}$ de terme générique

$$\overset{\eta}{X}_{ij} = x_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_n}$$

est dite la représentation matricielle du cube χ correspondant à la bipartition ordonnée η. On dit aussi que $\overset{\eta}{X}$ est la η-représentation matricielle de χ.

Le nombre de lignes de $\overset{\eta}{X}$ est : $\prod_{i=1}^{n_1} p_{\sigma(i)} =: p^1$;

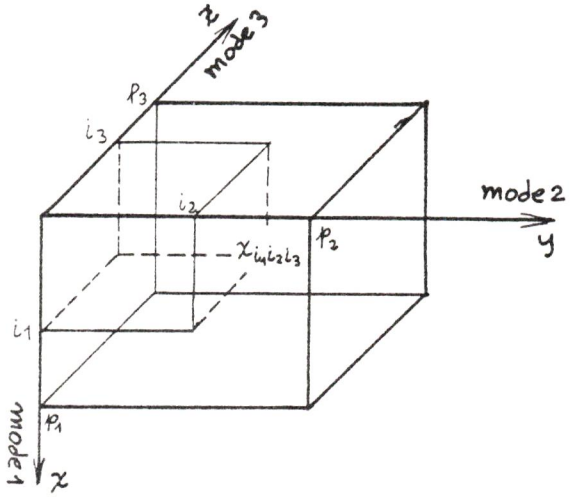
et le nombre de colonnes : $\prod_{i=1}^{n_2} p_{\sigma(n_1+i)} =: p^2$

alors $\overset{\eta}{X} \in M_{\mathbf{R}}(p^1, p^2)$.

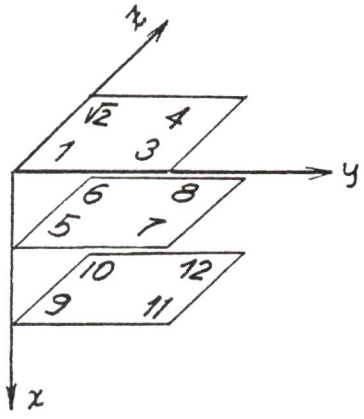
La matrice $\overset{\eta}{X}$ est formée d'autant de lignes qu'il y a d'éléments dans l'ensemble C_1, car elle associe une ligne à chaque n_1-uple d'éléments appartenant aux modes $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)$ de la première classe η_1 de la bipartition η. De même $\overset{\eta}{X}$ a autant de colonnes qu'il y a d'éléments dans le produit cartésien C_2 puisqu'elle associe une colonne à chaque n_2-uple d'éléments des modes $\sigma(n_1+1), \sigma(n_1+2), \ldots, \sigma(n)$ correspondants à la deuxième classe de la bipartition η. La matrice $\overset{\eta}{X}$ est donc un tableau de réels ou

l'on croise d'une part le croisement des modes $\sigma(1)$, $\sigma(2),\ldots,\sigma(n_1)$ avec d'autre part le croisement des modes $\sigma(n_1+1),\ldots,\sigma(n)$. Elle est interprétée dans la suite comme une matrice dont l'indice de ligne parcourt par ordre lexicographique l'ensemble C_1 et l'indice de colonne l'ensemble C_2. Un n-hypercube de données peut avoir $(n-1)\,n!$ représentations matricielles associées à des bipartitions ordonnées. n! étant le nombre de permutations et (n-1) le nombre defaçons différentes de couper une permutation de [n].

Exemple : Si n=3 on peut donner la représentation graphique suivante du cube χ :



On indique l'élément i_1 du premier mode sur l'axe x, l'élément i_2 du deuxième mode sur l'axe y et l'élément i_3 du troisième mode sur l'axe z. Alors, le 3-cube de données de l'exemple précédent peut se représenter par :



Si π = {{3,1},{2}} la π-représentation matricielle de χ est la matrice formée en écrivant les sections horizontales les unes au dessous des autres :

	1	2
(1,1)	1	3
(2,1)	$\sqrt{2}$	4
(1,2)	5	7
(2,2)	6	8
(1,3)	9	11
(2,3)	10	12

Notons que si π = {{2}, {3,1}} la π-représentation matricielle de χ est la matrice transposée de la précédente. La représentation correspondante à π = {{3}, {1,2}} est :

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
1	1	3	5	7	9	11
2	$\sqrt{2}$	4	6	8	10	12

qui consiste à écrire en ligne les sections frontales développées ligne par ligne.

De façon conventionnelle on considère que la π-représentation matricielle du cube χ exprime en ligne les coordonnées des "individus" de C_1 dans l'espace des "variables" de C_2. Il est clair que l'on peut construire un nombre très élevé de matrices à partir d'un cube de données. La plupart d'entre elles sont probablement dépourvues de signification, cependant les matrices construites à partir des bipartitions ordonnées, par contre, nous renseignent sur le comportement d'un mode (ou d'un croisement de modes) par rapport au croisement des modes restants. Bien que ces matrices ne contiennent pas toute l'information portée par le cube χ car elles ne respectent pas la structure initiale, du fait de leur interprétation simple on est amené à les utiliser lors de l'analyse d'un n-hypercube de données.

1.2 - LA GENERALISATION DU MODELE TUCKER 3

En 1966 L.R. Tucker proposa parmi d'autres problèmes la décomposition algébrique d'un 3-cube de données. Le problème traité est le suivant :

Etant donné le 3-cube χ associé à la famille $\{p_i\}_{i \in [3]}$, trouver :

- une famille $\{q_i\}_{i \in [3]}$ où $\forall i \in [3]$ $q_i \leq p_i$;
- un 3-cube h associé à la famille $\{q_i\}$; et ,
- trois matrices U_i ($i \in [3]$) à colonnes orthonormées tels que pour tout $(i_1,i_2,i_3) \in [p_1] \times [p_2] \times [p_3]$

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{j_1=1}^{q_1} \sum_{j_2=1}^{q_2} \sum_{j_3=1}^{q_3} u^1_{i_1 j_1} u^2_{i_2 j_2} u^3_{i_3 j_3} h_{j_1 j_2 j_3} \qquad (1)$$

où u^k_{ij} représente le réel en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de U_k.
Cette décomposition est toujours réalisable et elle est analogue de la décomposition spectrale d'une matrice. Tucker montre qu'une solution à ce problème peut être obtenue en réalisant les analyses en composantes principales (avec des métriques unité) de trois représentations matricielles particulières du cube de données χ . Lorsque la famille $\{q_i\}$ est une donnée du problème on ne peut plus garantir l'existence d'une décomposition de χ selon l'expression (1). Il s'agit alors de chercher la meilleure décomposition approchée possible au sens des moindres carrés, et donc de construire

- un 3-cube h associé à la famille donnée $\{q_i\}_{i \in [3]}$, et
- les 3 matrices U_i ($i \in [3]$) à colonnes orthonormées tels que la quantité

$$\sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \sum_{i_3=1}^{p_3} \left(x_{i_1 i_2 i_3} - \sum_{j_1=1}^{q_1} \sum_{j_2=1}^{q_2} \sum_{j_3=1}^{q_3} u^1_{i_1 j_1} u^2_{i_2 j_2} u^3_{i_3 j_3} h_{j_1 j_2 j_3} \right)^2 \qquad (2)$$

soit aussi petite que possible.

Le modèle défini par ce problème est appelé TUCKER3. On montre qu'il est équivalent à l'optimisation de :

$$\min_{U_1,U_2,U_3,H} \| X-(U_2 \otimes U_3)H^t U_1 \|^2$$

où X est la représentation matricielle de χ correspondante à la bipartition ordonnée $n = \{\{2,3\},\{1\}\}$; $\otimes$ dénote le produit de Kroonecker de deux matrices, et $\|A\| = \sum_i \sum_j (a_{ij})^2$.

Tucker propose une solution approchée de ce problème obtenue par "coupure" de la solution du problème de décomposition du 3-cube de données χ. Il montre qu'en général cette solution n'est pas optimale au sens des moindres carrés.

En 1980 Pieter M. Kroonenberg et Jean de Leeuw présentèrent un algorithme itératif nommé TUCKALS3 permettant de construire un quadruple (U_1, U_2, U_3, H) solution du modèle TUCKER3 ; l'algorithme est initialisé à l'aide de l'approximation proposée par Tucker. Ils proposent des représentations graphiques pour les trois modes et donnent des règles d'interprétation des matrices U_1, U_2, U_3 ainsi comme du cube de données h.

J.L. Lastovicka discute en 1981 une extension directe du modèle TUCKER3 pour le cas des données à quatre dimensions et propose une solution approximative équivalente à celle proposée par Tucker pour le modèle TUCKER3. En 1984 A. Kapteyn, H. Neudecker et T. Wansbeek étendent le modèle à un nombre arbitraire de modes. On appelle TUCKERN ce modèle général et TUCKALSN son algorithme pour construire une solution car ils constituent une extension du travail de Kroonenberg et de Leeuw au cas de plus de 3 dimensions. L'utilisation du langage tensoriel permet à Kapteyn et al. d'écrire le modèle et ses résultats d'une forme particulièrement simple. Ils montrent que le modèle n-dimensionnel est équivalent à la recherche d'une matrice U pouvant s'écrire $U = U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_n$ et d'un vecteur $\underline{h}$ tels que le produit $U\underline{h}$ soit aussi proche que possible du vecteur de données $\underline{x}$. Il s'agit donc d'obtenir le minimum :

$$\min_{U,\underline{h}} \| \underline{x}-U\underline{h} \|^2$$

Notre travail, entrepris en 1983, part du travail de Kroonenberg et de Leeuw sur le modèle TUCKER3. Nous construisons aussi une généralisation de ce modèle et l'algorithme que nous proposons est une généralisation de l'algorithme TUCKAL3 de ces deux auteurs. Nous présentons cependant une approche différente à notre avis plus générale que celle de Kapteyn, Neudecker et Wansbeek. Naturellement on retrouve leurs résultats et notre notation rejoint en grande partie les notations qu'ils utilisent.

La première voie de généralisation qui consiste en l'extension du modèle à n modes est réalisée en considérant le n-hypercube de données χ associé à la famille $\{p_i\}_{i \in n}$ comme le jeu des coordonnées d'une forme n-linéaire x appartenant à l'espace vectoriel $E^* =: \mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n ; \mathbb{R})$ des formes n-linéaires sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ où, chaque E_i est un espace vectoriel réel de dimension p_i. L'espace E^* est muni de la métrique unité. Nous définissons le concept de rang d'une forme n-linéaire et nous appelons Γ le sous-ensemble de E^* constitué par les formes n-linéaires de rang donné $\{q_i\}_{i \in n}$. Nous posons alors le problème de la recherche d'un élément $\hat{x}$ de Γ meilleure approximation de x au sens de la métrique unité. Il s'agit donc de trouver $\hat{x}$ optimisant :

$$\min_{y \in \Gamma} \|x-y\|^2 \qquad (3)$$

Nous montrons que si $y \in \Gamma$ alors y appartient à un sous-espace de E^* construit à partir de n espaces F_i ; chaque F_i sous-espace du correspondant E_i. Ce sous-espace de E^* qu'on note $<\{F_i\}>$ est isomorphe au produit tensoriel $F^* = F_1^* \otimes F_2^* \otimes \ldots \otimes F_n^*$. L'expression (3) est donc équivalente à la recherche de n espaces F_i qui réalisent le :

$$\min_{F_1, F_2, \ldots, F_n} \|x - \mathrm{Proj}_{<\{F_i\}>}(x)\|^2 \qquad (4)$$

où bien à la recherche de n matrices U_i à p_i lignes et q_i colonnes (colonnes orthonormées) qui optimisent les quantités :

$$\min_{U_1, U_2, \ldots, U_n} \|\underline{x} - (\bigotimes_{i=1}^{n} U_i^t U_i)\underline{x}\|^2 = \min_{U_1, U_2, \ldots, U_n, \underline{h}} \|\underline{x} - (\bigotimes_{i=1}^{n} U_i)\underline{h}\|^2 . \qquad (5)$$

On montre que les sous-espaces vectoriels F_i sont engendrés par les vecteurs définis par les colonnes des matrices U_i et que quand n=3 les problèmes définis par (3), (4) et (5) coïncident avec celui défini par (2). Le modèle défini par (3) est donc une généralisation de TUCKER3. Il coïncide aussi avec la généralisation de TUCKER3 proposé par Kapteyn, Neudecker et Wansbeek. Lorsque n=2 nous montrons qu'il rejoint l'Analyse en Composantes Principales du tableau X dans des métriques unité. En particulier $\hat{x} = \text{Proj}_{<\{F_i\}>}(x)$ coïncide avec la matrice $\hat{X}$ obtenue à l'aide de la "formule de reconstitution" de l'ACP.

Une deuxième voie de généralisation consiste à introduire une métrique différente de la métrique unité sur l'espace E^* des formes n-linéaires. Cette métrique est construite à partir des métriques définies sur chacun des modes de l'hypercube de données : nous considérons que les p_i éléments du $i^{\text{ème}}$ mode du cube, qu'on appelle éléments réels du $i^{\text{ème}}$ mode, constituent une base ξ^i de l'espace vectoriel E_i qu'on munit d'un produit scalaire de matrice M_i dans la base ξ^i. A partir des ξ^i on construit une base ξ de l'espace $E^* = E_1^* \otimes E_2^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$ des formes n-linéaires sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Nous dotons cet espace vectoriel d'une métrique dont la matrice dans la base ξ est $N = \bigotimes_{i=1}^{n} M_i^{-1}$. Nous considérons à nouveau l'hypercube de données χ comme le jeu des coordonnées dans la base ξ d'une forme x de E^*, et nous cherchons la forme n-linéaire $\hat{x}$ de rang $\{q_i\}_{i\in n}$ la plus proche de x au sens de la métrique N. Appelons :

$$g(y) = \|x-y\|_N^2 \qquad (6)$$

il s'agit donc de minimiser la fonction g sur l'ensemble Γ des formes n-linéaires de rang $\{q_i\}_{i\in n}$:

$$\min_{y\in\Gamma} g(y) = \min_{y\in\Gamma} \|x-y\|_N^2. \qquad (7)$$

Par analogie au cas précédent nous montrons que ce problème d'optimisation est équivalent à la recherche de n sous-espaces F_i de E_i qui réalisent l'optimum de

$$\underset{F_1,F_2,\ldots,F_n}{\text{Min}} \; \| x - N.\text{Proj}_{<\{F_i\}>}(x) \|_N^2 \qquad (8)$$

où $<\{F_i\}>$ est un sous-espace vectoriel de E^* construit à partir des F_i, et $N.\text{Proj}_{<\{F_i\}>}$ est le projecteur N-orthogonal sur ce sous-espace ;

où bien, de façon équivalente, à la recherche de n matrices U_i, à colonnes M_i-orthonormées, et d'un vecteur $\underline{h}$ tels que la quantité

$$\| \underline{x} - (\bigotimes_{i=1}^{n} M_i U_i)\underline{h} \|_N^2 \qquad (9)$$

soit minimisée.

L'utilisation d'une métrique du type $N = \bigotimes_{i=1}^{n} N_i$ sur E^* répond à deux objectifs fondamentaux :

1- Elle permet de passer des expressions (7) et (8) à l'expression (9) qui peut être résolue grâce à une généralisation directe de l'algorithme TUCKALS3 de Kroonenberg et de Leeuw au cas n dimensionnel.

2- Elle permet des interprétations simples des matrices U_i et $\underline{h}$, des espaces F_i et de la forme n-linéaire x que nous obtenons lors de la résolution des problèmes (7), (8) et (9). Ces interprétations sont fondées sur le fait que le vecteur $\underline{h}$ définit une forme n-linéaire h sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_3$ telle que si $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ alors

$$\hat{x}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = h(P_1(a_1), P_2(a_2),\ldots,P_n(a_n)) \quad (10)$$

où P_i est le projecteur M_i-orthogonal sur le sous-espace F_i de E_i.

Puisque $\hat{x}$ et h coïncident sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ il résulte que $\hat{x}$ est une extension de h à $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. En reprenant la dénomination classique nous appelons "élément idéal" du mode k chacun des vecteurs de la base M_k-orthonormée de F_k définie par les colonnes de la matrice U_k. L'expression (10) veut dire, alors, que la forme n-linéaire $\hat{x}$ est complètement déterminée

par les valeurs prises par Φ_h sur les n-uples d'éléments idéaux des différents modes. A l'aide des éléments idéaux on construit une base du sous-espace $<\{F_i\}>$ qui est de dimension $q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_n$. Puisque $\hat{x}$, solution du modèle TUCKERN, appartient à cet espace il est donc possible de le repérer avec $q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_n$ coordonnées seulement : le changement de base approprié permet donc de condenser les coordonnées de x en un cube de dimensions réduites : $q_1, q_2, \ldots, q_n$ au lieu de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Evidemment lorsque la métrique affectée à chaque espace vectoriel E_i est la métrique unité la matrice N devient la matrice identité et le modèle posé par l'expression (7) permet de retrouver celui posé par (3). Dès lors le modèle posé par (7) est une généralisation du modèle TUCKERN de Kapteyn, Neudecker et Wansbeek et du modèle TUCKER3 de L.R. Tucker, dont l'Analyse en Composantes Principales (avec des métriques unité) est un cas particulier.

On adopte alors la définition suivante :

Soit χ un hypercube de données de dimensions $\{P_i\}_{i \in n}$, $\{N_i\}_{i \in n}$ une famille de n matrices symétriques définies positives d'ordres respectifs p_i, et $\{q_i\}_{i \in n}$ une famille d'entiers positifs tels que $q_i \leq p_i$. Faire la n-ACP du couple $(\chi, \otimes N_i)$ consiste à résoudre le problème défini par l'expression (7) (ou ses équivalents).

La possibilité de doter les espaces E_i des métriques M_i et donc l'espace E^* de la métrique N, donne à la n-ACP une souplesse et une capacité d'adaptation aux données dont ne disposent pas, en général, les différentes techniques d'analyse des données multidimensionnelles. L'utilisation des métriques identités conduit ces méthodes à fournir dans la plupart des cas des résultats fort semblables. De la même façon que le choix d'une métrique particulière transforme l'Analyse en Composantes Principales en analyse des correspondances le choix des différentes métriques peut transformer de façon radicale les résultats de la n-ACP et donc leurs interprétations. Le choix des métriques devient alors fondamental lors de l'utilisation de la n-ACP pour l'étude d'un hypercube de données déterminé.

La généralisation du modèle de Tucker que nous présentons consiste donc à :

1- Etendre le modèle à n dimensions
2- Introduire des métriques autres que la métrique unité.

Si la N-distance entre x et $\hat{x}$ est petite on dit que la qualité de la représentation globale de x par $\hat{x}$ est bonne. Puisque $\hat{x}$ est la projection de x sur le sous-espace$<\{F_i\}>$ on mesure leur proximité par le cosinus de l'angle formé par ces deux vecteurs.

Il est clair qu'à chaque élément d'un mode correspond une section du cube χ et la section homologue du cube $\hat{\chi}$. On mesure la qualité de la représentation d'un élément d'un mode par le degré de précision avec lequel la forme n-linéaire "calculée" $\hat{x}$ reproduit la section correspondante du cube des données χ. Cette précision est aussi mesurée en termes d'un cosinus ; il s'agit du cosinus de l'angle entre le vecteur des "scores" réels et le vecteur des "scores" predits correspondants à cet élément.

La n-ACP considère l'information contenue dans l'hypercube de données χ comme un tout, son but est de construire un autre cube de données $\hat{\chi}$ provenant d'une forme n-linéaire h de rang prédéterminé $\{q_i\}_{i\in n}$ aussi proche que possible de χ. Le fait que l'on puisse condenser le cube $\hat{\chi}$, de dimensions $\{p_i\}$, dans un autre de dimensions plus petites, $\{q_i\}$, peut faciliter l'analyse des relations entre les éléments des divers modes du cube.

Une autre possibilité d'analyser l'information contenue dans l'hypercube de données χ consiste à réorganiser ses entrées afin d'obtenir des tableaux qu'on soumet ensuite à des analyses bi-dimensionnelles. Ainsi par exemple si η est une bipartition ordonnée de [n] on peut construire la η-représentation matricielle de χ, le tableau X^{η}, et lui appliquer des différentes techniques. Si $\hat{\chi}$ est proche de χ il peut être alors justifié d'analyser une représentation matricielle de $\hat{\chi}$ et de considérer que les conclusions que l'on tire de cette analyse sont aussi applicables à l'analyse de la représentation matricielle correspondante de χ. Nous montrons que quand il s'agit de l'ACP cette opération est justifiée par le fait qu'une fois réalisée la n-ACP de χ l'analyse en composantes principales de n'importe quelle η-représentation matricielle de $\hat{\chi}$ peut être obtenue d'une façon peu coûteuse.

1.3 - BREVE DESCRIPTION PAR CHAPITRE

Le chapitre II, qui est aussi unchapitre introductif, montre que l'Analyse en Composantes Principales traditionnelle est une n-ACP particulière (n=2). Ce chapitre met en place les notations et présente des résultats fondamentaux qui sont utilisés dans la suite de ce travail.

Au chapitre III on établit le modèle général de la n-ACP et nous présentons un algorithme itératif qui construit une solution du modèle ; nous l'appelons aussi TUCKALSN car il est une généralisation de TUCKALS3 à n modes munis des métriques générales. Ce chapitre discute la convergence et la pertinence de l'algorithme. En termes généraux on suit la démarche de Kroonenberg et de Leuw, mais nos démonstrations sont plus détaillées. Nous montrons avec précision la portée de l'algorithme TUCKALSN qui conduit presque toujours à un point stationnaire non maximum, de la fonction g sur l'ensemble Γ (cf. 6).

Au chapitre IV nous introduisons le concept de matrice des n-composantes principales d'un n-hypercube de données de façon à ce que les composantes principales d'une ACP soient un cas particulier. On fait une synthèse des propriétés essentielles d'optimalité des composantes principales d'une ACP traditionnelle et on montre que certaines de ces propriétés admettent des versions généralisées qui sont aussi vérifiées par les n-composantes principales issues de la n-ACP d'un cube de données.

La première partie du chapitre V est consacrée à l'interprétation des produits directs de la n-ACP ; à savoir, les n matrices U_i (M_i-orthonormées), le cube central h et aussi les matrices des n-composantes principales. Dans cette interprétation le concept d'élément idéal d'un mode joue un rôle prépondérant. Nous construisons des représentations graphiques des éléments réels et idéaux de tous les modes et on discute de leurs qualités et de leurs contributions. Dans une deuxième partie nous montrons comment réaliser à moindres frais l'analyse en composantes principales de n'importe quelle n-représentation matricielle du cube χ. Si la qualité de la représentation de la n-ACP est proche de 1, cette ACP doit être considérée comme une bonne approximation de l'ACP de la n-représentation matricielle du cube de données χ. Ces ACP nous permettent en plus de montrer que, sous certaines conditions, les représentations graphiques décrites dans la première partie vérifient des propriétés d'optimalité.

CHAPITRE II : UNE INTERPRETATION DE L'ACP COMME UNE PROJECTION DANS $E^* \otimes F^*$

L'objectif de ce chapitre est double : d'une part préciser des notations et des concepts qui seront utilisés tout au long de ce travail et d'autre part, présenter un cas particulier du problème traité au chapitre III. On ne considère ici que des hypercubes de dimension 2, c'est-à-dire, des tableaux de données.

On considère que le tableau de données X définit les coordonnées d'un élément x de l'espace tensoriel $E^* \otimes F^*$, l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$.

On définit un sous-ensemble de $E^* \otimes F^*$ dont les éléments vérifient une condition de rang, et on recherche dans ce sous-ensemble de l'espace euclidien $(E^* \otimes F^*, Q)$ la forme $\hat{x}$ la plus proche de x.

On peut montrer de façon directe que dans le cas particulier d'un tableau, le problème ainsi posé admet au moins une solution et que l'on peut en obtenir une à partir de l'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) de X. On préfère cependant faire un détour de façon à préparer la méthode que l'on utilisera dans le cas général, où l'A.C.P. de X n'est pas suffisante pour trouver une solution du problème. Le détour consiste à construire un système d'équations linéaires qu'une solution du problème doit obligatoirement satisfaire. Au chapitre III on présente un algorithme itératif de construction d'une solution générale du système. Dans le présent chapitre on montre qu'une solution du système est fournie par l'A.C.P. du tableau X et que cette ACP de X nous fournit aussi une solution de notre problème d'approximation.

Avant de définir avec précision notre problème on présente quelques notations et on rappelle quelques résultats bien connus sur les vecteurs et valeurs propres d'une matrice carrée, auxquels nous feront souvent référence par la suite.

2.1 - NOTATIONS ET LEMMES

a) On note $M_{\mathbb{R}}(m,n)$ l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes.

b) S_m et S_m^+ dénotent les sous-ensembles de $\mathbb{R}(m,m)$ constitués par les matrices symétriques et symétriques définies positives respectivement.

c) Soit $P \in S_m^+$ (on dit parfois de façon abusive que P est une métrique). On note O_{rs}^P l'ensemble de matrices dont les colonnes sont P-orthonormées.

$$O_{rs}^P = \{A \in M_{\mathbb{R}}(r,s) \mid {}^tAPA = I_s\}.$$

d) Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\xi = (e_i)_{i \in n}$ une base de E et A une matrice appartenant à $M_{\mathbb{R}}(n,n')$. On note $\langle A \rangle_\xi$ le sous-espace de E engendré par les n' vecteurs dont les coordonnées par rapport à la base ξ de E sont définies par les colonnes de la matrice A. S'il n'y a pas risque de confusion on écrit simplement $\langle A \rangle$.

e) Soit $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ une matrice dont les valeurs propres sont toutes réelles. Ecrites par ordre décroissant et avec leurs multiplicités soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ ces valeurs propres. On dit que λ_i est la $i^{ème}$ valeur propre de A et on la note :

$$\lambda_i = \lambda_i(A).$$

f) Soient $M \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ une matrice symétrique définie positive, $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ une matrice M-symétrique (c'est-à-dire telle que $MA = {}^t(MA)$) et $q \leq n$. On écrit :

$$AU \equiv U\Lambda$$

si Λ est la matrice des q premières valeurs propres de A écrites par ordre décroissant et $U \in M_{\mathbb{R}}(n,q)$ la matrice dont les colonnes constituent les vecteurs propres M-normées correspondants de A. On vérifie

que ${}^tUMU = I_q$, c'est à dire que $U \in \mathcal{O}^M_{nq}$.
On dit que U est la matrice des q premiers vecteurs propres de A.
(On rappelle que les valeurs propres d'une matrice M-symétrique sont toutes réelles).

Lemme 1

Soient A et B deux éléments de $M_{\mathbb{R}}(m,n)$, alors $A{}^tB$ et ${}^tBA$ ont les mêmes valeurs propres.

Lemme 2

Soient A et M deux matrices symétriques d'ordre n. A semi définie positive de rang $r \leq n$, et M définie positive. Alors, les valeurs propres de AM sont positives ou nulles. Compte tenu de leur ordre de multiplicité il y en a exactement n-r valeurs propres nulles, et on peut construire une base M-orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des vecteurs propres de AM.

Lemme 3

Soit A une matrice M-symétrique d'ordre n. Si les r premières valeurs propres de A sont distinctes l'expression

$$AU \equiv U\Lambda, \quad \text{où } U \in M_{\mathbb{R}}(n,r) \qquad (1)$$

admet une solution unique. Si les r premières valeurs propres de A ne sont pas toutes différentes (1) n'a pas une solution unique et si V est une autre solution de (1) elle doit être de la forme $V = US$ où S est une matrice orthogonale d'ordre r (${}^tSS = S{}^tS = I_r$).

Lemme 4

Soit A une matrice M-symétrique d'ordre n. Alors si $r \leq n$ la quantité $tr({}^tUMAU)$ est maximisée dans $\mathcal{O}^M_{nr}$ par la matrice $\bar{U} \in \mathcal{O}^M_{nr}$ qui vérifie l'expression $A\bar{U} \equiv \bar{U}\Lambda$.

Le maximum vaut $tr(\Lambda)$ où Λ est la matrice diagonale des q premières valeurs propres de A. Si $B \in \mathcal{O}^{M}_{nr}$ est telle que

$$tr({}^{t}BMAB) = tr({}^{t}\bar{U}MA\bar{U}) = tr(\Lambda)$$

alors B doit être de la forme $B = \bar{U}S$ où S est une matrice orthogonale d'ordre r. (La première partie de ce lemme peut être déduite presque immédiatement de [12;331] (proposition ii.3) ; la deuxième découle de [11;675] (lemme 2.6)).

Proposition 1

Soient $M \in \mathcal{S}^{+}_{n}$ et $A \in \mathcal{S}_{n}$. Si $r \leq n$ alors :

a) La quantité $tr({}^{t}UAU)$ est maximisée dans $\mathcal{O}^{M}_{nr}$ par la matrice $\bar{U} = M^{-1}V$, où V est la matrice des r premiers vecteurs propres M^{-1}-normées de AM^{-1}. (c'est-à-dire que V vérifie l'expression

$$AM^{-1}V \equiv V\Lambda, \text{ qui est équivalente à } AM^{-1}M\bar{U} \equiv M\bar{U}\Lambda) \qquad (2)$$

b) Si $B \in \mathcal{O}^{M}_{nr}$ est telle que

$$tr({}^{t}\bar{U}A\bar{U}) = tr({}^{t}BAB)$$

alors B doit être de la forme $B = \bar{U}S$ où S est une matrice orthogonale d'ordre r.

Démonstration

$$tr({}^{t}UAU) = tr({}^{t}UMM^{-1}AM^{-1}MU) \qquad (3)$$

Appelons V la matrice $V_1 = MU$.
On remarque que $V \in \mathcal{O}^{M^{-1}}_{nr}$ car si $U \in \mathcal{O}^{M}_{nr}$ on a

$${}^{t}VM^{-1}V = {}^{t}UMM^{-1}Mu = {}^{t}UMU = I_r$$

Alors

$$\max_{U \in O^M_{nr}} \operatorname{tr}({}^tUAU) = \max_{V \in O^{M^{-1}}_{nr}} \operatorname{tr}({}^tVM^{-1}(AM^{-1})V) \qquad (4)$$

puisque AM^{-1} est M^{-1}-symétrique on sait par le lemme 4 que l'optimum est atteint par la matrice V solution de

$$AM^{-1}V \equiv M^{-1}V\Lambda.$$

Alors $\bar{U} = M^{-1}V$ optimise la partie droite de (4).
La deuxième partie de cette proposition se déduit aussi de la deuxième partie du lemme 4.

2.2 - L'ESPACE $E^* \otimes F^* = \mathcal{L}_2(E \times F, \mathbb{R})$

On commence ce paragraphe en précisant quelques concepts.
Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives m et n. On désigne par $\mathcal{L}_2(E \times F, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$. On note E^* le dual de E et F^* le dual de F. Si $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in m}$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_j)_{j \in n}$ est une base de F, alors $\mathcal{E}^* = (e_i^*)_{i \in m}$ et $\mathcal{F}^* = (f_j^*)_{j \in n}$ sont les bases duales de E^* et F^* respectivement.

On rappelle que e_i^* est la forme linéaire sur E telle que :

$$e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a^i e_i \mapsto a^i$$

c'est-à-dire qu'elle fait correspondre à chaque $a \in E$ sa $i^{ème}$ coordonnée dans la base $\mathcal{E}$ de E. f_j^* est défini de façon semblable.

On note souvent e^i à la place de e_i^* et f^j à la place de f_j^*.
Si $g \in E^*$ et $h \in F^*$ on note $g \otimes h$ l'application de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g \otimes h : E \times F \to \mathbb{R}$$
$$(a,b) \to g(a)h(b)$$

Cette application appelée produit tensoriel de g et h est une forme linéaire sur $E \times F$: $g \otimes h \in L_2(E \times F, \mathbb{R})$.

Les mn produits tensoriels des éléments e^i de E^* et f^j de F^* constituent une base de l'espace vectoriel $L_2(E \times F, \mathbb{R})$. On la note $E^* \otimes F^*$:

$$E^* \otimes F^* = (e^i \otimes f^j)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

et l'on considère qu'elle est ordonnée lexicographiquement en fonction des indices i et j ; ainsi, $e^i \otimes f^j$ est le [(i-1)n+j]ème élément de cette base.

Si $h \in L_2(E \times F, \mathbb{R})$, h s'écrit de façon unique de la forme :

$$h = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} h_{ij}(e^i \otimes f^j) \qquad (6)$$

où les réels h_{ij} sont les coordonnées de h par rapport à la base $E^* \otimes F^*$ de $L_2(E \times F, \mathbb{R})$.

Si $a = \sum_i a^i e_i$ et $b = \sum_j b^j f_j$ sont des vecteurs de E et F, il résulte de (6) que :

$$h(a,b) = (\sum_i \sum_j h_{ij}(e^i \otimes f^j))(a,b) = \sum_i \sum_j h_{ij}\, e^i(a)\, f^j(b) =$$
$$= \sum_i \sum_j h_{ij}\, a^i b^j.$$

En particulier $h(e_i, f_j) = h_{ij}$. (7)

Ceci montre étant donné $E^* \otimes F^*$, que h est complètement déterminé par les valeurs prises par h sur les mn éléments du produit $E \times F$ qui constituent en fait ses coordonnées dans la base $E^* \otimes F^*$.

L'espace $\mathcal{L}_2(E \times F, \mathbb{R})$ est le produit tensoriel des espaces E^* et F^* :

$$\mathcal{L}_2(E \times F, \mathbb{R}) = E^* \otimes F^*.$$

L'application Ψ de $E^* \otimes F^*$ sur $\mathcal{L}(F^*, E)$ qui associe à $h \in E^* \otimes F^*$ l'homomorphisme $\Psi(h)$ défini par :

$$\Psi(h) : F^* \to E \tag{8}$$

$$f^j \to \sum_{i=1}^{m} h_{ij} e_i$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ bases de E et F et h un élément de $E^* \otimes F^*$. On appelle rang de h le rang de l'application $\Psi(h)$. La matrice H de l'application linéaire $\Psi(h)$ par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}^*$ est appelée la matrice de h relative aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Le terme générique de cette matrice est h_{ij}. $H = (h_{ij}) \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$.

Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont les matrices unicolonnes des coordonnées de a et b rapportées aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F respectivement, on constate que :

$$h(a,b) = \sum_i \sum_j a^i h_{ij} b^j = {}^t\underline{a} \, H \, \underline{b} \tag{9}$$

Réciproquement, si X est un tableau à m lignes et n colonnes, où X_{ij} est le réel appartenant à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne, on peut considérer qu'il représente la matrice d'une application χ de $\mathcal{L}(F^*, E)$ rapportée aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}^*$. On dit que $x = \Psi^{-1}(\chi)$ est le tenseur associé au tableau X.

$$x = \sum_i \sum_j X_{ij} (e^i \otimes f^j).$$

Il existe donc un isomorphisme d'espace vectoriel entre $E^* \otimes F^*$ et $M_{\mathbb{R}}(m,n)$, que l'on notera aussi avec le symbole Ψ .

(10)

Dotons maintenant E et F des structures d'espaces euclidiens, pour cela, soient M et N des formes bilinéaires symétriques définies positives sur E et F respectivement. $M \in L_2(E \times E, \mathbf{R})$, $N \in L_2(F \times F, \mathbf{R})$.

Soient M la matrice de M par rapport à la base E , et N la matrice de N rapportée à F . $M \in M_{\mathbf{R}}(m,m)$ et $N \in M_{\mathbf{R}}(n,n)$ sont symétriques, définies positives, et donc inversibles. Les matrices M^{-1} et N^{-1} sont aussi symétriques et positives.

M^{-1} et la base E^* permettent de définir un produit scalaire sur E^* de même que N^{-1} et F^* font de F^* un espace euclidien.

La matrice $Q = M^{-1} \otimes N^{-1}$ (le produit de Kroonecker de M^{-1} et N^{-1}) (11) est, elle aussi, symétrique définie positive (voir par exemple [16;284-285]). On peut alors considérer Q comme la matrice d'un produit scalaire Q défini sur $E^* \otimes F^*$ dans la base $E^* \otimes F^*$, $(E^* \otimes F^*, Q)$ est alors un espace vectoriel euclidien.

La suite de ce paragraphe présente sans démonstration quatre résultats fondamentaux. Les preuves du premier et du troisième résultats sont données en [6;22]; on déduit le second d'une propriété de la norme de Hilbert-Schmidt présentée en [2;30], et une démonstration du dernier résultat est présentée par [14;46].

Soient M et N deux matrices réelles symétriques positives d'ordre m et n respectivement.

Lemme 5

Si A et B sont deux éléments de $M_{\mathbf{R}}(m,n)$ alors $\phi_{MN}(A,B) = tr({}^tAMBN)$ définit sur $M_{\mathbf{R}}(m,n)$ un produit scalaire. On le note aussi $\langle A,B\rangle_{M,N}$.

Lemme 6

Si $\underline{c}$ est une matrice appartenant à $M_{\mathbb{R}}(n,1)$ alors

$$\|A\underline{c}\|_M \leq \|A\|_{M,N} \cdot \|\underline{c}\|_N .$$

Si A_j dénote la $j^{ème}$ colonne de A on déduit sans difficulté que :

$$\sum_{j=1}^{n} \|A_j\|_M^2 \leq tr(N) . \|A\|_{M,N}^2 .$$

Lemme 7

Etant fixées les bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F l'application Ψ définie en (10) est un isomorphisme d'espaces euclidiens entre $(E^* \otimes F^*, M \otimes N)$ et $(M_{\mathbb{R}}(m,n), \phi_{MN})$. En particulier si x et y appartiennent à $E^* \otimes F^*$ et si $X = \Psi(x)$ et $Y = \Psi(y)$ sont leurs matrices associées on a :

a) $\quad \langle x,y \rangle_{M \otimes N} = \langle X,Y \rangle_{M,N} = tr({}^t XMYN)$

b) $\quad \|x\|^2_{M \otimes N} = \|X\|^2_{M,N} = tr({}^t XMXN) = tr(XN{}^t XM).$

Lemme 8

Soient A et B deux matrices réelles à m et n colonnes respectivement. $\underline{x}$ la matrice unicolonne des coordonnées de $x \in E^* \otimes F^*$ par rapport à la base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}^*$, et $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ la matrice associée à x $(X=\Psi(x))$. Alors la matrice associée au tenseur y de coordonnées $(A \otimes B)\underline{x}$ est $\Psi(y) = AX{}^t B$.

2.3 - LES SOUS-ESPACES $\langle E',F' \rangle$ de $E^* \otimes F^*$

Considérons maintenant deux sous-espaces vectoriels E' de E et F' de F de dimensions respectives m' et n'.

De même que précédemment $(E')^* \otimes (F')^*$ est un espace vectoriel de dimension m'n'. Il est l'espace de toutes les formes bilinéaires définies sur $E' \times F'$.

$E'^* \otimes F'^*$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $E^* \otimes F^*$ car, si h appartient au premier ensemble elle est une application dont le domaine de définition est $E' \times F'$. $E' \times F'$ étant en général différent de $E \times F$, h n'est pas définie dans tout $E \times F$ et donc elle n'appartient pas à $E^* \otimes F^*$. Il existe cependant une infinité d'extensions de $\dot{h}$ à $E \times F$ appartenant à $E^* \otimes F^*$.

Etant donné que E et F sont dotés de structures d'espaces euclidiens il semble naturel de considérer l'extension h de $\dot{h}$ définie de la façon suivante :

$$h(a,b) = \dot{h}(\mathcal{P}roj_{E'}(a), \mathcal{P}roj_{F'}(b)) \quad ((a,b) \in E \times F) \qquad (12)$$

où $\mathcal{P}roj_{E'}$ désigne le projecteur M-orthogonal sur E', et $\mathcal{P}roj_{F'}$ désigne le projecteur N-orthogonal sur le sous-espace F' de F.

On peut constater que h ainsi définie est une forme bilinéaire sur $E \times F$: $h \in E^* \otimes F^*$. On dit que h est l'extension canonique de $\dot{h}$. Au chapitre III, et dans un cadre plus général, on justifie cette affirmation et celles qu'on fait par la suite relatives aux extensions canoniques.

L'application Φ de $E'^* \otimes F'^*$ dans $E^* \otimes F^*$ qui fait correspondre à $\dot{h}$ son extension canonique est évidemment injective. Il existe donc une bijection entre $E'^* \otimes F'^*$ et son image $\Phi(E'^* \otimes F'^*)$.

Par simplicité on écrira $\langle E',F' \rangle$ au lieu de $\Phi(E'^* \otimes F'^*)$.

Puisque Φ est une application linéaire l'ensemble $\langle E',F' \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $E^* \otimes F^*$. On dit qu'il est l'extension canonique de $E'^* \otimes F'^*$.

Si $U = (u_p)_{p \in m'}$ est une base de E', et si $V = (v_q)_{q \in n'}$ est une base de F' alors on sait que la famille des m'n' vecteurs de $E'^* \otimes F'^*$:

$$(u^p \otimes v^q)_{q \in n'}^{p \in m'} = U^* \otimes V^*$$

constitue une base de $E'^* \otimes F'^*$. En conséquence la famille des m'n' vecteurs de $\langle E',F' \rangle$:

$$(\Phi(u^p \otimes v^q))_{q \in n'}^{p \in m'} = (\xi^{pq})_{q \in n'}^{p \in m'} =: \xi$$

constitue une base du sous-espace $\langle E',F' \rangle$ de $E^* \otimes F^*$.

Définition

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ bases de E' et F' respectivement. Si $h \in \langle E',F' \rangle$ on appelle matrice centrale de h et on la note $\dot{H}$, la matrice associée à la forme bilinéaire $\dot{h} = \Phi^{-1}(h)$

$$\dot{H} = \Psi \quad (\Phi^{-1}(h)) \in M_{\mathbb{R}}(m',n').$$

Remarque : $h(u_p,v_q) = \dot{h}(u_p,v_q) = \dot{h}_{pq} = \dot{H}_{pq}$. (13)

La matrice centrale $\dot{H}$ de h est définie par les valeurs prises par h sur les éléments des bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.

Il est clair que $h \in \langle E',F' \rangle$ est complètement déterminée par la donnée des valeurs prises sur les m'n' éléments du produit cartésien $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Réciproquement la donnée des m'n' réels h_{pq} (p = 1...m' ; q=1...n') nous permet de caractériser un élément unique h de $\langle E',F' \rangle$. C'est dire qu'il suffit de m'n' réels pour caractériser complètement une forme bilinéaire appartenant à $\langle E',F' \rangle$, tandis que dans le cas général on a besoin de mn réels pour déterminer un élément de $E^* \otimes F^*$.

Cette propriété des éléments de $\langle E',F' \rangle$ nous conduit à proposer d'approcher $x \in E^* \otimes F^*$ par un des éléments de $\langle E',F' \rangle$; l'intérêt de cette opération étant de simplifier l'étude de x en analysant à sa place un élément de $\langle E',F' \rangle$ qui ne diffère pas trop de x.

Concrètement on se pose le problème suivant :

Soient $(E,\mathcal{M})$, $(F,\mathcal{N})$ et $(E^* \otimes F^*,\mathcal{Q})$ les espaces eucliciens décrits au paragraphe 2.2; E' un sous-espace de E et F' un sous-espace de F.

PROBLEME P1

Etant donné $x \in E^* \otimes F^*$ trouver $\hat{x} \in \langle E', F' \rangle$ tel que la quantité $\|x-\hat{x}\|_Q$ soit minimale.
Puisque $\langle E', F' \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $E^* \otimes F^*$ on sait qu'il existe une solution unique à ce problème :

$$\hat{x} = Proj_{\langle E', F' \rangle}(x).$$

Dans le problème P1, les sous-espaces E' et F' sont fixés à priori. Fixer un sous-espace vectoriel est équivalent à fixer une base de cet espace. Soient donc $U = (u_p)_{p \in m}$ une base de E', et $V = (v_q)_{q \in n}$ une base de F'. Soit U la matrice de U par rapport à E , c'est-à-dire U est la matrice dont les colonnes définissent les coordonnées des vecteurs de la base de E' en fonction de la base E de E ; et soit V la matrice de V par rapport à F :

$$U \in M_{\mathbb{R}}(m,m') \; ; \quad V \in M_{\mathbb{R}}(n,n')$$

Pour simplifier on considère que U et V sont des bases M et N orthonormées respectivement. Cela implique que :

$$U \in O^{M}_{mm'} \quad ; \quad V \in O^{N}_{nn'}$$

en d'autres termes :

$${}^{t}UMU = I_{m'} \quad ; \quad {}^{t}VNV = I_{n'}$$

où, M et N sont les matrices des produits scalaires M et N par rapport aux bases E et F respectivement.

Puisque $\langle U \rangle_E = E'$ et $\langle V \rangle_F = F'$ on sait [1;316] que les matrices des projecteurs M et N orthogonaux sur les sous-espaces E' de E et F' de F sont respectivement :

$$\text{Proj}_{E'} = U({}^tUMU)^{-1}{}^tUM = U{}^tUM \qquad (14)$$

$$\text{Proj}_{F'} = V({}^tVNV)^{-1}{}^tVN = V{}^tVN \qquad (15)$$

Considérons maintenant le (pq)ème élément de la base ξ de $\langle E',F'\rangle$: $\Phi(u^p \otimes v^q)$. Cet élément est une forme bilinéaire sur $E \times F$ et il résulte de (12) que

$$\Phi(u^p \otimes v^q)(e_i,f_j) = (u^p \otimes v^q)(\mathcal{P}roj_{E'}(e_i), \mathcal{P}roj_{F'}(f_j)) \qquad (16)$$

$$= u^p(\mathcal{P}roj_{E'}(e_i)).v^q(\mathcal{P}roj_{F'}(f_j))$$

Puisque U et V définissent les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de E' et F' les expressions (14) et (15) nous permettent de constater que :

$$u^p(\mathcal{P}roj_{E'}(e_i)) = (MU)_{ip}$$

$$v^q(\mathcal{P}roj_{F'}(f_j)) = (NV)_{jq}.$$

Alors (16) devient :

$$\Phi(u^p \otimes v^q)(e_i,f_j) = (MU)_{ip}(NV)_{jq} = [MU \otimes NV]_{(ij)(pq)}.$$

Par (7) $[MU \otimes NV]_{(ij)(pq)}$ est la coordonnée de $\xi^{pq} = \Phi(u^p \otimes v^q)$ par rapport au $(ij)^{\text{ème}}$ élément de la base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}^*$ de $E^* \otimes F^*$. En conséquence la matrice de la base ξ de $\langle E',F'\rangle$ par rapport à la base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}^*$ est :

$$B = MU \otimes NV \qquad (17)$$

ce qui signifie que les colonnes de B donnent les coordonnées des éléments de la base ξ , rapportés à la base $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}^*$ de $E^* \otimes F^*$.

La matrice B étant de plein rang on sait que la matrice du projecteur Q-orthogonal sur le sous-espace $\langle E',F'\rangle$, est :

$$\text{Proj}_{\langle E',F'\rangle} = B({}^tBQB)^{-1}{}^tBQ$$

En utilisant les propriétés bien connues du produit de Kronecker et en se rappelant par (11) que $Q = M^{-1} \otimes N^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
Proj_{<E',F'>} &= (MU \otimes NV)({}^t(MU \otimes NV)Q(MU \otimes NV))^{-1}\ {}^t(MU \otimes NV)Q = \\
&= (MU \otimes NV)(({}^tUMM^{-1}MU) \otimes ({}^tVNN^{-1}NV))^{-1}({}^tUMM^{-1} \otimes {}^tVNN^{-1}) \\
&= (MU \otimes NV)(({}^tUMU) \otimes ({}^tVNV))^{-1}({}^tU \otimes {}^tV) \\
&= (MU \otimes NV)({}^tU \otimes {}^tV) = MU{}^tU \otimes NV{}^tV \\
Proj_{<E',F'>} &= MU{}^tU \otimes NV{}^tV. \qquad (18)
\end{aligned}$$

La solution du problème P1 est $\hat{x} = Proj_{<E',F'>}(x)$; par suite, si $\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de x par rapport à la base $E^* \otimes F^*$ de $E^* \otimes F^*$, alors on déduit la matrice unicolonne des coordonnées de $\hat{x}$ par rapport à la même base de l'expression (18) :

$$\underline{\hat{x}} = (MU{}^tU \otimes NV{}^tV)\underline{x} \ . \qquad (19)$$

Le lemme 8 nous montre que les matrices $X = \Psi(x)$ et $\hat{X} = \Psi(\hat{x})$ associées respectivement à x et $\hat{x}$ vérifient :

$$\hat{X} = MU{}^tUXV{}^tVN. \qquad (20)$$

La définition de U implique que les coordonnées du $p^{ème}$ vecteur de la base U de E' sont définies par la $p^{ème}$ colonne de U, de même que la $q^{ème}$ colonne de V définit les coordonnées du vecteur v_q. Les expressions (20) et (9) permettent donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\hat{x}(u_p,v_q) &= {}^tU_p(MU{}^tUXV{}^tVN)V_q = [{}^tU(MU{}^tUXV{}^tVN)V]_{pq} \\
&= [{}^tU\hat{X}V]_{pq} \\
&= {}^tU_p\hat{X}V_q
\end{aligned}$$

ce qui implique par (13) que la matrice centrale de $\hat{x}$ relative aux bases U et V est :

$$\dot{X} = {}^{t}UXV \tag{22}$$

Si l'on remplace (22) dans (20) on obtient :

$$\hat{X} = MU\,\dot{X}\,{}^{t}VN \tag{23}$$

On remarque que $\dot{X} \in M_{\mathbb{R}}(m',n')$.

2.4 - LA RECHERCHE DU SOUS-ESPACE DE LA FORME $<E',F'>$ PLUS PROCHE DE $x \in E^* \otimes F^*$.

Dans le paragraphe précédent les sous espaces E' et F' étaient fixes. Nous supprimons maintenant cette restriction et nous nous proposons de trouver un sous espace $\bar{E}'$ de E et un sous espace $\bar{F}'$ de E tels que la quantité

$$\|x - \mathrm{proj}_{<\bar{E}',\bar{F}'>}(x)\|$$

soit aussi petite que possible.
Introduisons d'abord quelques notations :

a) On note $\Gamma_0(m',n')$ l'ensemble de tous les couples (E',F') où E' est un sous-espace de E de dimension m', et F' est un sous-espace de F de dimension n' :

$$\Gamma_0(m',n') = \{(E',F') \mid E' \subset E,\ F' \subset F,\ \dim(E') = m',\ \dim(F') = n'$$

b) On note $\Gamma_1(m',n')$ le produit cartésien de $O^M_{mm'}$ et $O^N_{nn'}$:

$$\Gamma_1(m',n') = \{(U,V) \mid U \in O^M_{mm'},\ V \in O^N_{nn'}\}.$$

S'il n'y a pas risque de confusion on note ces ensembles par Γ_0 et Γ_1 respectivement.

2.4.1 - Le problème

On se pose le problème suivant :

PROBLEME P2

Etant donné $x \in E^* \otimes F^*$ trouver $(\bar{E}',\bar{F}') \in \Gamma_o$ et $\hat{x} \in \langle \bar{E}',\bar{F}' \rangle$ tels que la quantité

$$\|x-\bar{x}\|_Q \text{ soit minimale.} \tag{24}$$

Au paragraphe 2.4.3 on présente une solution du problème P2, pour l'instant on suppose que P2 admet une solution.

Compte tenu de la nature vectorielle de $\langle E',F' \rangle$, P2 peut être énoncé de la façon équivalente : Trouver $(\bar{E}',\bar{F}') \in \Gamma_o$ qui optimise l'expression :

$$\min_{(E',F') \in \Gamma_o} \|x-\mathcal{P}roj_{\langle E',F' \rangle}(x)\|_Q \tag{25}$$

et puisqu 'il s'agit d'une projection Q-orthogonale (25) est équivalente à :

$$\max_{(E',F') \in \Gamma_o} \|\mathcal{P}roj_{\langle E',F' \rangle}(x)\|_Q \tag{26}$$

On sait que tout sous-espace est parfaitement caractérisé par la donnée d'une base. L'expression (19) du dernier paragraphe nous montre que (26) peut s'écrire :

$$\max_{(U,V) \in \Gamma_1} \|(MU^tU \otimes NV^tV)\underline{x}\|_Q, \tag{27}$$

où $\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de x par rapport à $E^* \otimes F^*$. Si $\bar{U}$ et $\bar{V}$ optimisent (27), $\bar{E}' = \langle \bar{U} \rangle_E$ et $\bar{F}' = \langle \bar{V} \rangle_F$ sont les sous-espaces qui optimisent (25) (26) et P2.

Si X est la matrice associée à x par rapport aux bases E et F, d'après (20) la matrice associée à $proj_{<<U>,<V>>}(x)$ est $MU\,{}^tUXV\,{}^tVN \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$. L'isomorphisme Ψ entre $E^* \otimes F^*$ et $M_{\mathbb{R}}(m,n)$ décrit en (10) nous permet de vérifier à l'aide du lemme 7 que (27) est équivalente à :

$$\max_{(U,V) \in \Gamma_1} \|MU\,{}^tUXV\,{}^tVN\|^2_{M^{-1},N^{-1}}.$$

et donc à :

$$\min_{(U,V)\in\Gamma_1} \|X-MU\,{}^tUXV\,{}^tVN\|_{M^{-1},N^{-1}} \qquad (28)$$

2.4.2 - Une propriété de la solution

Nous allons montrer que les solutions de (28) sont aussi solutions d'un système d'équations aux valeurs propres.

2.4.2.1. - Le système

La partie b) du lemme 7 assure que :

$$\|MU\,{}^tUXV\,{}^tVN\|_{M^{-1},N^{-1}} = tr({}^t(MU\,{}^tUXV\,{}^tVN)M^{-1}(MU\,{}^tUXV\,{}^tVN)N^{-1}) =$$

$$= tr(NV\,{}^tV\,{}^tXU\,{}^tUXV\,{}^tV) =$$

$$= tr({}^tV\,{}^tXU\,{}^tUXV) =$$

$$= tr({}^tUXV\,{}^tV\,{}^tXU)$$

Alors (27) est équivalente à :

$$\max_{(U,V) \in \Gamma_1} tr({}^tV\,{}^tXU\,{}^tUXV) \qquad (29)$$

ou encore à :

$$\max_{(U,V) \in \Gamma_1} tr({}^tUXV\,{}^tV\,{}^tXU). \qquad (30)$$

Appelons Tu à la matrice symétrique

$$Tu = {}^tXU\,{}^tUX \qquad (31)$$

et Tv à la matrice symétrique :

$$Tv = XV\,{}^tV\,{}^tX \qquad (32)$$

Puisque Tu et Tv peuvent s'exprimer comme le produit d'une matrice par sa transposée Tu et Tv sont semi-définies positives.

Si l'on considère U fixe, et égale à $\bar{U}$, d'après la proposition 1, l'expression

$$\max_{V \in O^N_{nn'}} \operatorname{tr}({}^tV\,{}^tX\bar{U}\,{}^t\bar{U}XV) \quad (= \max_{V \in O^N_{nn'}} \operatorname{tr}({}^tV T\bar{U} V)) \tag{33}$$

est optimisée par la matrice $\bar{V}$ qui satisfait à l'équation :

$$T\bar{u}\, N^{-1} N\bar{V} \equiv N\bar{V}\Lambda_1$$

c'est-à-dire que $\bar{V}$ doit être telle que $N\bar{V}$ soit la matrice des n' premiers vecteurs propres N^{-1}-normés de $T\bar{u}N^{-1}$.

Remarque : Puisque $N\bar{V} \in O^{N^{-1}}_{nn'}$ on a bien que $\bar{V} \in O^N_{nn'}$.

De même, si l'on fixe $V = \bar{V}$, l'expression

$$\max_{U \in O^M_{mm'}} \operatorname{tr}({}^tUX\bar{V}\,{}^t\bar{V}\,{}^tXU) \quad (= \max_{U \in O^M_{mm'}} \operatorname{tr}({}^tUT\bar{V}U))$$

est optimisée par la matrice $\bar{U}$ qui satisfait à l'équation :

$$T\bar{v}\, M^{-1} M\bar{U} \equiv M\bar{U}\Lambda_2,$$

et l'on constate aussi que $\bar{U} \in O^M_{mm'}$.
Il est clair alors que tout couple $(\bar{U},\bar{V}) \in \Gamma_1$ constituant une solution de (27) doit satisfaire simultanément les deux équations du système :

$$S1 \quad \begin{cases} TuN^{-1}NV \equiv NV\Lambda_1 \\ TvM^{-1}MU \equiv MU\Lambda_2. \end{cases}$$

2.4.2.2 - Une solution du système

Nous allons montrer qu'une solution de ce système est fournie par les matrices des vecteurs propres de $XN^{-1}{}^tXM^{-1}$ et ${}^tXM^{-1}XN^{-1}$.

Notons $R = XN^{-1}{}^tXM^{-1}$ et $S = {}^tXM^{-1}XN^{-1}$. (34)

On constate sans difficulté que rang(R) = rang(S) = rang(X) ([1;245]). Alors, si l'on appelle r cette valeur commune, le lemme 1, (33) et le lemme 2 nous permettent d'affirmer que R et S ont les mêmes valeurs propres, que ces valeurs propres sont toutes non négatives et que si l'on tient compte de leur ordre de multiplicité il y a exactement r valeurs propres non nulles.

Supposons vérifiées les deux conditions suivantes :

a) $m' = n' \leq r$

b) les s ($s = m' = n'$) premières valeurs propres de R et S sont toutes différentes.

Soient $U \in \mathcal{O}^{M^{-1}}_{ms}$ et $V \in \mathcal{O}^{N^{-1}}_{ns}$ les matrices définies par :

$$XN^{-1}{}^tXM^{-1}U \equiv U\Lambda \qquad (35)$$

$${}^tXM^{-1}XN^{-1}V \equiv V\Lambda \qquad (36)$$

c'est-à-dire Λ est la matrice diagonale des s plus grandes valeurs propres de R et S écrites par ordre décroissant ; U et V sont les matrices des s premiers vecteurs propres normés de R et S respectivement.

Dans ces conditions les deux équations suivantes, que l'on appelle "formules de transition" sont vérifiées :

$$U = XN^{-1}V\Lambda^{-1/2} \tag{37}$$

$$V = {}^{t}XM^{-1}U\Lambda^{-1/2} \tag{38}$$

En effet, d'une part $XN^{-1}V\Lambda^{-1/2} \in O_{ms}^{N^{-1}}$ car par (36)

$${}^{t}(XN^{-1}V\Lambda^{-1/2})M^{-1}(XN^{-1}V\Lambda^{-1/2}) = \Lambda^{-1/2}{}^{t}VN^{-1}{}^{t}XM^{-1}XN^{-1}V\Lambda^{-1/2} =$$

$$= \Lambda^{-1/2}{}^{t}VN^{-1}V\Lambda\Lambda^{-1/2} = I_s ;$$

et d'autre part $XN^{-1}V\Lambda^{-1/2}$ est la matrice des vecteurs propres de R correspondants à Λ car par (36)

$$(XN^{-1}{}^{t}XM^{-1})\ (XN^{-1}V\Lambda^{-1/2}) = XN^{-1}V\Lambda\Lambda^{-1/2} = (XN^{-1}V\Lambda^{-1/2})\Lambda.$$

Alors puisque les s premières valeurs propres sont toutes différentes le lemme 3 et (35) nous montrent que U est égale à $XN^{-1}V\Lambda^{-1/2}$. On obtient la formule (37) de façon strictement symétrique.

PROPOSITION 2

Si R et S sont définies comme en (34), si les conditions a) et b) précédentes sont vérifiées et si les matrices U et V sont définies selon (35) et (36), alors

$$\bar{U} = M^{-1}U \text{ et } \bar{V} = N^{-1}V \tag{39}$$

fournissent une solution du système S1 :

$$S1 \begin{cases} T\bar{v}\ M^{-1}M\bar{U} \equiv M\bar{U}\Lambda_1 & (40) \\ T\bar{u}\ N^{-1}N\ \bar{V} \equiv N\bar{V}\Lambda_2 & (41) \end{cases}$$

Démonstration :

En remplaçant $\bar{U}$ par $M^{-1}U$ et $\bar{V}$ par $N^{-1}V$ dans la partie gauche de (40) on obtient :

$$X\bar{V}\,{}^t\bar{V}\,{}^tX M^{-1} M\bar{U} \qquad (42)$$

qui par (37) et (36) devient :

$$X\bar{V}\,{}^t\bar{V}\,{}^tX M^{-1} M\bar{U} = XN^{-1}V\,{}^tVN^{-1}\,{}^tXM^{-1}U = XN^{-1}V\,{}^tVN^{-1}\,{}^tXM^{-1}XN^{-1}V\Lambda^{-1/2} =$$

$$= XN^{-1}V\,{}^tVN^{-1}V\Lambda\Lambda^{-1/2} = XN^{-1}V\Lambda^{-1/2}\Lambda =$$

$$= U\Lambda = MM^{-1}U\Lambda = M\bar{U}\Lambda$$

On a donc : $T\bar{V}M^{-1}M\bar{U} = M\bar{U}\Lambda$,

ce qui implique que les s premières valeurs propres de R et S sont aussi des valeurs propres de $T\bar{V}M^{-1}$; on en déduit que Λ est la matrice des s premières valeurs propres de $T\bar{V}M^{-1}$ car :

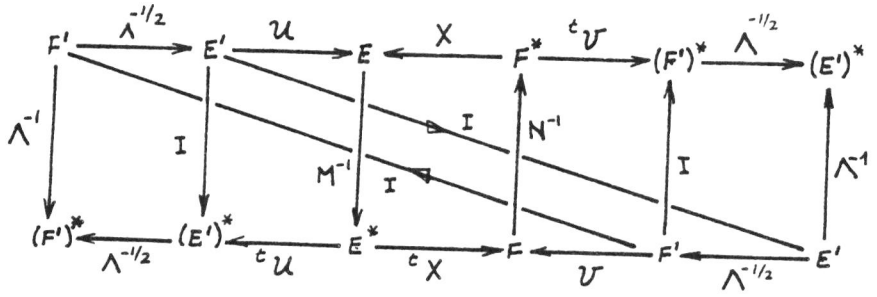
$$\text{rang}(T\bar{V}M^{-1}) \leq s \leq r = \text{rang}(R) = \text{rang}(S)$$

On peut donc écrire

$$T\bar{V}M^{-1}\bar{U} \equiv M\bar{U}\Lambda.$$

Cela prouve (40). De façon similaire on montre (41) et on constate d'ailleurs que $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$.

On verra immédiatement que la définition de U et V selon (35) et (36) nous permet d'affirmer que l'Analyse en Composantes Principales du triplet (X, M^{-1}, N^{-1}) fournit une solution du système S1. Avant de définir avec précision la notion de "solution d'une ACP", nous constatons que les diverses applications et matrices rencontrées répondent au diagramme commutatif suivant :



Définition

Soient $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ et M et N deux métriques d'ordre m et n respectivement. Soient $r = \text{rang}(X)$ et $s \leq r$. Soient les matrices $U \in O^{M}_{ms}$, $V \in O^{N}_{ns}$ et Λ une matrice diagonale d'ordre s.
On dit que le triplet (U,V,Λ) est une solution d'ordre s de l'ACP de (X,M,N) si U, V et Λ vérifient les quatre conditions suivantes :

$$XN\,{}^tXMU \equiv U\Lambda \tag{43}$$

$${}^tXMXNV \equiv V\Lambda \tag{44}$$

$$U = XNV\Lambda^{-1/2} \tag{45}$$

$$V = {}^tXMU\Lambda^{-1/2}. \tag{46}$$

Remarque 1

Ces quatre conditions peuvent se réduire à deux car :
(43) et (46) sont équivalentes à (44) et (45).
En effet, on déduit de (43) et (46) :

a) ${}^tXMXNV = {}^tXMXN\ {}^tXMU\Lambda^{-1/2} = {}^tXMU\Lambda^{1/2} = V\Lambda$

b) $XNV\Lambda^{-1/2} = {}^tXN\ {}^tXMU\Lambda^{-1} = U.$

Remarque 2

Si les s premières valeurs propres ne sont pas toutes différentes, l'ACP de (X,M,N) n'a pas de solution unique, car le lemme 3 nous assure que (43) et (44)admettent plusieurs solutions.

On présente dans la suite un résultat bien connu relatif à l'ACP. On fera la démonstration d'une version plus générale de ce lemme au chapitre IV.

Lemme 9

Soient $m' \leq m$, $n' \leq n$ et $s = \min(\text{rang}(X), m', n')$.
Si (U,V,Λ) est une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M,N) alors pour tous $A \in M_{\mathbb{R}}(m,m')$, $B \in M_{\mathbb{R}}(n,n')$ et $H \in M_{\mathbb{R}}(m',n')$ on a :

$$\|X-AH^tB\|_{M,N} \geq \|X-U\Lambda^{1/2}{}^tV\|_{M,N} \tag{47}$$

et

$$\min_{A,H,B} \|X-AH^tB\|^2_{M,N} = \|X-U\Lambda^{1/2}{}^tV\|^2_{M,N} = \sum_{i=s+1}^{\text{rang}(X)} \lambda_i({}^tXMXN) \tag{48}$$

En résumé la proposition 2 et la dernière définition permettent d'affirmer que si les conditions a) et b) sont réunies la solution unique de l'ACP d'ordre s du triplet (X,M^{-1},N^{-1}) fournit une solution du système S1 :

Si (U,V,Λ) est la solution de l'ACP de (X,M^{-1},N^{-1}), alors $\bar{U} = M^{-1}U$ et $\bar{V} = N^{-1}V$ constituent une solution de S1.

La condition b) a été utilisée pour valider les expressions (37) et (38), or la définition adoptée exige la vérification de ces deux expressions, la condition b) n'est plus nécessaire. On peut donc conclure que : si $m' = n' = s$ toute solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M^{-1},N^{-1}) fournit une solution du système S1.

Nous allons montrer maintenant que l'ACP de (X,M^{-1},N^{-1}) nous permet aussi de construire directement une solution du problème P2 et que ceci est valable dans tous les cas, c'est-à-dire même quand la condition a) n'est pas satisfaite.

2.4.3 - La solution du problème P2

Considérons sans perte de généralité, que $n' \leq m'$, et notons

$$r = \text{rang}(X) \text{ et } s = \min(r,m',n'). \tag{49}$$

Trois cas peuvent se présenter :

1- $n' = m' = r \ (=s)$

2- $m' \neq n' \ ; \ n' \leq r \ (s = n')$

3- $m' \neq n' \ ; \ n' > r \ (s = r)$.

Cas 1

Soit (U,V,Λ) une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M^{-1},N^{-1}), alors les matrices $\bar{U} = M^{-1}U$ et $\bar{V} = N^{-1}V$ sont une solution de (28).

Démonstration

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{O}^{M}_{ms}$ et $B \in \mathcal{O}^{N}_{ns}$ telles que :

$$\|X-MA^{t}AXB^{t}BN\|_{M^{-1},N^{-1}} < \|X-M\bar{U}^{t}\bar{U}X\bar{V}^{t}\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} \qquad (50)$$

Mais,

$$\|X-M\bar{U}^{t}\bar{U}X\bar{V}^{t}\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} = \|X-U^{t}UM^{-1}XN^{-1}V^{t}V\|_{M^{-1},N^{-1}}$$

$$= \|X-U\Lambda^{t}V\|_{M^{-1},N^{-1}} .$$

Alors on devrait avoir

$$\|X-MA^{t}AXB^{t}BN\|_{M^{-1},N^{-1}} < \|X-U\Lambda^{t}V\|_{M^{-1},N^{-1}}$$

ce qui, par le lemme 9 n'est pas possible. L'inégalité (50) étant donc fausse $\bar{U}$ et $\bar{V}$ constituent une solution de (28) et elles définissent bien une solution du problème 2.

Cas 2

Soit (U,V,Λ) une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M^{-1},N^{-1}). Soit $\tilde{U}$ une matrice obtenue en complétant U avec (m'-s) colonnes choisies de façon à ce que $\tilde{U} \in \mathcal{O}^{M^{-1}}_{mm'}$ et soient

$$\bar{U} = M^{-1}\tilde{U} \ , \qquad \bar{V} = N^{-1}V \qquad (51)$$

alors, $\bar{U}$ et $\bar{V}$ constituent une solution de (28).

Démonstration

$$\|X-M\bar{U}\,{}^t\bar{U}X\bar{V}\,{}^t\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} = \|X-\tilde{U}\,{}^t\tilde{U}M^{-1}XN^{-1}V\,{}^tV\|_{M^{-1},N^{-1}} =$$

$$=\|X-\tilde{U}\,{}^t\tilde{U}M^{-1}U\Lambda^{-1/2}\,{}^tV\|_{M^{-1},N^{-1}} = \text{(par la définition de } \tilde{U})$$

$$=\|X-U\Lambda^{1/2}\,{}^tV\|_{M^{-1},N^{-1}}$$

C'est dire que :

$$\|X-M\bar{U}\,{}^t\bar{U}X\bar{V}\,{}^t\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} = \|X-U\Lambda^{1/2}\,{}^tV\|_{M^{-1},N^{-1}}.$$

Puisque $M\bar{U}\,{}^t\bar{U}X\bar{V}\,{}^t\bar{V}N$ est de la forme $AH\,{}^tB$, où $A \in M_{\mathbb{R}}(m,m')$, $H \in M_{\mathbf{R}}(m',n')$, $B \in M_{\mathbb{R}}(n,n')$ et puisque $\bar{U} \in O^{M}_{mm'}$ et $\bar{V} \in O^{N}_{nn'}$, le lemme 9 nous permet d'affirmer pour tous les $U \in O^{M}_{mm'}$ et $V \in O^{N}_{nn'}$:

$$\|X-M\bar{U}\,{}^t\bar{U}X\bar{V}\,{}^t\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} \leq \|X-MU\,{}^tUXV\,{}^tVN\|_{M^{-1},N^{-1}}.$$

Le couple $(\bar{U},\bar{V})$ est donc une solution de (28).

Cas 3

$(m' > n' > r$; c'est-à-dire $s = r)$.

Comme précédemment soit (U,V,Λ) une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M^{-1},N^{-1}). Soient $\tilde{V}$ une matrice obtenue en complétant V avec $(n'-r)$ colonnes de façon à ce que $\tilde{V} \in O^{N^{-1}}_{n,n'}$, et $\tilde{U}$ une matrice obtenue en complétant U avec $(m'-r)$ colonnes telles que $\tilde{U} \in O^{M^{-1}}_{m,m'}$, et soient

$$\bar{U} = M^{-1}\tilde{U} \; ; \; \bar{V} = N^{-1}\tilde{V}.$$

Alors $\bar{U} \in O^{M}_{mm'}$, $\bar{V} \in O^{N}_{nn'}$, $(\bar{U},\bar{V})$ est une solution de (28) et le minimum vaut zéro.

Démonstration

Les matrices $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ peuvent s'écrire de la forme :

$$\tilde{U} = [U|U_o] \quad \tilde{V} = [V|V_o].$$

Les vecteurs définis par les colonnes de V_o appartiennent au sous-espace de F engendré par les vecteurs propres de ${}^tXM^{-1}XN^{-1}$ correspondants à des valeurs propres nulles, car dans ce cas le nombre de colonnes de V est $s = r = \text{rang}({}^tXM^{-1}XN^{-1})$.

On sait alors :

$$ {}^tXM^{-1}XN^{-1}V_o = 0 \in M_{\mathbb{R}}(n,n'-s) \tag{52} $$

et de même :

$$ XN^{-1}{}^tXM^{-1}U_o = 0 \in M_{\mathbb{R}}(m,m'-s). \tag{53} $$

La matrice ${}^t\tilde{U}M^{-1}XN^{-1}{}^t\tilde{V}$ peut s'écrire sous la forme :

$$ \left[\frac{{}^tU}{U_o}\right]M^{-1}XN^{-1}[V|V_o] = \tag{54} $$

$$ \left|\begin{array}{c|c} {}^tUM^{-1}XN^{-1}V & {}^tUM^{-1}XN^{-1}V_o \\ \hline {}^tU_oM^{-1}XN^{-1}V & {}^tU_oM^{-1}XN^{-1}V_o \end{array}\right| \tag{55} $$

Mais, puisque $U \in O^{M^{-1}}_{m,r}$ et

$$ XN^{-1}V = U\Lambda^{1/2} $$

les expressions (52) et (53) nous montrent que cette matrice devient :

$$ \left|\begin{array}{c|c} \Lambda^{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right| \tag{56} $$

Aussi a t'on par (56) et par les constructions de $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$

$$ \|X-M\bar{U}{}^t\bar{U}X\bar{V}{}^t\bar{V}N\|_{M^{-1},N^{-1}} = \|X-\tilde{U}({}^t\tilde{U}M^{-1}XN^{-1}\tilde{V}){}^t\tilde{V}\|_{M^{-1},N^{-1}} = $$

$$ = \|X-U\Lambda^{1/2}{}^tV\|_{M^{-1},N^{-1}} \tag{57} $$

Ceci montre de la même façon que dans le cas précédent, que $(\bar{U},\bar{V})$ est une solution de (28). De plus puisque on inclut dans Λ toutes les valeurs propres non nulles, on sait par (48) que (57) est égale à zéro.

On clôt ce paragraphe en rassemblant les trois cas dans une proposition qui garantit que l'on peut toujours obtenir une solution du problème P2 par l'ACP de (X,M^{-1},N^{-1}) :

PROPOSITION 3

Soient $s = \min(\text{rang}(X),m',n')$;
(U,V,Λ) une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M^{-1},N^{-1}) ;
$\tilde{U} \in O^{M^{-1}}_{mm'}$ une matrice obtenue en complétant U avec (m'-s) colonnes
$\tilde{V} \in O^{N^{-1}}_{nn'}$ une matrice obtenue en complétant V avec (n'-s) colonnes
$\bar{U} = M^{-1}\tilde{U}$ et $\bar{V} = N^{-1}\tilde{V}$

Alors :

1- $(\bar{U},\bar{V}) \in \Gamma_1$ optimise l'expression (28) qui prend la valeur
$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i({}^tXM^{-1}XN^{-1})$

2- Si $\hat{x}$ est l'élément de $E^* \otimes F^*$ dont sa matrice par rapport aux bases $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F est $\hat{X} = M\bar{U}{}^t\bar{U}X\bar{V}{}^t\bar{V}N$, alors $(\langle\bar{U}\rangle_{\mathcal{E}},\langle\bar{V}\rangle_{\mathcal{F}}) \in \Gamma_0$ et $\hat{x}$ constituent une solution du problème P2.

2.4.4 - Un cas particulier : le meilleur sous-espace de la forme $\langle E,F'\rangle$.

La proposition 3 nous montre que si $m' \geq s$ la valeur optimale de l'expression (26) est indépendante de m'. Cela signifie que si l'on change m' par un m" tel que $s \leq m" \leq m$ la quantité exprimée par (26) reste inchangée et égale à

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i({}^tXM^{-1}XN^{-1}), \qquad (58)$$

de même, la quantité exprimée par (25) demeure égale à

$$\sum_{i=s+1}^{rang(X)} \lambda_i({}^tXM^{-1}XN^{-1}) \qquad (59)$$

où $s = \min(rang(X),n')$.

Cela veut dire que si l'on note :

$$\Gamma_{o(p,q)} = \{(E',F') \mid E' \subset E \; ; \; F' \subset F \; ; \; \dim(E') = p; \; \dim(F') = q\}$$

alors :

$$\min_{(E',F')\in\Gamma_{o(m',n')}} \|x-Proj_{<E',F'>}(x)\|_Q = \min_{(E',F')\in\Gamma_{o(m'',n')}} \|x-Proj_{<E',F'>}(x)\|_Q$$

et

$$\max_{(E',F')\in\Gamma_{o(m',n')}} \|Proj_{<E',F'>}(x)\|_Q = \max_{(E',F')\in\Gamma_{o(m'',n')}} \|Proj_{<E',F'>}(x)\|_Q$$

En particulier si $m' = m$, c'est-à-dire si $E' = E$ on a que la quantité

$$\max_{F'} \|Proj_{<E,F'>}(x)\|_Q^2$$

vaut $tr(\Lambda)$, où Λ est la matrice diagonale issue de l'ACP d'ordre s du triplet (X,M^{-1},N^{-1}).

Naturellement on a aussi

$$\max_{E'} \|Proj_{<E',F>}(x)\|^2 = tr(\Lambda)$$

car (58) et (59) sont aussi indépendantes de n'. De plus, si $m' \geq n'$ et si $(\bar{E}', \bar{F}')$ réalise l'optimum de

$$\max_{(E',F')\in\Gamma_{o(m',n')}} \|Proj_{<E',F'>}(x)\|_Q$$

alors $\bar{F}'$ réalise l'optimum de :

$$\max_{F'} \|Proj_{<E,F'>}(x)\|_Q .$$

L'objectif du paragraphe suivant est de dégager quelques propriétés de $\hat{x}$. Pour cela on recherche une caractérisation de l'ensemble dont les éléments appartiennent à un sous-espace de la forme $<E',F'>$.

2.5 - UNE CARACTERISATION DE L'ENSEMBLE Γ

Le problème dont on vient de donner une solution consiste à trouver E' sous-espace de E et F' sous-espace de F de façon à ce que pour un $x \in E^* \otimes F^*$ donné la quantité

$$\min_{(E',F')\in\Gamma_0} \left(\min_{\hat{x}\in<E',F'>} \|x-\hat{x}\|_Q \right) \tag{60}$$

soit aussi petite que possible.

Appelons Γ à la réunion de tous les ensembles de la forme $<E',F'>$, c'es-à-dire

$$\Gamma = \bigcup_{(E',F')\in\Gamma_0} <E',F'> \tag{61}$$

On remarque que si Γ est un sous-ensemble de $E^* \otimes F^*$ rien ne garantit que Γ soit un sous-espace vectoriel de $E^* \otimes F^*$.

La définition de Γ permet d'énoncer le problème P2 d'une façon nouvelle : Trouver $\tilde{x}$ appartenant à Γ tel que $\|x-\tilde{x}\|_Q$ soit aussi petite que possible. Il s'agit donc d'obtenir le :

$$\min_{\tilde{x}\in\Gamma} \|x-\tilde{x}\|_Q \tag{62}$$

La signification de l'ensemble Γ est étudiée dans la suite :

PROPOSITION

Soit $h \in E^* \otimes F^*$, et $\underline{h}$ la matrice unicolonne des coordonnées de h par rapport à la base $E^* \otimes F^*$. S'il existe $A \in M_{\mathbf{R}}(m,m')$, $B \in M_{\mathbf{R}}(n,n')$ et $\underline{v} \in M_{\mathbf{R}}(m'n',1)$ telles que

$$\underline{h} = (A \otimes B)\underline{v} \tag{63}$$

alors $h \in \Gamma$.

Démonstration

Soient A, B et $\underline{v}$ ainsi définies et $\underline{h} = (A \otimes B)\underline{v}$.
On montre d'abord qu'étant donnée $A \in M_{\mathbf{R}}(m,m')$ on peut trouver U appartenant à $O^M_{mm'}$ et R appartenant à $M_{\mathbf{R}}(m',m')$ telles que A = MUR.
On sait en effet qu'étant donnée A il existe $\bar{U} \in O^{M^{-1}}_{m,m'}$ telle que $\langle A \rangle \subset \langle \bar{U} \rangle$. Il existe donc $R \in M_{\mathbf{R}}(m',m')$ telle que $A = \bar{U}R$. Posons :

$$U = M^{-1}\bar{U}$$

On a

$$A = MUR \tag{64}$$

et par suite

$${}^tUMU = {}^t\bar{U}M^{-1}MM^{-1}\bar{U} = {}^t\bar{U}M^{-1}\bar{U} = I$$

c'est-à-dire

$$U \in O^M_{m\,m'}.$$

De même, si $B \in M_{\mathbf{R}}(n,n')$ elle peut être exprimée sous la forme

$$B = NVS \tag{65}$$

où

$$V \in O^N_{nn'} \quad \text{et} \quad S \in M_{\mathbf{R}}(n',n').$$

Alors, $\underline{h}$ peut s'écrire :

$$\underline{h} = (A \otimes B)\underline{v} = (MUR \otimes NVS)\underline{v} = (MU \otimes NV)(R \otimes S)\underline{v} \tag{66}$$

$$\underline{h} = (MU \otimes NV)\underline{v}'. \tag{67}$$

On déduit de (17) que $h \in \langle\langle U \rangle_E, \langle V \rangle_F\rangle$, donc $h \in \Gamma$.

La proposition réciproque est aussi vraie car si $h \in \Gamma$ il doit exister $U \in \mathcal{O}^{M}_{mm'}$ et $V \in \mathcal{O}^{N}_{nn'}$ telles que $\underline{h}$ appartienne au sous-espace $\langle MU \otimes NV \rangle_{E^* \otimes F^*}$; il doit donc exister un $\underline{v} \in M_{\mathbb{R}}(m'n',1)$ unique tel que :

$$\underline{h} = (MU \otimes NV)\underline{v} \tag{68}$$

Ceci montre que $\underline{h}$ est bien de la forme $(A \otimes B)\underline{v}$.
On résume les deux résultats dans la proposition :

PROPOSITION :

Si $\underline{h}$, A,B et $\underline{v}$ sont définis comme dans la proposition précédente alors

$$\Gamma = \{h \in E^* \otimes F^* \mid \underline{h} = (A \otimes B)\underline{v}\}. \tag{69}$$

Mettons (69) sous forme matricielle. Pour cela soit V la matrice dont le terme générique V_{ij} est le (ij)ème élément de la matrice unicolonne $\underline{v}$, et soit H la matrice associée à la forme bilinéaire h (par rapport aux bases E et F).
On constate en développant que

$$(A \otimes B)\underline{v} = \underline{h} \iff AV^{t}B = H \tag{70}$$

Alors (69) assure que

$$\Gamma = \{h \in E^* \otimes F^* \mid H = AV^{t}B\} \tag{71}$$

où H est la matrice de h, et A,V et B sont trois matrices telles que

$$A \in M_{\mathbb{R}}(m,m') \; ; \; B \in M_{\mathbb{R}}(n,n') \; ; \; V \in M_{\mathbb{R}}(m',n') \tag{72}$$

En d'autres termes, Γ est l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur $E \times F$ dont la matrice associée peut se décomposer en un produit de trois matrices vérifiant (72). Notons

$$t = \min(m',n')$$

On remarque que si $H = AV^tB$ alors $rang(H) \leq t$; ce qui implique que si $h \in \Gamma$ alors $rang(h) \leq t$.

D'autre part, on sait que si $rang(H) \leq t$ on peut toujours trouver trois matrices A,B et V satisfaisant (72), telles que H soit égale à :

$$H = AV^tB.$$

(une telle décomposition peut être obtenue, par exemple, en appliquant à H les résultats du cas 3 du paragraphe précédent).
On peut donc conclure que Γ est l'ensemble de toutes les formes sur $E \times F$ de rang inférieur ou égal à t

$$\Gamma = \{h \in E^* \otimes F^* | rang(h) \leq t\},$$

et on peut affirmer que :

si $h \in E^* \otimes F^*$ est de rang inférieur ou égal à $t = \min(m',n')$ il existe E' sous-espace de E de dimension m' , F' sous espace de F de dimension n' et $\dot{h} \in E'^* \otimes F'^*$ tels que h est l'extension canonique (par projection) de $\dot{h}$ à $E^* \otimes F^*$.

Le problème P2 s'énonce finalement :

PROBLEME P2' :

Etant donné $x \in E^* \otimes F^*$ trouver $\hat{x} \in \Gamma$ de rang $\leq t$

$$\|x-\hat{x}\|_Q = \min_{y \in \Gamma} \|x-y\|_Q \qquad (73)$$

P2' étant équivalent à P2, l'Analyse en Composantes Principales du triplet (X,M^{-1},N^{-1}) fournit une solution de P2', décrite par la proposition 3 :

$\hat{x}$ est une forme bilinéaire sur $E \times F$ de rang $\leq t$ de matrice associée :

$$\hat{X} = M\bar{U}^t\bar{U}X\bar{V}^t\bar{V}N$$

Si $\dot{x}$ est la forme bilinéaire sur $<\bar{U}> \times <\bar{V}>$ dont la matrice (par rapport aux bases U de $<\bar{U}>$ et V de $<\bar{V}>$) est ${}^t\bar{U}X\bar{V}$, alors $\tilde{x}$ est l'extension canonique de $\dot{x}$ à $E \times F$.

La matrice centrale de $\hat{x}$ est précisément (d'après (22))

$$\dot{\hat{X}} = {}^t\bar{U}X\bar{V}$$

elle est diagonale car :

$$\dot{\hat{X}} = \left|\begin{array}{c|c} \Lambda^{1/2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right|$$

où

$$\dot{\hat{X}}_{pq} = \begin{cases} \lambda_p^{1/2} & \text{si } p = q \leq s \text{ (s étant le min (rangX, m',n'))} \\ 0 & \text{dans tout autre cas} \end{cases}$$

ceci implique en particulier que :

$$\dot{\hat{x}}\,(u_p, v_q) = 0 \text{ si } p \neq q \qquad (74)$$

On peut résumer ces observations en soulignant que la solution $\hat{x}$ du problème P2 fournie par l'Analyse en Composantes Principales, est de matrice centrale diagonale.

On sait de plus d'après l'expression (48) que

$$\|x-\hat{x}\|_Q^2 = \sum_{i=s+1}^{\text{rang}(X)} \lambda_i \qquad (75)$$

et puisque $\hat{x}$ est une projection Q-orthogonale :

$$\|\hat{x}\|_Q^2 = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = \text{tr}(\Lambda).$$

D'ailleurs si $\min(\text{rang}(X), m', n') = s$ le cas 3 du paragraphe précédent assure que

$$\|x-\hat{x}\|_Q = 0, \text{ c'est-à-dire que } x = \hat{x}$$

On mesure la "proximité de $\hat{x}$ à x par le réel $\|\hat{x}\|_Q / \|x\|_Q$ qui est appelé la qualité de la représentation de x. On note :

$$Q_t(x) = \|\hat{x}\|_Q / \|x\|_Q$$

Puisque $\hat{x}$ est la projection Q-orthogonale de x sur $<<\bar{U}>,<\bar{V}>>$ on sait que :

$$\|\hat{x}\|_Q \leq \|x\|_Q$$

donc

$$0 \leq Q_t(x) \leq 1. \qquad (76)$$

On dit que $Q_t(x)$ constitue la qualité de la représentation "optimale" de x par une forme linéaire de rang inférieur ou égal à t.

On ferme ce chapitre par une remarque importante :

Si l'on change M en M^{-1} et N en N^{-1} la matrice du produit scalaire défini sur $E^* \otimes F^*$ devient :

$$Q = M \otimes N.$$

Dans ce cas chercher la forme bilinéaire $\hat{x}$ de rang inférieur ou égal à t ($t = \min(m',n')$) plus proche de $x \in E^* \otimes F^*$ au sens de la métrique Q est équivalent à faire l'Analyse en Composantes Principales du triplet (X,M,N) avec s dimensions ($s = \min(\text{rang}(x), m', n')$).

Si (U,V,Λ) est une solution de ACP(X,M,N), alors
$\hat{X} = M^{-1} U \Lambda^{1/2} {}^t V N^{-1}$ est la matrice de $\hat{x}$ par rapport à la base de $E^* \otimes F^*$.

Si M et N sont des métriques unités $\hat{X}$ devient :
$\hat{X} = U \Lambda^{1/2} {}^t V$
qui coïncide avec la matrice obtenue lors de la reconstitution des données réalisée à partir de l'Analyse en Composantes Principales du triplet (X,M,N).

CHAPITRE III - UNE GENERALISATION DE L'ACP

Au chapitre II on a vu que la meilleure approximation de $x \in E^* \otimes F^*$ par un élément d'un sous-espace de la forme $\langle E', F' \rangle$ était obtenue par l'Analyse en Composantes Principales du tableau associé X.

Ce problème d'approximation que l'on avait nommé P2, est généralisé ici au cas d'hypercubes de données de dimension supérieure à 2. On se propose alors de construire une solution de ce problème général qu'on appelle P3. Si χ est un n-hypercube de données nous définissons la n-ACP de χ, par analogie au cas n=2, comme la recherche d'une solution du problème P3.

Nous montrons que dans le cas particulier n=3 et métriques identité, le problème P3 rejoint le modèle tridimensionnel proposé par Ledyard R. Tucker en 1966 [16;294] . Pour cette raison le modèle défini par P3 sera appelé TUCKERN.

Sous des contraintes encore plus fortes le problème P3 rejoint un autre modèle de Tucker, celui de la décomposition d'une matrice tridimensionnelle. On montre que la généralisation de la solution de Tucker au cas n > 3 résout le problème de la décomposition d'un n-hypercube de données. A partir de cette solution on construit une première approximation à la solution du problème P3, que l'on appelle "l'approximation de Tucker" ; on remarque ensuite qu'elle n'est pas toujours une solution du modèle TUCKERN.

La solution du problème P3 est construite en généralisant l'approche de Kroonenberg et de Leeuw au modèle tridimensionnel de Tucker.

Une démarche semblable à celle utilisée au chapitre II permet de montrer que toute solution de P3 doit satisfaire un système d'équations de diagonalisation (Système 2). On résout ce système à l'aide d'un algorithme itératif que nous appelons TUCKALSN car il constitue une extension de l'algorithme TUCKALS3 présenté par Kroonenberg et de Leeuw en 1980.

La pertinence de l'algorithme pour construire une solution du système est alors étudiée en détail. Finalement on montre que toute solution du système 2 constitue un point stationnaire du problème P3.

On clôt le chapitre en présentant quelques propriétés de la solution du modèle TUCKERN.

3.1 - NOTATIONS

a) Soit A un ensemble. On écrit $\{a_i\}_{i\in n}$ ou bien $(a_i)_{i\in n}$ pour désigner la famille des n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de A. Quand il s'agit d'une base d'un espace vectoriel on utilise de préférence la deuxième notation.

b) Soit $\square$ un opérateur associatif défini sur l'ensemble A et $\{a_i\}_{i\in n}$ une famille de n éléments de A, alors :

i- $\displaystyle\bigsquare_{i=1}^{n} a_i =: a_1 \square a_2 \square \ldots \square a_n$

On écrit $\square a_i$ ou encore plus simplement a, si l'on ne risque pas d'ambigüité.

ii- $\displaystyle\bigsquare_{k}^{n} a_i =: a_1 \square a_2 \square \ldots \square a_{k-1} \square a_{k+1} \square \ldots \square a_n$

On écrit de même $\displaystyle\bigsquare_{k} a_i$ ou plus simplement a^k s'il n'y a pas de possibilité de confusion.

iii- Si σ est une permutation de [n]

$$a_\sigma =: \bigsquare_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}.$$

Exemples :

Si A $\otimes$ B dénote le produit tensoriel de deux espaces, et si $\{A_i\}_{i\in n}$ est une famille de n espaces vectoriels, alors

$$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i = \otimes A_i = A = A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_n$$

représente le produit tensoriel, dans l'ordre naturel, de tous les espaces A_i.

$$\bigotimes_k^n A_i = \bigotimes_k A_i = A^k = A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_{k-1} \otimes A_{k+1} \otimes \ldots \otimes A_n$$

est le produit tensoriel, dans l'ordre naturel, de tous les espaces A_i sauf A_k.

Si $\{p_i\}_{i\in n}$ est une famille de n réels, alors

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n, \text{ que l'on note aussi } \prod_{i=1}^n p_i \ ;$$

$$\sum_k^n p_i = \sum_k p_i = p^k = \Big(\prod_{i=1}^n p_i\Big)/p_k = p/p_k \ ; \text{ si } p_k \neq 0.$$

On note aussi $\prod_k p_i$.

c) Soient η une bipartition ordonnées de [n], $\mathcal{O}_1$ l'ordre total défini sur la première classe η_1 et $\mathcal{O}_2$ l'ordre total sur la deuxième classe η_2. Si $\square$ est un opérateur associatif sur A et $\{a_i\}_{i\in n}$ une famille d'éléments de A, alors :

$$\square_{i\in\eta_1} a_i =: \square_{i=1}^{n_1} a_{\mathcal{O}_1(i)} \quad \text{et} \quad \square_{i\in\eta_2} a_i =: \square_{i=1}^{n_2} a_{\mathcal{O}_2(i)}$$

S'il n'y a pas possibilité de confusion on pourra noter a^1 et a^2 respectivement. Remarque : si η est la bipartition définie par la permutation σ et par l'entier n_1 on a :

$$a^1 = \square_{i=1}^{n_1} a_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad a^2 = \square_{i=n_1+1}^{n} a_{\sigma(i)}.$$

d) Soit A un ensemble et $\{a_i\}_{i\in n}$ une famille de n éléments de A. Lorsque l'on ne précise pas d'éléments particulier de la famille et si l'on ne risque pas de confusion, une phrase relative à l'élément générique a_i est extensible à tous les éléments de la famille.

Ainsi la phrase "$a_i > 0$" équivaut à "$\forall i \in [n] \quad a_i > 0$".

Exemple :
Si tous les a_i sont positifs excepté le $k^{ème}$ on pourra écrire simplement "$a_i > 0$ sauf si $i = k$".

3.2 - L'ESPACE $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i^* = \mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n ; \mathbb{R})$

Les concepts énoncés au début du chapitre précédent sont repris ici dans un cadre plus général ($n \geq 2$).
Soient :

$n \geq 2$

$\{p_i\}_{i \in n}$ une famille de n entiers positifs

$\{E_i\}_{i \in n}$ une famille de n espaces vectoriels réels de dimensions respectives p_i.

Soit $\xi^i =: (e^i_{j_i})_{j_i \in p_i}$ une base de E_i. Si E_i^* représente l'espace des formes linéaires définies sur E_i, alors $\xi_i =: ((e^i_{j_i})^*)_{j_i \in p_i}$ est la base duale de E_i^*. On note comme plus haut $e_i^{j_i}$ au lieu de $(e^i_{j_i})^*$.

Soit g_i un élément de E_i^*. Le produit tensoriel des g_i noté $g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_n = \otimes g_i$ est l'application linéaire de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\otimes g_i = g_1 \otimes \ldots \otimes g_n : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to \mathbb{R}$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \longrightarrow g_1(a_1)g_2(a_2)\ldots g_n(a_n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(a_i)$$

$\otimes g_i$ est une forme n-linéaire sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. On écrit $\otimes g_i \in \mathcal{L}_n(\times E_i, \mathbb{R})$ où l'on note $\mathcal{L}_n(E_1 \times \ldots \times E_n; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes n-linéaires sur $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} E_i$.

L'espace $\mathcal{L}_n(XE_i;\mathbb{R})$ est de dimension $p = p_1\, p_2 \ldots p_n$ et les p produits tensoriels des éléments des ξ_i en constituent une base notée ξ :

$$\xi = \bigotimes_{i=1}^{n} \xi_i = (e_1^{j_1} \otimes e_2^{j_2} \otimes \ldots \otimes e_n^{j_n})_{\substack{j_1 \in p_1 \\ j_n \in p_n}} =: (\xi^{j_1 j_2 \ldots j_n})_{\substack{j_1 \in p_1 \\ \vdots \\ j_n \in p_n}} \qquad (1)$$

On considère que les éléments de cette base sont ordonnées lexicographiquement grâce à l'ordre naturel défini sur chaque ensemble $\{1,2,\ldots,p_i\}$.

L'espace $\mathcal{L}_n(XE_i\ ;\ \mathbb{R})$ est noté $E_1^* \otimes E_2^* \otimes \ldots \otimes E_n^*$ et appelé le produit tensoriel des E_i^*. Par simplicité on écrit aussi $\otimes E_i^*$ ou plus simplement encore E^*. Tout vecteur $g \in E^*$ se décompose de façon unique sur la base ξ :

$$g = \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_2=2}^{p_2} \ldots \sum_{j_n=1}^{p_n} g_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, \xi^{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

où les p réels $g_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ sont les coordonnées de g associées à la base ξ de E^*.

Etant donnée une base de E^* tout élément de E^* est parfaitement repéré par la donnée des p réels qui représentent ses coordonnées.

Soit a_i le vecteur de E_i défini par

$$a_i = \sum_{j_i=1}^{p_i} a_i^{j_i}\, e_{j_i}^{i}$$

la valeur de la forme linéaire g en $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ s'écrit :

$$g(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} g_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, \xi^{j_1 j_2 \ldots j_n}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} g_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, \xi_1^{j_1}(a_n) \ldots \xi_n^{j_n}(a_n) =$$

$$= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} g_{j_1 \ldots j_n} \Big(\prod_{i=1}^{n} (\xi_{j_i}^{i})^*(a_i) \Big) =$$

$$= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} g_{j_1 j_2 \ldots j_n} \prod_{i=1}^{n} a_i^{j_i}$$

c'est-à-dire

$$g(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{p_n} g_{j_1 j_2 \cdots j_n}\, a_1^{j_1}\, a_2^{j_2} \cdots a_n^{j_n} .$$

En particulier

$$g(e^1_{j_1}, e^2_{j_2},\ldots,e^n_{j_n}) = g_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

ce qui veut dire que les coordonnées de g dans la base ξ sont les valeurs qu'elle prend sur les p éléments du produit cartésien des bases ξ^i des E_i.

On se propose maintenant de doter E^* d'une structure d'espace euclidien, pour cela considérons une famille $\{M_i\}_{i\in n}$ de formes bilinéaires symétriques définies positives sur les E_i. Puisque chaque M_i définit un produit scalaire sur E_i, $(E_i,M_i)_{i\in n}$ est une famille de n espaces euclidiens.

Soit M_i la matrice de M_i associée à la base ξ^i de E_i.
M_i est une matrice non singulière de $M_{\mathbb{R}}(p_i,p_i)$; elle est symétrique et positive. Il en est de même de $N_i =: M_i^{-1}$.
La matrice N_i rapportée à la base ξ_i munit E_i^* d'un produit scalaire. Si l'on appelle N_i à ce produit scalaire $(E_i^*, N_i)_{i\in n}$ est une famille d'espaces euclidiens.

Le produit de Kroonecker des n matrices N_i

$$N =: N_1 \otimes N_2 \otimes \ldots \otimes N_n$$

est aussi une matrice symétrique définie positive. N qui est une matrice à p lignes et p colonnes, dote à E^* rapporté à la base ξ d'une structure d'espace euclidien. N est la matrice dans la base ξ de E^* d'un produit scalaire noté N . $(\otimes E_i^*, N)$ est donc un espace euclidien.

3.3 - UN ISOMORPHISME D'ESPACE EUCLIDIEN ENTRE E^* ET $M_{\mathbb{R}}$

3.3.1 - L'isomorphisme

On reprend dans ce paragraphe certains concepts du chapitre I. On commence par la définition suivante :

Définition

Soient ξ base de E^* et χ un hypercube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i\in n}$. L'élément de E^* défini par

$$x = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} x_{j_1 j_2 \cdots j_n} \xi^{j_1 j_2 \cdots j_n} \qquad (4)$$

est appelé le tenseur associé au cube χ.
Réciproquement : soient $x \in E^*$ et ξ une base de E^*. Le tenseur x se décompose de façon unique dans la base ξ selon une expression de la forme (64). Alors

$$(x_{j_1 j_2 \cdots j_n})_{\substack{j_1 \in p_1 \\ j_n \in p_n}} \qquad (5)$$

est appelé l'hypercube de données associé au tenseur x et à la base ξ .

Soit maintenant σ une permutation de [n]. σ induit sur [n] un ordre total R_σ défini par :

$$i \; R_\sigma j \iff \sigma(i) < \sigma(j).$$

Soit η la bipartition ordonnée de [n] déterminée par σ et par l'entier n_1 (ch. I.1.3) :

$$\eta = \{\eta_1, \eta_2\} \; ; \quad \mathrm{card}(\eta_1) = n_1 \; ; \quad \mathrm{card}(\eta_2) = n - n_1 =: n_2.$$

η_1 et η_2 sont totalement ordonnées par les restrictions de R_σ sur elles.

Le produit tensoriel :

$$E^*_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} E^*_{\sigma(i)} = \mathcal{L}_n(E_{\sigma(1)} \times E_{\sigma(2)} \times \dots \times E_{\sigma(n)} ; \mathbb{R})$$

est aussi un espace vectoriel réel. Il admet pour base

$$(e^{j_1}_{\sigma(1)} \otimes e^{j_2}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes e^{j_n}_{\sigma(n)})_{\substack{j_1 \in p_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ j_n \in p_{\sigma(n)}}} = \xi_\sigma =: (\xi^{j_1 j_2 \dots j_n}_\sigma)_{\substack{j_1 \in p_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ j_n \in p_{\sigma(n)}}} .$$

La famille $\{[p_{\sigma(i)}]\}_{i \in n}$ et l'ordre naturel définissent sur $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} p_{\sigma(i)}$ un ordre lexicographique qui définit à son tour un ordre total sur la base ξ_σ.

L'application

$$f : \bigotimes_{i=1}^{n} E^*_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} E^*_{\sigma(i)}$$

$$e^{j_1}_1 \otimes e^{j_2}_2 \otimes \dots \otimes e^{j_n}_n \to e^{j_{\sigma(1)}}_{\sigma(1)} \otimes e^{j_{\sigma(2)}}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes e^{j_{\sigma(n)}}_{\sigma(n)}$$

qui associe à tout élément de la base ξ un élément de la base ξ_σ c'est une bijection. Les espaces E^* et E^*_σ sont donc isomorphes par f.

Soient maintenant

$$E^1 = \bigotimes_{i \in n_1} E^*_i \quad \text{et} \quad E^2 = \bigotimes_{i \in n_2} E^*_i .$$

E^1 et E^2 sont deux espaces vectoriels réels de dimensions :

$$\dim(E^1) = \prod_{i=1}^{n_1} p_{\sigma(i)} = p^1 \; ; \quad \dim(E^2) = \prod_{i=n_1+1}^{n} p_{\sigma(i)} = p^2 .$$

et ils admettent pour bases respectives

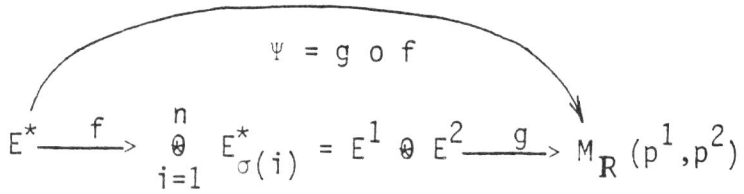
$$\xi^1 = \bigotimes_{i \in n_1} \xi_i \quad \text{et} \quad \xi^2 = \bigotimes_{i \in n_2} \xi_i .$$

L'associativité du produit tensoriel d'espaces vectoriels permet d'écrire :

$$E^*_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} E^*_{\sigma(i)} = \left(\bigotimes_{i=1}^{n_1} E^*_{\sigma(i)}\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=n_1+1}^{n} E^*_{\sigma(i)}\right) = E^1 \otimes E^2.$$

On a vu en (II.2) qu'étant fixées ξ^1 et ξ^2 il existe un isomorphisme entre $E^1 \otimes E^2$ et $M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2)$ appelé ici g qui fait correspondre à $x \in E^1 \otimes E^2$ sa matrice associée.

L'application g o f de E^* dans $M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2)$ définit donc un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels. Cet isomorphisme qui dépend de η et des bases ξ^i choisies au départ est noté Ψ :



Il résulte des définitions que si $x \in E^*$ est le tenseur associé à l'hypercube de données χ, alors $\Psi(x)$ coïncide avec la η-représentation matricielle de x. Aussi dit-on que $\Psi(x)$ est la η-représentation matricielle du tenseur x, et l'on écrit $\overset{\eta}{x}$ au lieu de $\Psi(x)$.

Nous montrons en outre que Ψ est un isomorphisme d'espaces euclidiens. Soient :

$$N^1 = \bigotimes_{i \in \eta_1} N_i \quad \text{et} \quad N^2 = \bigotimes_{i \in \eta_2} N_i$$

On sait que la matrice $N_\sigma = N^1 \otimes N^2$ munit E^*_σ repéré dans la base ξ_σ d'une structure euclidienne : (E^*_σ, N_σ).

La commutativité de la somme et du produit de réels font de (E^*,N) et (E^*_σ,N_σ) deux espaces euclidiens isomorphes. En effet, le développement d'un produit scalaire dans un espace et de son image dans l'autre nous montrent que l'on doit sommer les mêmes termes mais dans un ordre différent défini par la permutation σ . f est donc un isomorphisme d'espace euclidien entre (E^*,N) et $(E^1 \otimes E^2,\ N^1 \otimes N^2)$.

D'autre part d'après ce qu'on a dit en 2.1, l'application g de $(E^1 \otimes E^2,\ N^1 \otimes N^2)$ dans $(M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2),\ \phi_{N^1,N^2})$ est aussi un isomorphisme d'espace euclidien quand ϕ_{N^1,N^2} est définit par :

$$\phi_{N^1,N^2}(X,Y) = \langle X,Y\rangle_{N^1,N^2} = \mathrm{tr}({}^tXN^1YN^2).$$

Alors, si x et y appartiennent à E^* et si

$$X = \Psi(x) \text{ et } Y = \Psi(y)$$

on a :

$$\langle x,y\rangle_N = \langle X,Y\rangle_{N^1,N^2} = \mathrm{tr}({}^tXN^{-1}YN^2)$$

car Ψ = g o f devient un isomorphisme d'espace euclidien entre (E^*,N) et $(M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2),\phi_{N^1,N^2})$ qui associe à $x \in E^*$ sa n-représentation matricielle.

On a déjà remarqué que Ψ dépend des bases choisies sur les E_i. Nous préciserons en 3.3.3 comment se transforme la matrice $X = \Psi(x)$ quand on fait un changement des bases ξ^i. On commence par calculer :

3.3.2 - <u>La matrice de $y = Q(x)$</u>.

Soient $\{q_i\}_{i\in n}$ une famille de n entiers positifs et $\{F_i\}_{i\in n}$ une famille de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions q_i.

Si ξ^i est une base de F_i alors on sait que $\bigotimes_{i=1}^{n} \xi_i =: \xi$ est une base du produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{n} F_i^* =: F^*$.

Soit $\{Q_i\}_{i\in n}$ une famille d'applications linéaires de E_i^* dans F_i^* de matrices Q_i par rapport aux bases ξ_i et ζ_i. On définit l'application linéaire $\mathcal{Q}$ de E^* dans F^* dont la matrice Q associée aux bases ξ et ζ est le produit :

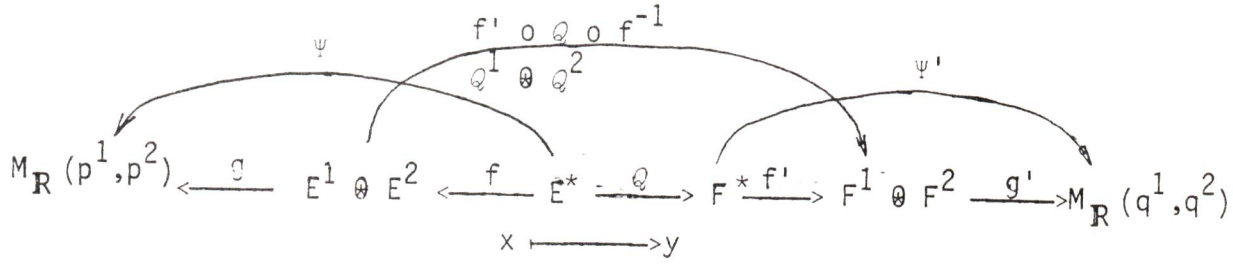
$$Q = \bigotimes_{i=1}^{n} Q_i .$$

De même, avec les notations habituelles $\mathcal{Q}^1$ est une application de E^1 dans F^1 de matrice associée Q^1 et $\mathcal{Q}^2$ est une application de E^2 dans F^2 de matrice Q^2 :

$$Q^1 = \bigotimes_{i\in n_1} Q_i \quad ; \quad Q^2 = \bigotimes_{i\in n_2} Q_i .$$

On note $\mathcal{Q}^1 \otimes \mathcal{Q}^2$ l'application linéaire de $E^1 \otimes E^2$ dans $F^1 \otimes F^2$ de matrice $Q^1 \otimes Q^2$ par rapport aux bases ξ_σ et ζ_σ.

Les isomorphismes Ψ', f' et g' relatifs à $\{F_i\}_{i\in n}$ correspondants à Ψ, f et g définis dans le paragraphe précédent sont réunis dans le diagramme :



Soient $x \in E^*$ et $y = \mathcal{Q}(x) \in F^*$.

Si $\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de x par rapport à la base ξ , alors $\underline{y} = \otimes Q_i \, \underline{x}$ est la matrice des coordonnées de y par rapport à la base ζ de F^*.

$$f(x) \in E^1 \otimes E^2 \quad \text{et} \quad f'(y) \in F^1 \otimes F^2 .$$

Puisque $f' \circ Q \circ f^{-1}$ et $Q^1 \otimes Q^2$ représentent la même application la matrice associée à $f' \circ Q \circ f^{-1}$ doit être $Q^1 \otimes Q^2$.

D'après la définition de Ψ la matrice associée à $f(x)$ est

$$g(f(x)) = \Psi(x) = \overset{n}{X} ,$$

et de même, la matrice associée à $f'(y)$ est

$$g'(f'(y)) = \Psi'(y) = \overset{n}{Y}.$$

Mais

$$f'(y) = f'(Q(x)) = (f' \circ Q \circ f^{-1} \circ f)(x) = (Q^1 \otimes Q^2)f(x))$$

alors $\underline{f'(y)} = Q^1 \otimes Q^2 \, \underline{f(x)}$

où $\underline{f(x)}$ et $\underline{f'(y)}$ sont les matrices unicolonne des coordonnées de $f(x)$ et $f'(y)$ dans $E^1 \otimes E^2$ et $F^1 \otimes F^2$ respectivement. Or $\overset{n}{X}$ et $\overset{n}{Y}$ sont les matrices associées à $f(x)$ et $f'(y)$, par le lemme 8 de (II.2.2) on obtient :

$$\overset{n}{Y} = Q^1 \overset{n}{X} {}^tQ^2. \qquad (6)$$

C'est-à-dire les n-représentations matricielles de x et y sont liées par la relation (6). En d'autres termes, si

$$\underline{y} = (\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} Q_i)\underline{x}$$

alors :

$$\overset{n}{Y} = (\underset{i\in n_1}{\otimes} Q_i) \overset{n}{X} (\underset{i\in n_2}{\otimes} {}^tQ_i). \qquad (7)$$

Voyons maintenant quel est l'effet d'un changement des bases de E_i sur la n-représentation matricielle d'un tenseur $x \in E^*$.

3.3.3 - L'effet d'un changement des bases

Soient $(f^i_{k_i})_{k_i \in p_i}$ une nouvelle base de E_i, que l'on note ζ^i, et U_i la matrice de passage de la nouvelle ζ^i à l'ancienne base ξ^i de E_i : les colonnes de U_i donnent les coordonnées des vecteurs de ζ^i par rapport à la base ξ^i, c'est-à-dire

$$f^i_{k_i} = \sum_{j_i=1}^{p_i} (U_i)^{j_i}_{k_i} \; e^i_{j_i}$$

où $(U_i)^r_s$ est le réel lu en $r^{ème}$ ligne et $s^{ème}$ colonne de U_i.

La matrice U_i étant non singulière on appelle V_i la transposée de son inverse :

$$V_i = {}^t U_i^{-1}.$$

Puisque ζ^i est une base de E_i on sait que $\zeta_i =: (f_i^{k_i})_{k_i \in p_i}$ est une base de E_i^* (elle est la base duale) et que la matrice de passage de la nouvelle base duale ζ_i à l'ancienne base duale ξ_i est précisément V_i. On peut alors écrire :

$$f_i^{k_i} = \sum_{j_i=1}^{p_i} (V_i)^{j_i}_{k_i} \; e_i^{j_i}.$$

On sait aussi puisque ζ_i est une base de E_i^* que l'ensemble

$$\zeta =: \otimes \zeta_i = (f_1^{k_1} \otimes f_2^{k_2} \otimes \ldots \otimes f_n^{k_n})_{k_i \in p_i}$$

constitue une base de E^*. On définit sur cette base le même ordre que celui défini sur ξ.

Pour déterminer la matrice de passage de ζ à ξ prenons l'élément de ζ d'indice $k_1 k_2 \ldots k_n$ et explicitons ses coordonnées par rapport à ξ. L'associativité et la multi-linéarité du produit tensoriel permettent d'écrire :

$$f_1^{k_1} \otimes f_2^{k_2} \otimes \ldots \otimes f_n^{k_n} = \sum_{j_1=1}^{p_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{p_n} (V_1)_{k_1}^{j_1} (V_2)_{k_2}^{j_2} \ldots (V_n)_{k_n}^{j_n} e_1^{j_1} \otimes e_2^{j_2} \otimes \ldots \otimes e_n^{j_n}$$

$$= \sum_{j_1=1} \ldots \sum_{j_n=1} (\bigotimes_{i=1}^{n} V_i)_{k_1 k_2 \ldots k_n}^{j_1 j_2 \ldots j_n} \bigotimes_{i=1}^{n} e_i^{j_i}$$

ce qui montre que le produit de Kroonecker des matrices V_i, $V = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i$, est la matrice de passage de ζ à ξ, et que la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base est :

$$V^{-1} = \bigotimes {}^t U_i = {}^t U.$$

Ainsi, si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont les matrices unicolonnes des coordonnées d'un tenseur $x \in E^*$ rapportées aux bases ζ et ξ respectivement, on a :

$$\underline{y} = {}^t U \underline{x}$$

c'est-à-dire

$$\underline{y} = (\bigotimes_{i=1}^{n} {}^t U_i)\underline{x} .$$

Alors les n-représentations matricielles respectives de x et y par rapport aux bases ξ_i et ζ_i vérifient

$$\overset{n}{Y} = {}^t U^1 \overset{n}{X} U^2 = (\bigotimes_{i \in n_1} {}^t U_i) \overset{n}{X} (\bigotimes_{i \in n_2} U_i), \qquad (8)$$

et

$$\overset{n}{X} = V^1 \overset{n}{Y} {}^t V^2 = {}^t(U^1)^{-1} \overset{n}{Y} (U^2)^{-1}. \qquad (9)$$

Lorsque les bases ζ^i sont M_i-orthonormées, c'est-àdire lorsque

$${}^t U_i M_i U_i = I \text{ et } U_i^{-1} = {}^t U_i M_i$$

l'expression (9) devient :

$$\overset{n}{X} = M^1 U^1 \overset{n}{Y} {}^t U^2 M^2. \qquad (10)$$

En conclusion, si x et y admettent des représentations matricielles liées par une équation du type (8) ou (9) les deux tenseurs sont égaux et $\overset{n}{X}$ et $\overset{n}{Y}$ sont des représentations associées à des bases différentes.

3.3.4 - Un cas particulier et une nouvelle notation

Soit σ la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k+1 & k+2 & \dots & n & k \end{pmatrix} \qquad (11)$$

et n la bipartition σ-ordonnée de $[n]$ définie par

$$n_1 = \{1,2,\dots,k-1,\ k+1,\dots,n\} \quad \text{et} \quad n_2 = \{k\}$$

$$\text{card}(n_1) = n_1 = n-1 \ ; \ \text{card}\,(n_2) = n_2 = 1.$$

Cette bipartition est complètement déterminée par l'entier k.
Dans ce cas, en accord avec la notation b_{ij} du début du chapitre

E^1, U^1, M^1 deviennent E^k, U^k, M^k ; et

E^2, U^2, M^2 coïncident avec E_k, U_k, M_k.

Si $x \in E^*$ on parle de k-représentation au lieu de n-représentation matricielle de x, et on écrit $\overset{k}{X}$ à la place de $\overset{n}{X}$.

On remarque que $\overset{k}{X}$ est une matrice à p^k lignes et p_k colonnes :

$$\overset{k}{X} \in M_{\mathbb{R}}(p^k, p_k) \qquad (p^k = \prod_k p_i)$$

alors, quand la bipartition n est définie par k, les expressions (6), (8), (9) et (10) deviennent respectivement

$$\overset{k}{Y} = Q^k \, \overset{k}{X} \, {}^t Q_k \tag{12}$$

$$\overset{k}{Y} = {}^t U^k \, \overset{k}{X} \, U_k \tag{13}$$

$$\overset{k}{X} = {}^t (U^k)^{-1} \, \overset{k}{X} \, {}^t U_k^{-1} \quad \text{et} \tag{14}$$

$$\overset{k}{X} = M^k U^k \, \overset{k}{X} \, {}^t U_k \, M_k \tag{15}$$

3.4 - LES SOUS-ESPACES DE LA FORME $<\{F_i\}>$

Ce paragraphe généralise les résultats obtenus en 2.3. Du cas n=2 on passe au cas n > 2.

Considérons $\{q_i\}_{i \in n}$ une famille d'entiers positifs tels que $q_i \leq p_i$ et $\{F_i\}_{i \in n}$ une famille de sous-espaces vectoriels des E_i de dimensions q_i.

L'ensemble de toutes les formes n-linéaires sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ est un espace vectoriel de dimension $q = \prod_{i=1}^{n} q_i$. Il est le produit tensoriel des F_i^* :

$$\mathcal{L}_n(F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n ; \mathbb{R}) = F_1^* \otimes F_2^* \otimes \ldots \otimes F_n^* = F^*$$

On constate que

$$\mathcal{L}_n(xF_i \; ; \; \mathbb{R}) \neq \mathcal{L}_n(xE_i \; ; \; \mathbb{R})$$

car le domaine de définition d'une forme n-linéaire $\dot{h}$ appartenant au premier ensemble n'est pas le même que celui d'une forme appartenant au deuxième :

$$xF_i \neq xE_i .$$

Il existe cependant dans $\mathcal{L}_n(xE_i ; \mathbb{R})$ une infinité de formes qui constituent des extensions de $\dot{h}$ à xE_i. Etant donnée la structure euclidienne des espaces (E_i, M_i) il semble naturel de considérer l'extension h de $\dot{h}$ définie de la façon suivante :

Définition

Si $a_i \in E_i$ et si P_i désigne le projecteur M_i-orthogonal sur le sous-espace F_i de E_i ($P_i = M_i \cdot Proj_{F_i}$), alors

$$h(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \dot{h}(P_1(a_1),P_2(a_2),\ldots,P_n(a_n))$$

et on dit que h est l'extension canonique de $\dot{h}$ de xF_i à xE_i (elle ne dépend pas des bases choisies).

Puisque un projecteur est une application linéaire et puisque $\dot{h}$ est n-linéaire il résulte que h, ainsi définie, est une forme n-linéaire sur xE_i :

$$h \in \mathcal{L}_n(xE_i;\mathbb{R}) = E^*.$$

Appelons Φ l'application

$$\Phi : \mathcal{L}_n(xF_i;\mathbb{R}) = F^* \to \mathcal{L}_n(xE_i;\mathbb{R}) = E^* \qquad (16)$$

$$\dot{h} \to \Phi(\dot{h}) = h$$

qui fait correspondre à $\dot{h} \in F^*$ son extension canonique.
Si $\dot{h} \neq \dot{g}$ il est clair que $\Phi(\dot{h}) \neq \Phi(\dot{g})$, ce qui veut dire que Φ est injective.
Il existe donc une bijection entre F^* et l'image $\Phi(F^*) \subset E^*$.

Φ est une application linéaire car :

$$\Phi(\alpha\dot{h}+\beta\dot{g})(a_1,a_2,\ldots,a_n) = (\alpha\dot{h}+\beta\dot{g})(P_1(a_1),\ldots,P_n(a_n)) =$$

$$=\alpha\,\dot{h}(P_1(a_1),\ldots,P_n(a_n))+\beta\dot{g}(P_1(a_1),\ldots,P_n(a_n)) =$$

$$= \alpha\Phi(\dot{h})(a_1,\ldots,a_n)+\beta\Phi(\dot{g})(a_1,\ldots,a_n)$$

c'est-à-dire

$$\Phi(\alpha\dot{h}+\beta\dot{g}) = \alpha\Phi(\dot{h})+\beta\Phi(\dot{g}).$$

Aussi l'ensemble $\Phi(F^*)$ est un sous-espace vectoriel de E^* appelé l'extension canonique de F^*.

Pour ne pas perdre de vue que $\Phi(F^*)$ dépend de la famille $\{F_i\}_{i\in n}$ ce sous-espace de E^* est noté $<\{F_i\}>$ au lieu de $\Phi(F^*)$. On vérifie que $\dim(<\{F_i\}>) = q$.

Considérons maintenant une base de F_i, $\zeta^i = (f^i_{j_i})_{j_i\in q_i}$. Par simplicité on suppose que ζ^i est une base M_i-orthonormée de F_i. Si U_i est la matrice de ζ^i par rapport à la base ξ^i de E_i on a donc

$$ {}^tU_iM_iU_i = I_{q_i} \quad (U_i \in \mathcal{O}^{M_i}_{p_iq_i}). $$

On sait que $\zeta_i = (f_i^{j_i})_{j_i\in q_i}$ est la base duale de F_i^*, et que la famille des q vecteurs de F^* définie par :

$$ (f_1^{j_1} \otimes f_2^{j_2} \otimes \ldots \otimes f_n^{j_n})_{\substack{j_1\in q_1 \\ \vdots \\ j_n\in q_n}} = \bigotimes_{i=1}^{n} \zeta_i $$

constitue une base de F^*, notée

$$ \zeta = (\zeta^{j_1j_1\ldots j_n}), \qquad (j_1,j_2,\ldots,j_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{X}} [q_i] \ ; $$

et puisque l'application Φ est injective la famille des q formes linéaires sur xE_i définie par

$$ \Phi(\zeta^{j_1j_2\ldots j_n})_{\substack{j_1\in q_1 \\ \vdots \\ j_n\in q_n}} =: \hat{\zeta} $$

constitue une base du sous-espace $\Phi(F^*) = <\{F_i\}>$ de E^*. On remarque que cette base $\hat{\zeta}$ de $<\{F_i\}>$ dépend exclusivement des bases ζ^i des sous-espaces F_i.

L'application Φ rend isomorphes les espaces vectoriels F^* et $\Phi(F^*)$. En particulier la matrice unicolonne $\underline{h}$ des coordonnées d'un élément $\dot{h}$ de F^* par rapport à la base ζ de F^* est aussi la matrice des coordonnées de $\Phi(\dot{h}) \in <\{F_i\}>$ rapportées à la base $\hat{\zeta}$ de $<\{F_i\}>$.

Pour cette raison on identifie par abus de langage les deux espaces F^* et $<\{F_i\}>$ bien qu'ils soient différents et on écrit F^* au lieu de $<\{F_i\}>$, le contexte de la phrase nous indiquant si l'on parle du premier ou du second espace.

Si $\{G_i\}_{i\in n}$ est une nouvelle famille d'espaces vectoriels tels que $G_i \subset F_i$ alors on peut écrire :

$$\otimes G_i^* \subset \otimes F_i^* \subset \otimes E_i^* \tag{17}$$

même si strictement il faudrait écrire

$$<\{G_i\}> \subset <\{F_i\}> \subset \otimes E_i^* \tag{18}$$

Considérons maintenant l'élément de la base ζ d'indice $j_1 j_2 \cdots j_n$:

$$\zeta^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \Phi(\zeta^{j_1 j_2 \cdots j_n}) = \Phi(f_1^{j_1} \otimes \cdots \otimes f_n^{j_n}) =$$

$$= f_1^{j_1} \circ P_1 \otimes f_2^{j_2} \circ P_2 \otimes \cdots \otimes f^{j_n} \circ P_n.$$

$$\zeta^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \bigotimes_{i=1}^{n} \zeta_i^{j_i}$$

où l'on appelle $\zeta_i^{j_i} = f_i^{j_i} \circ P_i$.

Tout élément de la base ζ de F^* est donc un produit tensoriel de n formes linéaires sur les E_i.

Voyons quelle est la matrice de la base ζ de $<\{F_i\}>$ par rapport à la base ξ de E^* : on calcule les coordonnées de chaque $\zeta^{j_1 j_2 \cdots j_n}$ relatives à la base ξ de E^*.

$$\zeta^{j_1 j_2 \cdots j_n}(e_{i_1}^1, e_{i_2}^2 \ldots, e_{i_n}^n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \zeta_k^{j_k}(e_{i_k}^k) = \prod_{k=1}^{n} f_k^{j_k} \circ P_k(e_{i_k}^k).$$

Puisque $U_i \in O_{p_i q_i}^{M_i}$ la matrice P_i du projecteur M_i-orthogonal sur F_i par

rapport à la base ξ_i est :

$$P_i = U_i({}^tU_iM_iU_i)^{-1}\ {}^tU_iM_i$$

$$P_i = U_i{}^tU_iM_i\ .$$

Les colonnes de U_i définissent les vecteurs de la base ζ^i. Alors, la matrice du projecteur P_i par rapport aux bases ξ^i de E_i et ξ^i de F_i devient : ${}^tU_iM_i$, et donc :

$$f_k^{j_k} \circ P_k(e_{i_k}^k) = ({}^tU_kM_k)_{i_k}^{j_k} \qquad (19)$$

et,

$$\zeta^{j_1j_2\cdots j_n}(e_{i_1}^1,\ldots,e_{i_n}^n) = \prod_{k=1}^{n} ({}^tU_kM_k)_{i_k}^{j_k} = \prod_{k=1}^{n} (M_kU_k)_{j_k}^{i_k} =$$

$$= \left[\bigotimes_{k=1}^{n} M_kU_k\right]_{j_1j_2\cdots j_n}^{i_1i_2\cdots i_n} = [MU]_{j_1\cdots j_n}^{i_1\cdots i_n}$$

La relation (3) permet de déduire les coordonnées de $\zeta^{j_1\cdots j_n}$ par rapport à la base ξ . Elles sont données par la $(j_1,j_2,\ldots,j_n)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice MU. En d'autres termes la matrice de la base ζ de $<\{F_i\}>$ par rapport à la base ξ de E^* est :

$$B = \bigotimes M_iU_i = MU \qquad (20)$$

et l'on peut dire que $<\{F_i\}>$ coïncide avec l'espace engendré par les vecteurs définis par les colonnes de B :

$$<\{F_i\}> = <B>_\xi\ .$$

Si $\underline{v}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de $h \in F^* \subset E^*$ par rapport à la base ζ, alors les coordonnées de h par rapport à la base ξ de E^* sont par (20) :

$$\underline{h} = MU\ \underline{v} = (\bigotimes M_iV_i)\underline{v}.$$

Réciproquement, si h appartient à $F^* \subset E^*$ il doit exister une matrice unique $\underline{v}$ telle que la matrice $\underline{h}$ des coordonnées de h par rapport à ξ puisse s'exprimer de la forme

$$\underline{h} = MU\underline{v}.$$

La matrice de la restriction de N à F^* relative à la base $\hat{\xi}$ de F^* est :

$${}^tBNB = {}^t(MU)N(MU) = {}^tUMU = \bigotimes_{i=1}^{n} ({}^tU_iM_iU_i) = I$$

ce qui veut dire que la base $\hat{\xi}$ est N-orthonormée.

3.5 - L'ENSEMBLE Γ

Ce paragraphe cherche une caractérisation de l'ensemble Γ de tous les éléments de E^* appartenant au moins à un sous-espace de la forme $<\{F_i\}>$, où F_i dénote un sous-espace de E_i de dimension q_i :

$$\Gamma = \{h \mid \exists \{F_i\}_{i\in n} \text{ telle que } h \in <\{F_i\}>\}, \tag{22}$$

c'est-à-dire

$$\Gamma = \bigcup_{\{F_i\}_{i\in n}} <\{F_i\}>. \tag{23}$$

Si les n matrices U_i définissent des bases M_i-orthonormées des F_i, on sait par (21) que si h appartient à $<\{F_i\}>$ la matrice unicolonne des coordonnées de h par rapport à ξ s'écrit :

$$\underline{h} = (\bigotimes_{i=1}^{n} M_iU_i)\underline{v} \tag{24}$$

Puisqu'on peut toujours trouver une base M_i-orthonormée pour tout sous-espace F_i de E_i, on en déduit que Γ est l'ensemble de tous les éléments de E^* dont la matrice des coordonnées relatives à la base ξ peut s'écrire sous forme (24), c'est-à-dire :

$$\Gamma = \{h \mid \underline{h} = (\bigotimes_{i=1}^{n} M_iU_i)\underline{v} \; ; \; U_i \in O^{M_i}_{p_iq_i} \; ; \; \underline{v} \in M_{\mathbb{R}}(q,1)\}.$$

Considérons maintenant la forme n-linéaire h dont les coordonnées par rapport à la base ξ de E^* sont :

$$\underline{h} = (\otimes A_i)\underline{w}$$

où A_i est une matrice de $M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ et $\underline{w}$ appartient à $M_{\mathbb{R}}(q,1)$. Selon (II,64) on peut toujours trouver des matrices U_i appartenant à $O^{M_i}_{p_i q_i}$ et R_i appartenant à $M_{\mathbb{R}}(q_i,q_i)$ telles que

$$A_i = M_i U_i R_i$$

c'est-à-dire telles que

$$\underline{h} = (\otimes M_i U_i R_i)\underline{w} = (\otimes M_i U_i)(\otimes R_i \underline{w})$$

Appelons $\underline{v}$ à la matrice $(\otimes R_i)\underline{w}$. Puisqu'elle appartient à $M_{\mathbb{R}}(q,1)$ la forme h appartient à Γ , et donc on peut écrire :

$$\Gamma = \{h \mid \underline{h} = (\otimes A_i)\underline{v} \quad \text{où} \quad A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i) \; ; \; \underline{v} \in M_{\mathbb{R}}(q,1)\}. \qquad (25)$$

Nous montrons dans la suite, sans insister trop dans les détails, que l'ensemble Γ coïncide avec l'ensemble de toutes les formes n-linéaires sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ qui satisfont une condition sur le rang. On définit d'abord le rang d'une forme n-linéaire :

Soit f une forme n-linéaire sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et soit $u_1^i, u_2^i, \ldots, u_{r_i}^i$ un ensemble de r_i vecteurs de E_i. On dit que cet ensemble est un générateur du $i^{\text{ème}}$ mode si pour tout élément $(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ il existe r_i réels $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_{r_i}^i$ tels que

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f(a_1,\ldots,a_{i-1}, \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_k^i u_k^i, a_{i+1},\ldots,a_n) \qquad (26)$$

c'est-à-dire tels que

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_k^i f(a_1,\ldots,a_{i-1},u_k^i, a_{i+1},\ldots,a_n) \qquad (27)$$

f étant une forme n-linéaire les coefficients α_k^i dépendent exclusivement du vecteur a_i. L'expression (27) signifie que lorsque l'on connaît pour chaque $a_i \in E_i$ les r_i réels α_k^i on est en mesure de calculer la valeur de f sur tous les éléments de la forme $(a_1, a_2 \ldots a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots a_n)$, ou a_i est n'importe quel vecteur de E_i, à condition que l'on sache la valeur qui prend f chez les r_i éléments $(a_1, \ldots, a_{i-1}, u_k, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ de $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} E_i$.

On dit que q_i est le rang du ième mode de f s'il existe un ensemble générateur du ième mode formé de q_i éléments et s'il n'est pas possible de trouver un ensemble générateur de cardinal plus petit. On parle alors d'ensemble générateur minimal.

Définition

Soit f une forme n-linéaire et $\{q_i\}_{i \in n}$ une famille de n entiers positifs. On dit que f est de rang $\{q_i\}_{i \in n}$ si le rang du ième mode de f est q_i. On dit que f est de rang inférieur à $\{q_i\}$ s'il existe $k \in [n]$ tel que le rang du $k^{\text{ème}}$ mode de f est inférieur à q_k.

Soit $f \in \mathcal{L}_n(xE_i; \mathbf{R})$ de rang $\{q_i\}_{i \in n}$. La n-linéarité de f nous assure d'une part que les q_i vecteurs d'un ensemble générateur minimal $\zeta^i = \{u_1^i, \ldots, u_{q_i}^i\}$ sont libres, et constituent donc une base de l'espace F_i qu'ils engendrent. Elle assure d'autre part, qu'il existe une application linéaire s_i de E_i dans F_i telle que

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, s_i(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) \tag{28}$$

D'après (26) l'application s_i est définie par :

$$s_i : E_i \to F_i$$

$$a_i \to s_i(a_i) = \sum_{k=1}^{q_i} \alpha_k^i \, u_k^i .$$

Notons S_i la matrice de s_i par rapport aux bases ξ^i de E_i et ζ^i de F_i.

$$S_i \in M_{\mathbb{R}}(q_i,p_i) \text{ et } \operatorname{rang}(S_i) = \operatorname{rang}(s_i) = q_i.$$

Puisque ζ^i est une base de F_i on sait que $\zeta = \otimes\zeta_i$ est une base de l'espace F^* des formes n-linéaires sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$.
Appelons $\dot{f}$ à la restriction de f à $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$.
$f \in \mathcal{L}_n(F_1 \times \ldots \times F_n;\mathbb{R})$ et les coordonnées $\dot{f}_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ de $\dot{f}$ par rapport à la base ζ de F^* vérifient :

$$\dot{f}_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \dot{f}(u^1_{j_1}, u^2_{j_2}, \ldots, u^n_{j_n}) = f(u^1_{j_1}, u^2_{j_2}, \ldots, u^n_{j_n})$$

Alors, d'après (28)

$$f(\xi^1_{i_1}, \ldots, \xi^n_{i_n}) = f(s_1(\xi^1_{i_1}), \ldots, s_n(\xi^n_{i_n})) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} s^1_{j_1 i_1}\, s^2_{j_2 i_2} \cdots s^n_{j_n i_n}\, \dot{f}_{j_1 j_2 \ldots j_n} \qquad (29)$$

où s^k_{ij} est l'élément générique de la matrice S_k.
L'expression (29) équivaut à :

$$\underline{f} = (\otimes {}^t S_i)\underline{\dot{f}}$$

où $\underline{f}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de f par rapport à la base ξ de E^*, et $\underline{\dot{f}}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de $\dot{f}$ rapportées à la base ζ de F^*.

On conclut donc qu'il existe n matrices A_i de plein rang, $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ et une matrice unicolonne $\underline{w} \in M_{\mathbb{R}}(q,1)$ permettant d'écrire une forme n-linéaire f de rang $\{q_i\}$ sous la forme

$$\underline{f} = (\otimes A_i)\underline{w} \quad .$$

L'expression (25) de l'ensemble Γ n'impose pas de contraintes de rangs, Γ est donc l'ensemble de toutes les formes n-linéaires sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}$:

$$\Gamma = \{h \in L_n(xE_i;\mathbb{R}) \mid \text{rang}(h) \leq \{q_i\}_{i\in n}\}.$$

La démarche suivie pour caractériser Γ nous permet d'affirmer qu'étant donnée une forme n-linéaire h de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}$ il est possible de trouver des sous-espaces F_i des E_i de telle sorte que h soit l'extension canonique (par projection) d'une forme de F^*. Ainsi, soit f l'élément de Γ défini par :

$$\underline{f} = (\otimes A_i)\underline{w}$$

Si $U_i \in O^{M_i}_{p_i,q_i}$ et $R_i \in M_{\mathbb{R}}(q_i,q_i)$ sont telles que $A_i = M_iU_iR_i$,

Si F_i est le sous-espace de E_i engendré par les colonnes de la matrice U_i $(F_i = \langle U_i \rangle_{\zeta i})$,

Si $\underline{v} = (\otimes R_i)\underline{w}$, et ,

Si $\dot{f}$ est la forme n-linéaire de F^* dont ses coordonnées par rapport à la base ζ sont données par la matrice unicolonne $\underline{v}$

Alors f est l'extension canonique de $\dot{f}$ à $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. C'est-à-dire

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \dot{f}(P_1(a_1), P_2(a_2),\ldots, P_n(a_n)).$$

On note de plus que les q_i vecteurs définis par les colonnes de la matrice U_i constituent un ensemble générateur minimal du $i^{ème}$ mode de f. Puisque la matrice de P_i peut être construite à partir des U_i $(P_i = {}^tU_iM_i)$ il suffit de connaître les q réels $\dot{f}_{j_1j_2\ldots j_n}$ $(j_i \in [q_i])$ et les n matrices U_i pour déterminer complètement la forme n-linéaire f.

Remarque 1

Le sous ensemble Γ de E^* ne dépend que de la famille $\{q_i\}_{i\in n}$.

Remarque 2

Rien ne garantit que Γ soit un sous-espace vectoriel de E^*.
On montre au contraire qu'il ne l'est pas en général. Malgré cela nous nous intéressons dans les paragraphes suivants à l'approximation optimale d'un tenseur $x \in E^*$ par des éléments appartenant à Γ .

Remarque 3

Soit h un élément de Γ et n une bipartition ordonnée de $[n]$.
Par (25) on sait qu'il existe A_i et $\underline{w}$ tels que $\underline{h} = (\overset{n}{\otimes} A_i)\underline{w}$.
Si l'on appelle $\overset{n}{H}$ la n-représentation matricielle de h on déduit de (7) qu'il existe $W \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)$ telle que

$$\overset{n}{H} = (\underset{i\in n_1}{\otimes} A_i)\, W\, (\underset{i\in n_2}{\otimes} A_i).$$

Alors on peut écrire aussi :

$$\Gamma = \{h \in E^* \mid \overset{n}{H} = (\underset{i\in n_1}{\otimes} A_i)\, W\, (\underset{i\in n_2}{\otimes} {}^tA_i)\}$$

où n est n'importe quelle bipartition ordonnée de $[n]$, $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ et $W \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)$.

Remarque 4

Si $\overset{n}{V}$ est la n-représentation matricielle de $h \in F^*$ par rapport à la base ζ, la n-représentation matricielle par rapport à la base ξ de E^* est la matrice :

$$\overset{n}{H} = (\underset{n_1}{\otimes} M_iU_i)\, \overset{n}{V}\, (\underset{n_2}{\otimes} {}^tU_iM_i) = M^1U^1\, \overset{n}{V}\, {}^tU^2M^2. \qquad (30)$$

L'équation (30) est équivalente à :

$$\overset{n}{V} = (\underset{n_1}{\otimes} {}^tU_i)\, \overset{n}{H}\, (\underset{n_2}{\otimes} U_i) = {}^tU^1\, \overset{n}{H}\, U^2.$$

Considérons maintenant le sous espace de E^* défini par la famille $\{G_i\}_{i\in n}$ telle que

$$G_i = \begin{cases} E_i & \text{si } i \in n_1 \\ F_i & \text{si } i \in n_2 \end{cases}$$

et soient les bases $\bar{\xi}^i$ des G_i définies par

$$\bar{\xi}^i = \begin{cases} \xi^i & \text{si } i \in n_1 \\ \xi^i & \text{si } i \in n_2 \end{cases}$$

par (18) on a :

$$F^* = <\{F_i\}> \subset <\{G_i\}> = G^*$$

alors, h appartient à G^* et la n-représentation matricielle de h par rapport à la base $\bar{\xi}$ de G^* est :

$$\bar{\bar{V}} = \overset{n}{H}\, U^2$$

car quand $i \in n_1$ la matrice ξ^i par rapport à la base ξ^i est la matrice unité.

Définition

Si $h \in <\{F_i\}>$ on appelle cube central de h à l'hypercube de données associé au tenseur h et à la base ξ de $<\{F_i\}>$.

3.6 - UNE GENERALISATION DU MODELE DE TUCKER : LE MODELE TUCKERN

3.6.1 - Le modèle TUCKERN

On pose immédiatement le problème dont la solution constitue l'axe de ce chapitre et de cette thèse.

Soient, comme précédemment :

$\{p_i\}_{i\in n}$ une famille d'entiers positifs ;

$\{(E_i, M_i)\}$ une famille de n espaces euclidiens de dimensions respectives p_i ;

$\xi^i = (e^i_{j_i})$ une base de E_i, et $\xi_i = (e_i^{j_i})$ la base duale de E_i^* ;

M_i la matrice de M_i par rapport à ξ^i

$N_i = M_i^{-1}$ et

(E^*, N) l'espace euclidien des formes n-linéaires sur xE_i, où la matrice de N par rapport à la base $\xi = \otimes\xi_i$ de E^* est $N = \bigotimes_{i=1}^{n} N_i$.

Alors :

PROBLEME P3

Etant donné $x \in E^*$ et la famille $\{q_i\}_{i\in n}$ de n entiers positifs tels que $q_i \leq p_i$.

Trouver $\hat{x} \in \Gamma$ tel que la quantité

$$\|x-\hat{x}\|_N \text{ soit minimale} \qquad (31)$$

On renvoie à la fin de ce paragraphe la démonstration de l'existence d'une solution à ce problème, pour l'instant on admet que P3 est bien posé.

Définition

Soit χ un hypercube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i\in n}$, et soit x le tenseur de E^* associé à l'hypercube de données χ, alors, faire la n-ACP de χ consiste à trouver une solution du problème P3.

Dans ce travail on dira que le problème P3 constitue le modèle de TUCKER généralisé, et on le note TUCKERN. On justifie en (3.6.2) cette appellation.

Remarque

Bien entendu il peut exister des formes n-linéaires plus proches de x que la forme $\hat{x}$, solution du problème 3. On sait qu'alors elles n'appartiennent pas à l'ensemble Γ . Ceci veut dire que si par exemple y est une de telles formes :

a) y n'est pas extension canonique d'aucune forme n-linéaire appartenant à un espace de la forme $\otimes F_i^*$.

b) y n'est pas de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}_{i\in n}$.

c) On ne peut pas transformer les bases des E_i de façon à ce que l'on puisse associer les nouvelles coordonnées de y à un n-hypercube de données de dimensions $\{q_i\}$. C'est-à-dire on ne peut pas "condenser" y dans un cube des dimensions réduites $\{q_i\}_{i\in n}$.

Appelons Γ_o l'ensemble de toutes les familles $\{F_i\}_{i\in n}$ des sous-espaces des E_i tels que $\dim(F_i) = q_i$:

$$\Gamma_o = \{\{F_i\}_{i\in n} \mid F_i \subset E_i \ ; \ \dim(F_i) = q_i\}. \qquad (32)$$

D'après la définition de Γ (22) le problème P3 peut s'exprimer dans les termes suivants :

Etant donnés $x \in E^*$ et $\{q_i\}$ trouver une famille $\{F_i\}$ et un $\hat{x} \in \langle\{F_i\}\rangle$ tels que la quantité $\|x-\hat{x}\|_N$ soit aussi petite que possible. Or $\langle\{F_i\}\rangle$ est un sous espace vectoriel de E^*, le problème P3 est équivalent aux problèmes d'optimisation :

$$\min_{\{F_i\}\in\Gamma_o} \|x-Proj_{\langle\{F_i\}\rangle}(x)\|_N \qquad (33)$$

$$\max_{\{F_i\}\in\Gamma_o} \|Proj_{\langle\{F_i\}\rangle}(x)\|_N \qquad (34)$$

car il s'agit d'une projection N-orthogonale.

Toute matrice M_i-orthonormée définit un sous espace F_i de E_i : l'espace $\langle U_i \rangle_{\xi i}$; et réciproquement puisqu'on peut doter tout sous espace F_i de E_i d'une base M_i-orthonormée il existe $U_i \in O^{M_i}_{p_i q_i}$ telle que $F_i = \langle U_i \rangle_{\xi i}$. Notons alors :

$$\Gamma_1 = \prod_{i=1}^{n} O^{M_i}_{p_i q_i} = \{(U_1, U_2, \ldots, U_n) \mid U_i \in O^{M_i}_{p_i q_i}\} \qquad (35)$$

on peut écrire :

$$\Gamma_o = \{\{\langle U_i \rangle_{\xi i}\}_{i \in n} \mid (U_1, U_2, \ldots, U_n) \in \Gamma_1\} \qquad (36)$$

Appelons ζ^i à la base de $F_i = \langle U_i \rangle_{\xi i}$ définie par les colonnes de la matrice U_i et ζ_i à la base duale de F_i^*. On a vu en (3.4) que $\otimes \zeta_i = \zeta$ était une base de $\otimes F_i^*$ et $\Phi(\zeta) = \xi$ une base N-orthonormée de $\langle \{F_i\} \rangle$; la matrice de ξ par rapport à la base ξ de E^* était $B = MU$.

Puisque $\langle MU \rangle_\xi = \langle \{F_i\} \rangle$ on sait que la matrice P du projecteur N-orthogonal sur le sous espace $\langle \{F_i\} \rangle$ de E^*, $Proj_{\langle \{F_i\} \rangle}$, est :

$$P = B({}^tBNB)^{-1}\, {}^tBN ,$$

donc

$$P = MU\,{}^tU = \bigotimes_{i=1}^{n} (M_i U_i\, {}^tU_i) \qquad (37)$$

Si $\underline{x}$ désigne la matrice unicolonne des coordonnées de $x \in E^*$ par rapport à la base ξ alors (34) peut s'écrire grâce à (36) et (37) :

$$\max_{(U_1, \ldots, U_n) \in \Gamma_1} \left\| \bigotimes_{i=1}^{n} (M_i U_i\, {}^tU_i)\underline{x} \right\|_N \qquad (38)$$

Définition

Soit $u \in \Gamma_1$, $u = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$. On appelle f l'application de Γ_1 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(u) = \left\| \left(\bigotimes M_i U_i\, {}^tU_i\right)\underline{x} \right\|_N^2$$

PROPOSITION 1

f est continue sur Γ_1.

Démonstration

$$\| (\otimes M_i U_i {}^t U_i)\underline{x}\|_N^2 = tr({}^t\underline{x}(\otimes U_i {}^t U_i)\underline{x})$$

ce qui met en évidence la continuité de f en $u = (U_1,\ldots,U_n)$.

Avec cette définition de f il est clair que P3 est équivalent à :

PROBLEME P3'

$$\max_{u\in\Gamma_1} f(u) \tag{39}$$

Si $\bar{u} = (\bar{U}_1,\bar{U}_2,\ldots,\bar{U}_n)$ optimise (39) alors $\{<\bar{U}_i> \xi_i\}_{i\in n}$ optimise (38), et $\hat{x}$ dont la matrice des coordonnées est $(\otimes M_i \bar{U}_i {}^t\bar{U}_i)\underline{x}$, optimise (31).

Finalement si n est une bipartition ordonnée de [n] et si $\overset{n}{X}$ est la n-représentation matricielle de x, on sait que l'on peut écrire (38) sous la forme :

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)} \| (\underset{n_1}{\otimes} M_i U_i {}^t U_i)\ \overset{n}{X}\ (\underset{n_2}{\otimes} U_i {}^t U_i M_i)\|_{\underset{n_1}{\otimes} N_i,\ \underset{n_2}{\otimes} N_i} \tag{40}$$

c'est-à-dire :

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)} \|M^1 U^1 {}^t U^1\ \overset{n}{X}\ U^2 {}^t U^2 M^2\|_{N^1,N^2}.$$

Montrons maintenant que le problème P3' (et donc P3 et tous ses équivalents) admet toujours une solution.

PROPOSITION 2

O^M_{pq} est une partie compacte de $M_{\mathbb{R}}(p,q)$.

Démonstration

Considérons sur $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ le produit scalaire $\phi_{M,I}$ défini pour tous X et $Y \in M_{\mathbb{R}}(p,q)$ par :

$$\phi_{M,I}(X,Y) = tr({}^tXMYI) = tr({}^tXMY).$$

Puisque les espaces vectoriels $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ et $\mathbb{R}^{pq}$ sont isomorphes du lemme 7 du chapitre II on déduit que $(M_{\mathbb{R}}(p,q),\phi_{M,I})$ et $(\mathbb{R}^{pq}, M \otimes I_q)$ sont isométriques, donc homeomorphes.

On sait que les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts. Une condition suffisante pour que $\mathcal{O}^M_{pq}$ soit une partie compacte de $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ est donc qu'il soit fermé et borné.

D'une part si $X \in \mathcal{O}^M_{pq}$ on a

$$\|X\|_{\phi_{M,I}} = tr^{1/2}({}^tXMX) = \sqrt{q},$$

donc $\mathcal{O}^M_{pq}$ est borné.
D'autre part, si X est la limite d'une suite $\{X_i\}$ de matrices appartenant à $\mathcal{O}^M_{pq}$, $X = \lim_{i\to\infty} \{X_i\}$, elle doit appartenir aussi à $\mathcal{O}^M_{pq}$ car si ceci n'était pas le cas on pourrait certainement construire un voisinage de X, n'incluant pas des matrices de $\mathcal{O}^M_{pq}$. Alors $adh(\mathcal{O}^M_{pq}) \subset \mathcal{O}^M_{pq}$, et donc $\mathcal{O}^M_{pq}$ est fermé.
Par suite $\mathcal{O}^M_{pq}$ est compact.

PROPOSITION 3

Γ_1 est compact.

Démonstration

Par définition $\Gamma_1 = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}^{M_i}_{p_i q_i}$. Or, le produit cartésien de compacts est un compact, il en résulte que Γ_1 est compact par la topologie du produit (on remarque de plus que Γ_1 est métrisable).

PROPOSITION 3

Le problème P3' et tous ses équivalents, admettent une solution.

Démonstration

Puisque la fonction réelle f est définie et continue sur le compact Γ_1 il existe $\bar{u} \in \Gamma_1$ tel que pour tout $u \in \Gamma_1$

$$f(\bar{u}) \geq f(u)$$

ce qui montre que $\bar{u}$ optimise (39) et qu'il constitue une solution de P3'.

3.6.2 - Le problème de la décomposition d'un tenseur

Ce paragraphe montre que l'on peut toujours construire une solution "analytique" de P3 lorsque les familles $\{q_i\}$ et $\{M_i\}$ prennent une forme particulière. Ce cas particulier donne lieu au problème que l'on dit de décomposition d'un tenseur.

Soit $\overset{k}{X}$ la k-représentation matricielle de $x \in E^*$, et soit r_k le rang de la matrice $\overset{k}{X}$. Nous considérons le problème P3 dans le cas où pour tout $i \in [n]$ $q_i = r_i$, et M_i est la matrice unité (d'ordre p_i) :

$$\forall i \in n \quad q_i = r_i \quad ; M_i = I_{p_i}.$$

Soit (V_k, U_k, Λ_k) une solution d'ordre r_k de l'ACP du triplet $(\overset{k}{X}, I_{q^k}, I_{q_k})$:

$$\overset{t}{X}\overset{k}{X}\overset{k}{X} U_k \equiv U_k \Lambda_k \tag{42}$$

Puisque on retient tous les éléments propres non nuls il se trouve que :

$$\overset{k}{X} = V_k \Lambda_k^{1/2} \, {}^t U_k \tag{43}$$

$$\overset{k}{X} = \overset{k}{X} U_k^t U_k.$$

Nous nous proposons de montrer que

$$Proj_{<\{F_i\}>}(x) = x \tag{44}$$

où F_i est le sous-espace de E_i défini par les colonnes de U_i :

$$F_i = \langle U_i \rangle_{\xi i} \tag{45}$$

Si ceci est vrai on a :

$$\| x - \mathcal{P}\mathrm{roj}_{\langle \{F_i\} \rangle}(x) \| = 0 \tag{46}$$

et donc $\{F_i\}_{i \in n}$ définit une solution du problème P3.
Afin de montrer (46) considérons les n familles suivantes :

Soit la famille $\{\overset{k}{G}_i\}$ définie pour tout $k \in [n]$ par

$$\overset{k}{G}_i = \begin{cases} E_i & \text{si } i \neq k \\ F_i & \text{si } i = k \end{cases}$$

Appelons $\overset{k}{V}_i$ la matrice d'une base orthonormée de $\overset{k}{G}_i$ par rapport à ξ^i. Si $i_k = k$ on prend $\overset{k}{V}_i = U_i$. On remarque que si $i \neq k$ $\overset{k}{V}_i \, {}^t\overset{k}{V}_i = I$ car V_i devient orthogonale.

Considérons maintenant les sous-espaces $\langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle$ de E^*. On sait par (18) que pour tout $k \in [n]$

$$\langle \{F_i\} \rangle \subset \langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle \subset E^*$$

donc

$$\langle \{F_i\} \rangle \subset \bigcap_{k=1}^{n} \langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle =: G.$$

Nous notons ici P_k la matrice de $\mathcal{P}\mathrm{roj}_{\langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle}$, le projecteur orthogonal sur $\langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle$, et par P la matrice de $\mathcal{P}\mathrm{roj}_G$, le projecteur orthogonal sur $\bigcap_k \langle \{\overset{k}{G}_i\} \rangle$. D'après (37) :

$$P_k = \bigotimes_{i=1}^{n} M_i \, \overset{k}{V}_i \, {}^t\overset{k}{V}_i \tag{47}$$

$$P_k = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \quad \text{où} \quad A_i = \begin{cases} I & \text{si } i \neq k \\ U_i \, {}^tU_i & \text{si } i = k \end{cases}$$

La matrice unicolonne $\underline{x}$ de coordonnées de x par rapport à la base ξ de E^* vérifie :

$$P_k \underline{x} = (\bigotimes A_i)\underline{x}$$

ce qui signifie que la k-représentation matricielle de $P_k \underline{x}$ est :

$$(\bigotimes_k A_i) \overset{k}{X}\, {}^tA_k = \overset{k}{X}\, {}^tA_k = \overset{k}{X}\, U_k\, {}^tU_k.$$

Puisque selon (44)

$$\overset{k}{X} = \overset{k}{X}\, U_k\, {}^tU_k$$

on en déduit que

$$P_k \underline{x} = \underline{x} \tag{48}$$

c'est-à-dire

$$Proj_{<\{G_i\}>}^{k}(x) = x$$

On constate sans difficulté que les matrices P_k commutent, alors on sait (voir par exemple [15;34]), que :

$$Proj_G = \overset{n}{\underset{k=1}{o}} Proj_{<\{G_i\}>}^{k} \tag{49}$$

et

$$P = P_1 P_2 \ldots P_n \tag{50}$$

Remplaçons (47) dans (50), on obtient :

$$P = \bigotimes_{i=1}^{n} (U_i\, {}^tU_i) = U\, {}^tU \tag{51}$$

mais, selon (37) la matrice de $Proj_{<\{F_i\}>}$ s'écrit aussi

$$P = \bigotimes_{i=1}^{n} U_i\, {}^tU_i$$

ce qui conduit à affirmer que

$$<\{F_i\}> = \bigcap_{k=1}^{n} <\{G_i\}>^{k}$$

et par conséquent

$$\mathcal{P}roj_{<\{F_i\}>}(x) = \mathcal{P}roj_G(x) = (\bigcirc_{k=1}^{n} roj_{<\{G_i\}>}^{k})(x) = x \qquad (52)$$

ce qu'on voulait montrer .

Alors, si $q_i = rang(\overset{i}{X})$ la famille $\{U_i\}_{i\in n}$, où U_i est définie par l'expression (42) constitue une solution du problème P3.

Reprenons l'équation (52). D'après (51) elle peut s'écrire

$$(\boxtimes U_i)\ (\boxtimes\ {}^{t}U_i)\underline{x} = \underline{x} \qquad (53)$$

Puisque dans notre cas la matrice B de la base ξ de $<\{F_i\}>$ par rapport à la base ξ de E^* devient :

$$B = \boxtimes U_i$$

on sait que

$$(\boxtimes\ {}^{t}U_i)\underline{x} =: \underline{h} \qquad (54)$$

représente la matrice unicolonne des coordonnées $h_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ de x par rapport à ξ. Notons $x_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ les coordonnées de x relatives à ξ . Alors, en développant (54) on constate que :

$$h_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} u^1_{i_1 j_1}\, u^2_{i_2 j_2} \cdots u^n_{i_n j_n}\, x_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad (55)$$

où $u^k_{i_k j_k}$ dénote le réel $[U_k]^{j_k}_{i_k}$.

En remplaçant (54) dans (53) on obtient :

$$(\otimes U_i)\underline{h} = \underline{x} \tag{56}$$

qui s'écrit :

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_1=1}^{q_1} \sum_{j_2=1}^{q_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} u^1_{i_1 j_1} u^2_{i_2 j_2} \ldots u^n_{i_n j_n} h_{j_1 j_2 \ldots j_n} \tag{57}$$

Cette expression montre que si les n matrices U_k sont les matrices des vecteurs propres correspondants aux valeurs propres non nulles de ${}^t X^k X^k$, et si les composantes de $\underline{h}$ sont définies par l'équation (55), on peut décomposer le tenseur $x \in E^*$ selon la forme décrite par (57).
C'est-à-dire que si pour tout $k \in [n]$ $q_k = \text{rang}(X^k)$ alors la famille $\{U_k\}_{k \in n}$ définie par (42) et le cube de données h défini par (55) constituent une solution du problème de décomposition suivant :

PROBLEME P4 (de décomposition)

Soient $\{p_i\}_{i \in n}$ une famille de n entiers positifs et χ un n-hypercube de données associé à la famille $\{p_i\}$. Trouver :

1- une famille d'entiers positifs $\{r_i\}_{i \in n}$
2- un n-hypercube de données h, associé à $\{r_i\}$, et
3- une famille $\{U_i\}_{i \in n}$ de n matrices orthonormées $({}^t U_i U_i = I_{r_i})$

tels que :

$$\forall (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \prod_{i=1}^{n} [p_i]$$

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=2}^{r_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{r_n} u^1_{i_1 j_1} u^2_{i_2 j_2} \ldots u^n_{i_n j_n} h_{j_1 j_2 \ldots j_n}.$$

On remarque que, d'après (55) la solution de P4 que nous présentons détermine h par $\{U_i\}$. La solution du problème de décomposition est donc complètement déterminée par la famille de matrices orthonormées $\{U_i\}_{i \in n}$.

Reprenons maintenant le problème P3, et supposons que la famille $\{q_i\}$, donnée à priori contient au moins un indice $k \in [n]$ pour lequel $q_k < r_k = \text{rang}(X_k)$. Associons à la solution $\{U_i\}_{i\in n}$ du problème de décomposition de χ la famille $\{\bar{U}_i\}_{i\in n}$ où $\bar{U}_i$ est la matrice des q_i premières colonnes de U_i. La matrice $\bar{U}_k$, ainsi définie, ne vérifie pas l'équation (44), et en conséquence (48) n'est pas vérifiée non plus. La partie gauche de (46) devient strictement positive et la décomposition décrite par (57) n'est plus valable : on ne peut donc garantir que $\{\bar{U}_i\}_{i\in n}$ soit une solution du problème P3 (modèle TUCKERN). D'ailleurs, on présente enfin de chapitre un contre-exemple montrant que si $n \geq 3$ elle ne l'est pas, en général.

Dans la mesure où q_i est proche de r_i on peut considérer que $\{\bar{U}_i\}$ constitue une approximation de la solution de P3. Sans juger pour autant de la qualité de cette approximation on l'utilise cependant dans le paragraphe suivant.

Si $n = 3$ le problème P3 rejoint le modèle proposé par L.R. Tucker en 1966 [Tucker, 1966, page 291] et $\{\bar{U}_i\}_{i\in n}$ coïncide avec l'approximation présentée par Tucker à la solution de ce modèle. C'est pourquoi nous appelons au problème P3, le modèle TUCKERN ; et à $\{\bar{U}_i\}$ l'approximation de Tucker à la solution de TUCKERN.

3.6.3 - La solution du modèle TUCKERN. L'algorithme TUCKALSN

3.6.3.1 - Une condition nécessaire : le système S2

On montre dans ce paragraphe que si $u = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ optimise l'expression (38), équivalente au problème P3, les n matrices U_i doivent vérifier simultanément les n équations de diagonalisation du système S2.

On a vu en 3.6.1 que le modèle TUCKERN était équivalent au problème d'optimisation

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)\in\Gamma_1} \| (\bigotimes_{i=1}^{n} M_i\, U_i\, {}^tU_i)\underline{x}\|_N \qquad (58)$$

D'après (41) pour tout $k \in [n]$ cette expression est équivalente à

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)\in\Gamma_1} \|M^k U^k\, {}^tU^k\, {}^k\!X\, U_k\, {}^tU_k M_k\|_{N^k,N_k}$$

c'est-à-dire à :

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)\in\Gamma_1} tr(M_k U_k\, {}^tU_k\, {}^t\,{}^k\!X\, U^k {}^tU_k {}^kM_k {}^kN_k {}^kM_k {}^kU_k {}^tU^k\, {}^k\!X\, U_k {}^tU_k M_k N_k)$$

ou encore a :

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)\in\Gamma_1} tr({}^tU_k {}^t\,{}^k\!X\, (\bigotimes_k U_i {}^tU_i)\, {}^k\!X\, U_k) \qquad (59)$$

car, par définition $N_i = M_i^{-1}$ et ${}^tU_i M_i U_i = I$.

La matrice ${}^t\,{}^k\!X\, (\bigotimes_k U_i {}^tU_i)\, {}^k\!X$ est symétrique et la quantité exprimée par (59) est indépendante du k choisi. Alors, si $\bar{u} = (\bar{U}_1,\bar{U}_2,\ldots,\bar{U}_n)$ optimise (59), d'après la proposition 1 du chapitre II chaque matrice $\bar{U}_k$ doit satisfaire l'expression :

$${}^t\,{}^k\!X\, (\bigotimes_k \bar{U}_i {}^t\bar{U}_i)\, {}^k\!X\, N_k M_k \bar{U}_k \equiv M_k \bar{U}_k \Lambda_k .$$

On a donc la :

PROPOSITION 5

Si $u = (U_1,U_2,\ldots,U_n) \in \Gamma_1$ définit une solution du problème P3, les n matrices U_i doivent résoudre simultanément les n expressions du système :

$$S2 \quad \left\{ \; {}^t\,{}^k\!X\, (\bigotimes_k U_i {}^tU_i)\, {}^k\!X\, N_k M_k U_k \equiv M_k U_k \Lambda_k . \right. \qquad (60)$$

3.6.3.2 - Résolution algorithmique du système S2

3.6.3.2.1 - Un changement de base pour simplifier les calculs.

Afin de simplifier l'écriture et les calculs qui suivent nous changons les bases ξ^i des E_i de façon à ce que les matrices des produits scalaires M_i et N définies sur E_i et E^* respectivement soient les matrices unité.

Puisque M_i, la matrice de M_i par rapport à la base ξ^i est symétrique et positive on peut trouver une matrice K_i, non singulière telle que

$$M_i = {}^tK_iK_i$$

Soit ζ^i une nouvelle base de E_i, celle définie par les colonnes de $(K_i)^{-1}$. La matrice $(K_i)^{-1}$ permet donc de passer de la base ζ^i à l'ancienne base ξ^i de E_i. De plus la matrice de M_i dans la nouvelle base ζ^i devient :

$${}^t(K_i^{-1})\ M_i\ K_i^{-1} = {}^tK_i^{-1}\ {}^tK_iK_iK_i^{-1} = I.$$

Puisque ζ^i est une base de E_i, ζ_i est la base duale de E_i^* et en conséquence, $\zeta = \bigotimes_{i=1}^{n} \zeta_i$ est une nouvelle base de E^*. D'après (3.3) K_i^{-1} étant la matrice de passage de ζ^i à ξ^i la matrice de passage de ζ à ξ s'écrit :

$${}^t(\bigotimes_{i=1}^{n} K_i^{-1})^{-1}$$

Notons $K = (\bigotimes_{i=1}^{n} K_i)$, on sait donc que ${}^tK$ est la matrice dont les colonnes définissent les coordonnées des vecteurs de ζ dans la base ξ de E^*.

La matrice du produit scalaire N par rapport à cette nouvelle base devient :

$${}^t({}^tK)N\ {}^tK = KM^{-1}\ {}^tK = K(\bigotimes {}^tK_iK_i)^{-1}\ {}^tK = KK^{-1}\ {}^tK^{-1}\ {}^tK = I$$

D'autre part la matrice unicolonne $\underline{x}$ des coordonnées de $x \in E^*$ par rapport à ξ permet de calculer les coordonnées de x rapportées à ζ :

$$\underline{x}' = ({}^tK)^{-1}\ \underline{x} \qquad (61)$$

En résumé, la transformation des coordonnées du tenseur x selon (61) ramène la formulation du problème P3 à une forme simplifiée ou $M_i = I_{p_i}$ et $N = I_p$. Les matrices U_i sont alors des sections verticales de matrices orthogonales $U_i \in O^I_{p_i q_i}$. Le problème P3 s'écrit alors :

$$\max_{(U_1,\ldots,U_n)\in\Gamma_1} \| (\bigotimes_{i=1}^{n} U_i {}^tU_i)\underline{x}\| \qquad (62)$$

et le système S2 devient :

$$\{ \; T_k U_k \equiv U_k \Lambda_k \qquad (63)$$

où $T_k = {}^t X^k \otimes U_i {}^tU_i X^k$,

Λ_k est la matrice diagonale des q_k premières valeurs propres de T_k, et

$\Gamma_1 = \underset{i=1}{\overset{n}{X}} O^I_{p_i q_i}$.

3.6.3.2.2 - L'algorithme TUCKALSN

On décrit ici un algorithme destiné à construire une solution du système S2. L'analyse de sa validité est traitée au paragraphe suivant.

Par simplicité et puisque on ne risque pas d'ambiguïté on écrit dans ce paragraphe Γ au lieu Γ_1, et on adopte les notations suivantes :

Notations : Soient $0 < n \leq m$. On note :

a) $S^+_{mn}(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $S^+_m(\mathbb{R})$ (l'ensemble de matrices réelles symétriques semi-définies positives) dont les n premières valeurs propres sont toutes distinctes et positives. On le note aussi S^+_{mn}.

b) Si $X \in S^+_{mn}$ on désigne par $V_n(X)$ la matrice des n premiers vecteurs propres de X. $V_n(X)$ est la seule solution de l'expression :

$$X V_n(X) \equiv V_n(X)\Lambda.$$

On définit ainsi V_n en tant que fonction de $\mathcal{S}_m^+$ dans $\mathcal{O}_{mn}$ et en tant qu'application de $\mathcal{S}_{mn}^+$ dans $\mathcal{O}_{mn}$:

On note V_n l'application définie par :

$$V_n : \mathcal{S}_{mn}^+(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}_{mn}$$

$$X \to V_n(X).$$

Or on dit qu'une fonction h de A en B est bien définie dans un point de A si ce point appartient au domaine de définition de h, on peut dire donc que la fonction V_n est bien définie en X si X appartient à $\mathcal{S}_{mn}^+$.

PROPOSITION 6

La fonction V_n est continue sur $\mathcal{S}_{mn}^+$.

Démonstration : Soit $X \in S_{mn}^+$.
Les valeurs propres de X sont les zéros de son polynôme caractéristique. Puisque les zéros d'un polynôme varient continuement par rapport aux coefficients, les valeurs propres varient continuement par rapport à X.
Le vecteur propre normé μ de X relatif à la valeur propre λ étant la seule solution de l'équation

$$(X-\lambda I)\mu = 0$$

la fonction qui fait correspondre à X ses vecteurs propres normés est continue en X.

Soit $x \in E^*$, $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \Gamma$ et $k \in [n]$. On définit l'application T_k de Γ dans $\mathcal{S}_{r_k}^+(\mathbb{R})$ par :

$$T_k : \Gamma \to \mathcal{S}_{r_k}^+(\mathbb{R})$$

$$u \to {}^t\overset{k}{X}\left(\underset{k}{\otimes} u_i\ {}^t u_i\right)\overset{k}{X}$$

où $\overset{k}{X}$ est la k-représentation matricielle de X et $r_k = \operatorname{rang}(\overset{k}{X})$.

Remarque 1

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \Gamma$ ne diffère de u que par la $k^{ème}$ coordonnée on a :

$$T_k(u) = T_k(v).$$

$T_k(u)$ ne dépend pas de la $k^{ème}$ composante de u et l'on peut écrire :

$$T_k(u) : T_k(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, \cdot, u_{k+1}, \ldots, u_n) \qquad (64)$$

Remarque 2

T_k est continue dans Γ.

Soit $k \in [n]$. Notons F_k la fonction de Γ dans Γ définie par:

$$F_k : \Gamma \to \Gamma$$

$$u=(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, V_{q_k}(T_k(u)), u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

F_k remplace la $k^{ème}$ composante de u par la matrice $V_{q_k}(T_k(u))$ des q_k premiers vecteurs propres de $T_k(u)$.
On écrit u_k^* au lieu de $V_{q_k}(T_k(u))$, et V au lieu de V_{q_k} s'il n'y a pas risque de confusion. Cela donne :

$$F_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k^*, u_{k+1}, \ldots, u_n) \qquad (65)$$

Remarques

1- $F_k(u)$ ne dépend pas de la $k^{ème}$ composantes de u.

2- F_k n'est pas définie pour tout $u \in \Gamma$ car V_{q_k} n'est pas définie dans tout $S^+_{p_k}(\mathbb{R})$.

Définition

On appelle F la fonction de Γ dans Γ définie par :

$$F(u) = F_n(\ldots F_2(F_1(u))\ldots) = \left(\overset{1}{\underset{i=n}{\circ}} F_i\right)(u).$$

Remarques : F n'est pas définie dans tout Γ car les F_k ne le sont pas.

Le domaine de définition de F, que l'on note $D(F)$, est constitué par tous les u de Γ tels que :

$$\begin{cases} T_1(u) \in S^+_{p_1 q_1} \\ T_k((\overset{1}{\underset{i=k-1}{\circ}} F_i)(u)) \in S^+_{p_k q_k} \qquad \forall k \in \{2,\ldots,n\} \end{cases} \tag{66}$$

c'est-à-dire par tous les points où les matrices des vecteurs propres sont définies sans ambiguité car elles sont associées à des valeurs propres distinctes.

Remarque : En général $F(u) \neq (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ (67)

PROPOSITION 7

La fonction F est continue sur $D(F)$.

Démonstration

Si F est définie en $u \in \Gamma$ les n expressions de (66) sont toutes vérifiées. Elles garantissent que V_{q_1} est continue en $T_1(u)$ et que pour tout $k \in \{2,\ldots,n\}$ V_{q_k} est continue en $T_k((\overset{1}{\underset{i=k-1}{\circ}} F_i)(u))$. Ce qui veut dire que F_1 est continue en u, et que F_k est continue en $(\overset{1}{\underset{i=k-1}{\circ}} F_i)(u)$. F étant la composition des fonctions F_k, F est continue en u.

Notons $F^{(n)}$ la fonction qui résulte de composer n fois la fonction F par elle-même.

Définition

Soit u_o un élément de Γ tel que F et $F^{(n)}$ soient bien définies en u_o. La suite $\{u_i\}_{i \in N}$ définie par u_o et par la formule de récurrence

$$u_{i+1} = F(u_i)$$

est une suite d'éléments de Γ. L'algorithme qui construit une telle suite est nommé TUCKALSN.

Cet algorithme est une généralisation de l'algorithme TUCKALS3 de Kroonenberg et de Leeuw.

Puisque Γ est un compact on sait que la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ admet au moins un point d'adhérence. Nous montrons au paragraphe suivant que tout point d'adhérence de cette suite est une solution du système S2, et un point stationnaire (non minimum) de la fonction f.

3.6.3.2.3 - La pertinence de l'algorithme.

Avant de montrer que tout point d'adhérence de notre suite est une solution du système S2 il nous faut présenter les trois propositions suivantes :

PROPOSITION 8

Si F est bien définie en $u \in \Gamma$ alors $f(F(u)) \geq f(u)$.

Démonstration

Soit $k \in [n]$ et $v \in \Gamma$ tel que F_k soit bien définie en v.
Les définitions de f et F_k et le lemme 4 du chapitre II permettent de vérifier que :

$$f(v) = tr({}^tV_k \; {}^t\overset{k}{X}(\underset{k}{\otimes} V_i \; {}^tV_i) \overset{k}{X} V_k) \; ;$$

et que

$$f(F_k(v)) = \max_{Z\in O_{p_k q_k}} tr({}^tZ \; {}^t\overset{k}{X} (\underset{k}{\otimes} V_i \; {}^tV_i) \overset{k}{X} Z)$$

alors, pour tout k dans [n]

$$f(F_k(v)) \geq f(v) \tag{69}$$

Puisque u appartient au domaine de définition de F l'expression (69) permet d'écrire :

$$f(F(u)) = f((\overset{1}{\underset{i=1}{o}} F_i)(u)) = f(F_n((\overset{1}{\underset{i=n-1}{o}} F_i)(u)) \geq f((\overset{1}{\underset{i=n-1}{o}} F_i)(u)) \geq \ldots$$

$$\ldots \geq f(F_1(u)) \geq f(u). \qquad (70)$$

Ce qui prouve qu'en ce point u de Γ

$$f(F(u) \geq f(u).$$

Remarque

Si $u_o \in \Gamma$ et si l'on peut construire la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ on vérifie que pour tout $i \in N$

$$f(u_{i+1}) \geq f(u_i) \qquad (71)$$

PROPOSITION 9

Soit $u \in \Gamma$ tel que F est bien définie en u et en F(u).
Si $f(F(u)) = f(u)$ alors $F(F(u)) = F(u)$.

Démonstration

Soit un tel u. $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \Gamma$ où, $\forall i \in n \quad U_i \in O_{p_i q_i}$.
Appelons $v = F(u) = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$; et

$$w = F(v) = F(F(u)) = (w_1,w_2,\ldots,w_n).$$

v et w sont aussi des éléments de Γ. On considère donc que $f(v) = f(u)$ et l'on se propose de montrer que $v = w$.

Soit $\quad v^j =: (\overset{1}{\underset{k=j}{o}} F_k)(u) = F_j(\ldots F_2(F_1(u))\ldots)$

d'après la définition des F_k

$$v^j = (v_1, v_2, \ldots, v_j, u_{j+1}, \ldots, u_n),$$

où

$$v_j = V(T_j(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, \cdot, u_{j+1}, \ldots u_n)). \tag{72}$$

L'expression (64) permet d'écrire

$$v_j = V(T_j(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_j, u_{j+1}, \ldots, u_n))$$

qui, remplacéeen (72) conduit à l'identité :

$$v_j = V(T_j(v^j)) \tag{73}$$

et l'on remarque que v_j appartient à $\mathcal{O}_{p_j q_j}$ tandis que v^j est un élément de Γ.

On déduit de la définition de v^j que

$$v^n = F_n(\ldots F_2(F_1(u))\ldots) = F(u) = v$$

Les expressions (69) et (70) assurent pour $j \geq k$:

$$f(v) \geq f(v^j) \geq f(v^k) \geq f(u).$$

Aussi l'égalité de $f(v)$ et $f(u)$ implique t'elle pour tout $j \in [n]$

$$f(v^j) = f(u) \quad . \tag{74}$$

Considérons u et v^1. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $v^1 = (v_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$. L'expression de f en u :

$$f(u) = \| (\otimes u_i \, {}^t u_i) \underline{x} \|^2$$

peut être mise sous la forme :

$$f(u) = \mathrm{tr}({}^t u_1 \, {}^t \overset{1}{X} (\underset{1}{\otimes} u_i \, {}^t u_i) \overset{1}{X} u_1) = \mathrm{tr}({}^t u_1 T_1(\cdot, u_2, \ldots, u_n) u_1) \; ;$$

de même en v^1

$$f(v^1) = tr({}^t v_1 \; {}^t\overset{1}{X}(\underset{1}{\otimes} u_i \; {}^t u_i)\overset{1}{X} \; v_1) = tr({}^t v_1 T_1(.,u_2,\ldots,u_n)v_1)$$

Puisque par (74) $f(u) = f(v^1)$ et puisque v_1 est la matrice des q_1 premiers vecteurs propres de $T_1(\cdot,u_2,\ldots,u_n)$ le lemme 3 du chapitre II garantit l'existence d'une matrice orthogonale S_1 telle que $v_1 = u_1 S_1$.

Supposons maintenant qu'il existe pour tout $j < m$ une matrice orthogonale S_j telle que $v_j = u_j S_j$. Nous allons montrer qu'il existe aussi une matrice orthogonale S_m telle que $v_m = u_m S_m$:

Considérons $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ et $v^m = (v_1,\ldots,v_m, u_{m+1},\ldots,u_n)$.

$$T_m(u) = {}^t\overset{m}{X} (\underset{m}{\otimes} u_i \; {}^t u_i) \overset{m}{X}$$

$$T_m(v^m) = {}^t\overset{m}{X} (\underset{i=1}{\overset{m-1}{\otimes}} v_i \; {}^t v_i) \otimes (\underset{i=m+1}{\overset{n}{\otimes}} u_i \; {}^t u_i) \overset{m}{X} .$$

Puisque pour tout $i < m$

$$v_i \; {}^t v_i = u_i \; S_i \; {}^t S_i \; {}^t u_i = u_i \; {}^t u_i$$

on obtient

$$T_m(u) = T_m(v^m)$$

D'après (73)

$$v_m = V(T_m(v^m)),$$

donc

$$v_m = V(T_m(u)) \tag{75}$$

On sait par (74) que $f(u) = f(v^m)$, qui s'écrit :

$$tr({}^t u_m \; T_m(u) \; u_m) = tr({}^t v_m \; T_m(u) \; v_m) \tag{76}$$

Les expressions (75) et (76) nous permettent à nouveau d'appliquer le lemme 3 du chapitre II et d'en déduire l'existence d'une matrice orthogonale S_m telle que

$$v_m = u_m S_m.$$

Il existe donc pour tout i dans [n] une matrice orthogonale S_i telle que $v_i = u_i S_i$.
Nous définissons w^j à partir de v de façon analogue à la définition de v^j à partir de u. Alors

$$w_j = V(T_j(w^j)),$$

et pour tout i dans [n] il existe une matrice orthogonale R_i telle que

$$w_i = v_i R_i.$$

On montre maintenant que $w_m = v_m$ pour tout $m \in [n]$.
On sait que

$$w_m = V(T_m(w^m)) \text{ et } v_m = V(T_m(v^m)) \qquad (77)$$

Puisque $w_i = v_i R_i$ et $v_i = u_i S_i$ pour tout $i \in [n]$, on obtient :

$$T_m(w^m) = T_m(v^m) = T_m(u) \qquad (78)$$

Or F est bien définie en v on sait que les q_m premières valeurs propres de $T_m(u)$ sont toutes distinctes. On peut donc utiliser les expressions (77), (78) et le même lemme 3 pour montrer l'égalité de w_m et v_m.

Dire que $w_i = v_i \quad \forall i \in [n]$ c'est dire que v = w. Ce qu'il fallait montrer.

PROPOSITION 10

Le système S2 est équivalent à l'équation de point fixe

$u = F(u)$ sur Γ .

Démonstration

Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Gamma$ tel que $u = F(u)$.
Puisque F_k modifie exclusivement la $k^{\text{ème}}$ composante de u et laisse toutes les autres inchangées on voit que :

$$u^1 = F_1(u) = u, \quad u^2 = F_2(u^1) = u \ ; \ldots ; \ u^n = F_n(u^{n-1}) = u$$

donc, l'expression

$$u_k = V(T_k(u^k))$$

peut s'écrire :

$$u_k = V(T_k(u)),$$

sous forme développée :

$$t \overset{k}{\underset{k}{X}} (\otimes u_i \ {}^t u_i) \overset{k}{X} u_k \equiv u_k \Lambda_k$$

où Λ_k est la matrice diagonale des q_k premières valeurs propres de $T_k(u)$. Cette dernière expression et (63) montrent le résultat.

Remarque

Si dans la suite $\{u_i\}_{i \in N}$ bien définie par $u_0 \in \Gamma$ il existe un entier n tel que $f(u_{n-1}) = f(u_n)$ on sait par la proposition 9 que $F(u_n) = u_n$ et par la dernière proposition que u_n est une solution de S2. Dans ce cas

$$u_n = F(u_n) = u_{n+1} = u_{n+2} = \ldots$$

c'est-à-dire pour tout $i \geq n$ $u_i = u_n$. Le seul point d'adhérence de la suite $\{u_i\}$ est alors u_n. En d'autres termes s'il existe n tel que $f(u_{n-1}) = f(u_n)$ la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ est convergente et si $\bar{u}$ est son point limite $\bar{u}$ résout le système S2 ; de plus $\bar{u} = u_n$.

Puisque Γ est compact la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ a au moins un point d'adhérence. Les points d'adhérence de $\{u_i\}_{i\in N}$ vérifient la :

PROPOSITION 11

Soit la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ d'éléments de Γ construite à partir de u_o à l'aide de l'algorithme TUCKALSN. Si F est bien définie dans un point d'adhérence $\bar{u}$ de cette suite, l'élément $F(\bar{u})$ de Γ est une solution du système S2.

Démonstration

Soit $\bar{u}$ un point d'adhérence de $\{u_i\}_{i\in N}$. Considérons les deux suites

$$\{f(u_i)\}_{i\in N} \text{ et } \{f(F(u_i))\}_{i\in N}.$$

On sait que f est continue en Γ et puisque F est définie en $\bar{u}$, F est continue en $\bar{u}$. $f(\bar{u})$ est donc point d'adhérence de $\{f(u_i)\}_{i\in N}$ et $f(F(\bar{u}))$ est point d'adhérence de $\{f(F(u_i))\}_{i\in N}$. On a vu en (71) que

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$

ce qui montre que les deux suites considérées sont croissantes. Toutes les deux sont convergentes car elles sont bornées par $\max_{u\in\Gamma} f(u)$. Par suite $f(\bar{u})$ et $f(F(\bar{u}))$ sont leurs seuls points d'adhérence, donc leurs points limites. De plus l'inégalité

$$f(u_n) \leq f(F(u_n)) = f(u_{n+1})$$

implique l'égalité

$$f(\bar{u}) = f(F(\bar{u})).$$

La proposition 9 permet d'affirmer que $F(\bar{u}) = F(F(\bar{u}))$ et donc que $F(\bar{u})$ est une solution du système S2.

PROPOSITION 12

Si F est bien définie en tout point d'adhérence de $\{u_i\}_{i\in N}$, alors

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in N$ tel que $\|F(u_n)-u_n\| < \varepsilon$

En d'autres termes, avec l'algorithme TUCKALSN on peut s'approcher d'une solution de S2 d'aussi près qu'on le désire.

Démonstration

Soit $\bar{u}$ un point d'adhérence de $\{u_i\}_{i\in N}$ et $v = F(\bar{u})$. Or v est aussi un point d'adhérence de la suite par proposition précédente on sait que $v = F(v)$.

Soit $V(v)$ un voisinage de v. La continuité de F en v assure l'existence d'un voisinage $V'(v) \subset V(v)$ tel que

$$(x \in V'(v)) \Rightarrow (F(x) \in V(v)).$$

D'autre part F étant continue en $\bar{u}$ on peut trouver un voisinage $V(\bar{u})$ tel que

$$(y \in V(\bar{u})) \Rightarrow (F(y) \in V'(v))$$

Mais, puisque $\bar{u}$ est un point d'adhérence de la suite $\{u_i\}$ il existe $n \in N$ tel que $u_{n-1} \in V(\bar{u})$, donc, tel que $F(u_{n-1}) \in V'(v)$ et tel que $F(F(u_{n-1})) \in V(v)$.

Puisque on a choisi $V'(v) \subset V(v)$ il existe donc un n pour lequel $F(u_{n-1})$ et $F(F(u_{n-1}))$ appartiennent tous les deux à $V(v)$; c'est-à-dire tel que u_n et $F(u_n)$ appartiennent à $V(v)$.

La proposition 12 étant démontrée, on peut affirmer que la suite $\{u_i\}_{i\in N}$ conduit toujours a au moins une solution du système S2.

Nous nous proposons maintenant de vérifier que toute solution de S2 définit un point stationnaire de la fonction f :

Définition

Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$; f, $g_1, g_2, \ldots, g_m$ ($m < n$) des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiables en A ; et soit

$$B = \{x \in A \mid \forall i \in m \quad g_i(x) = 0\}.$$

On dit que $x_o \in B$ est un point stationnaire de f en B s'il existe m réels λ_i tels que

$$\nabla f(x_o) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_o) \qquad (79)$$

Remarque :
L'expression (79.) peut s'écrire

$$\nabla f(x_o) = \nabla\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\right)(x_o) \qquad (80)$$

où $\nabla f(x_o)$ représente le gradient de la fonction f au point x_o.

PROPOSITION 13

Tout $u \in \Gamma$ tel que $u = F(u)$ est un point stationnaire de f en Γ .

Démonstration

Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ un élément du produit cartésien $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} M_{\mathbb{R}}(p_i, q_i)$, et $\bar{f}$ la fonction à valeurs réelles définie sur ce produit par

$\bar{f}(u) = \| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i \; {}^t u_i) \underline{x} \|_N^2$. On a pour tout k dans [n] :

$$\bar{f}(u) = \mathrm{tr}({}^t u_k \overset{k}{X} (\underset{k}{\otimes} u_i \; {}^t u_i) \overset{k}{X} u_k) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} \Big(\sum_{i'_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i'_n=1}^{p_n} \sum_{j_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} \Big(\prod_{k=1}^{n} u^k_{i_k j_k} u^k_{i'_k j_k} \Big) x^{i_1 i_2 \cdots i_n} \Big)^2 \qquad (81)$$

Puisque f coïncide avec $\bar{f}$ dans Γ, l'expression (81) montre que la fonction $\bar{f}$ peut être vue comme une fonction réelle définie et différentiable en tout point de $A =: \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}$.

D'après sa définition l'ensemble Γ est déterminé par les n équations matricielles :

$${}^t u_k u_k = I \quad (\text{où } k \in [n])$$

équivalentes aux $\sum_{k=1}^{n} q_k^2$ équations :

$$g^k_{jj'}(u) = \Big(\sum_{i=1}^{p_k} u^k_{ij} \, u^k_{ij'} \Big) - \delta_{jj'} = 0 \qquad (82)$$

où

$$k \in [n] \; ; \; j \in [q_k] \text{ et } j' \in [q_k].$$

(82) montre que les fonctions réelles $g^k_{jj'}$ sont, elles aussi différentiables en tout point de A. On définit l'ensemble B par

$$B = \{u \in A \mid \forall k \in [n], \, j \in [q_k], \, j' \in [q_k] \quad g^k_{jj'}(u) = 0\}$$

et l'on remarque de plus que $p_i < q_i$ implique $\sum_{i=1}^{n} q_i^2 < \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$.

Les conditions de la dernière définition étant toutes satisfaites on peut déterminer les points stationnaires de f en B, c'est-à-dire les points stationnaires de f en Γ.

Pour toute fonction scalaire h définie sur $M_{\mathbb{R}}(m,n)$ et toute matrice $C \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ on note $\frac{\partial}{\partial C} h$ la matrice de terme générique $(\frac{\partial}{\partial C} h)_{ij} = \frac{\partial h}{\partial C_{ij}}$.

Cette notation permet d'écrire l'expression (80) à l'aide des n équations matricielles :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (tr({}^t u_k \; {}^t\overset{k}{X} \; (\underset{k}{\otimes} u_i \; {}^t u_i) \; \overset{k}{X} \; u_k)) = \frac{\partial}{\partial u_k} (tr(L_k({}^t u_k u_k - I)))$$

où, L_k est la matrice $(\lambda^k_{jj'})^{j \in q_k}_{j' \in q_k}$ des multiplicateurs de Lagrange correspondants aux fonctions $g^k_{jj'}$.

Posons $T_k = {}^t\overset{k}{X}(\otimes u_i \; {}^t u_i)\overset{k}{X}$. Les n équations de (83) s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} tr \; ({}^t u_k \; T_k \; u_k) = \frac{\partial}{\partial u_k} tr({}^t u_k u_k L_k) \qquad (84)$$

où T_k et L_k sont des matrices indépendantes de u_k.

On peut alors appliquer la formule

$$\frac{\partial}{\partial X} tr \; ({}^t XAXB) = (AXB + {}^t AX \, {}^t B)$$

démontrée par Mc Donald et Swaminathan [14;47] aux deux membres de (84). Elle donne pour tout $k \in [n]$:

$$T_k \; u_k + {}^t T_k \; u_k = u_k \; L_k + u_k \; {}^t L_k$$

soit du fait de la symétrie de T_k

$$(2T_k)u_k = u_k(L_k + {}^t L_k).$$

ou encore en notant D_k la matrice symétrique $\frac{1}{2} (L_k + {}^t L_k)$

$$T_k u_k = u_k D_k.$$

$u \in \Gamma$ est donc un point stationnaire de f en Γ s'il existe n matrices symétriques D_k telles que

$$T_k u_k = u_k D_k. \qquad (85)$$

Puisque les matrices Λ_k des plus grandes valeurs propres de T_k sont diagonales, donc symétriques, on peut affirmer que toute solution $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ du système S2 défini en (63) est un point stationnaire de f en Γ.

La proposition 13 étant montrée, nous faisons quelques remarques sur les points stationnaires de f et les solutions du système S2 et du problème P3.

Soient $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ deux éléments de Γ. On dit que v est une transformation orthogonale de u (et vice versa) s'il existe des matrices orthogonales S_i telles que $v_i = u_i S_i$. On précise que cette transformation orthogonale est non triviale lorsqu'il existe $i \in [n]$ tel que $S_i \neq I$.

Remarque 1

Lorsque $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est un point stationnaire de f en Γ il existe des matrices orthogonales S_i telles que l'élément v, défini par $v_i = u_i S_i$ soit un point stationnaire de f en Γ vérifiant le système

$$S3\left\{ \quad T_k v_k = v_k \Lambda_k \right. \qquad (86)$$

où les Λ_k sont des matrices diagonales.
En effet, D_k est symétrique et peut se décomposer en $D_k = S_k \Lambda_k {}^t S_k$ où S_k est orthogonale et Λ_k diagonale.

Remplaçons ceci en (85) et post-multipliant par S_k. On obtient :

$$T_k u_k S_k = u_k S_k \Lambda_k {}^t S_k S_k = u_k S_k \Lambda_k .$$

La transformation orthogonale v de u définie par $v_k = u_k S_k$ est donc un point stationnaire de f en Γ du type indiqué par (86).

Remarque 2

La condition (85) de point stationnaire n'exige pas que les matrices D_k soient diagonales. Par suite la proposition 12 n'admet pas de réciproque : un point stationnaire n'est pas nécessairement une solution du système S2 (ni de S3).

Remarque 3

Une transformation orthogonale non triviale v d'une solution u du système S3 n'est en général pas une solution d'un tel système si la matrice diagonale Λ_k ne contient pas des valeurs propres multiples.

En effet, dire que v définie par $v_k = u_k S_k$ est solution de S3 c'est dire que

$$T_k(u_k S_k) = u_k S_k \Delta_k$$

avec Δ_k diagonale et S_k orthogonale. Mais, on sait que :

$$T_k(u_k S_k) = (T_k u_k) S_k = (u_k \Lambda_k) S_k ,$$

on doit donc avoir

$$u_k \Lambda_k S_k = u_k S_k \Delta_k$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_k S_k \Delta_k^{-1} = S_k . \qquad (87)$$

Trouver une matrice diagonale Δ_k vérifiant (87) est impossible lorsque la matrice diagonale Λ_k est à termes distincts.

S2 est de la forme S3. On peut donc faire la même remarque à l'égard de S2 :

Remarque 4

Les transformations orthogonales non triviales d'une solution de S2 ne sont en général pas des solutions de S2.

Remarque 5

Il n'y a pas unicité des solutions du système

$$S2 : \left\{ {}^{t}X^{k} \left(\underset{k}{\otimes} u_i \; {}^{t}u_i \right) {}^{k}X \; u_k \equiv u_k \Lambda_k . \right.$$

On présente dans l'annexe α_1 page 1 un exemple. Dans le cas : $n=3$; $p_1 = p_2 = p_3 = 3$; $q_1 = q_2 = q_3 = 2$.

La forme trilinéaire x est définie par sa 2-représentation matricielle $\overset{2}{X}$. On vérifie que $u = (U_1, U_2, U_3)$ constitue une solution de S2 : chaque U_i est la matrice des deux premiers vecteurs propres de $T_i(u)$.

De même $v = (V_1, V_2, V_3)$ est une solution du système S2 : chaque V_i est la matrice des deux premiers vecteurs propres de $T_i(v)$.
L'annexe présente aussi les matrices diagonales Λ_k et Δ_k correspondant aux deux solutions ainsi que les valeurs de f(u) et f(v).
On constate que :

1- $\forall i \in 3 \quad U_i \neq V_i$

2- $\forall i \in 3 \quad \Lambda_i \neq \Delta_i$

3- $\forall i \in 3 \quad \Lambda_i$ et Δ_i ne présentent pas d'éléments multiples. Donc, on ne peut pas passer de u à v par des transformations orthogonales, de plus

4- $5.82 = f(u) \neq f(v) = 5.94$.

Remarque 6

Toute transformation orthogonale d'une solution $u \in \Gamma$ du problème P3 dans la version exprimée par (58) est aussi une solution de P3 : les solutions du problème P3 ne sont pas uniques.

Remarque 7

Nous avons montré qu'une suite $\{u_i\}_{i \in N}$ bien définie par $u_0 \in \Gamma$ nous conduit à une solution du système S2, qui est bien définie si le point $u_i \in \Gamma$ vérifie les n conditions exprimées dans (66) dont l'objectif est de définir de façon unique u_{i+1} à partir de u_i. Ces conditions sont satisfaites si l'on n'obtient pas des valeurs propres multiples lors du processus de construction de u_{i+1}. Il s'avère improbable en pratique d'obtenir des valeurs propres multiples. Aussi l'algorithme TUCKALSN converge-t-il presque toujours.

Si l'on obtient des valeurs propres multiples lors du déroulement de TUCKALSN il convient de choisir un nouveau point initial u_0 et reprendre le processus.

Il est important cependant de préciser qu'on n'a jamais été obligé de recourir à cette action de sauvegarde lors de nos expérimentations, car on n'a jamais rencontré un pareil cas. Ceci ne signifie pas pour autant qu'il ne puisse pas se présenter.

L'algorithme TUCKALSN fournit alors des solutions pour le système S2. Il existe au moins une solution de S2 qui constitue une solution du modèle TUCKERN (problème P3). Le problème P3 est donc résolu lorsque l'on dispose de toutes les solutions de S2. Cependant l'algorithme TUCKALSN ne prétend pas fournir une liste exhaustive de toutes les solutions.

Dans la pratique on construit à l'aide de l'algorithme TUCKALSN initialisé en $u_0 \in \Gamma$ un point $\bar{u} \in \Gamma$ solution de S2 et point stationnaire de f en Γ tel que

$$f(\bar{u}) \geq f(u_0).$$

L'initialisation de l'algorithme est arbitraire, mais lorsque l'on utilise à l'instar de Kroonenberg et de Leeuw "l'approximation de Tucker" comme point de départ on choisit une stratégie présentant deux avantages :

1- la solution fournie par TUCKALSN dans ce cas est au moins aussi bonne que celle de Tucker.
2- Si $q_k \geq \text{rang}(X^k)$ ce point initial fournit d'emblée l'optimum de la fonction f sur l'ensemble Γ.

3.6.3.2.4. - La solution rapportée à la base de départ

Dans le paragraphe 3.6.3.2.1 on a changé la base ξ de l'espace E^* en la base ζ de façon à ce que les matrices des produits scalaires M_i et N deviennent toutes des matrices unité : les coordonnées de $x \in E^*$ qui était définies par la matrice unicolonne $\underline{x}$ se sont transformées dans la nouvelle base ζ ($\zeta = \oplus \zeta_i$) en :

$$\underline{x}' = ({}^tK)^{-1}\underline{x}.$$

On a présenté dans les paragraphes 3.6.3.2.2. et 3.6.3.2.3. la solution de notre problème exprimée dans les bases ζ^i de E_i et ζ de E^*. La famille optimale $\{\bar{F}_i\}_{i\in n}$ était définie par les vecteurs dont les coordonnées par rapport à la base ζ^i constituaient les colonnes des matrices $\bar{U}_i$. Par rapport aux bases originales ξ^i ces vecteurs sont exprimés par les matrices

$$\bar{V}_i = K_i^{-1}\bar{U}_i$$

car K_i^{-1} est la matrice de passage de la base ζ^i à la base ξ^i de E_i^*. La famille optimale s'écrit donc $\{<K_i^{-1}\bar{U}_i>_{\xi^i}\}_{i\in n}$.

Notons $\underline{\hat{x}}'$ la matrice unicolonne des coordonnées de $\hat{x}$ par rapport à la base ζ , et $\underline{\hat{x}}$, la matrice des coordonnées de $\hat{x}$ par rapport à la base ξ de départ. On a :

$$\underline{\hat{x}} = {}^tK\,\underline{\hat{x}}'.$$

Puisque :

$$\underline{\hat{x}}' = \bar{U}\,{}^t\bar{U}\,\underline{x}'$$

on a de plus :

$$\underline{\hat{x}} = {}^tK\,\bar{U}\,{}^t\bar{U}({}^tK)^{-1}\underline{x}. \qquad (88)$$

Remarque 1

$$\bar{V}_i \in O^{M_i}_{p_i q_i} \quad \text{car}$$

$${}^t(K_i^{-1}\bar{U}_i)\,M_i\,(K_i^{-1}\bar{U}_i) = {}^t\bar{U}_i\,\bar{U}_i = I$$

Remarque 2

Puisque $\bar{u} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, \bar{U}_n)$ est une solution du problème simplifié à métriques unité on vérifie que :

$$ {}^t\overset{k}{X}' \, (\underset{k}{\otimes} \bar{U}_i \, {}^t\bar{U}_i) \, \overset{k}{X}' \equiv \bar{U}_k \Lambda_k . $$

mais

$$ \overset{k}{X}' = (\underset{k}{\otimes} \, {}^tK_i^{-1}) \, \overset{k}{X} \, K_k^{-1} $$

alors on peut écrire :

$$ {}^tK_k^{-1} \, {}^t\overset{k}{X} \underset{k}{\otimes} K_i^{-1} \, (\underset{k}{\otimes} \bar{U}_i \, {}^t\bar{U}_i) \underset{k}{\otimes} \, {}^tK_i^{-1} \, \overset{k}{X} \, K_k^{-1} \, \bar{U}_k \equiv U_k \Lambda_k $$

donc :

$$ {}^t\overset{k}{X} \otimes \bar{V}_i \, {}^t\bar{V}_i \, \overset{k}{X} \, \bar{V}_k = {}^tK_k \, \bar{U}_k \, \Lambda_k = M_k \, \bar{V}_k \, \Lambda_k $$

ceci montre, du fait de la remarque 1, que $\bar{v} = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n)$ est bien une solution du système S2 exprimé dans des métriques générales.

En conclusion si $(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, \bar{U}_n)$ et $\hat{\underline{x}}'$ définissent la solution du problème simplifié (métriques unité), $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n)$ où $\bar{V}_i = K^{-1} \, \bar{U}_i$ et $\hat{\bar{X}} = {}^tK \, \hat{X}'$ constituent la solution du problème général P3 et de tous ses équivalents.

3.6.4 - Quelques propriétés de la solution

Dans ce paragraphe on abandonne les notations de 3.6.3 et l'on revient aux notations initiales :

$\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées du tenseur $x \in E^*$ dans la base ξ;

$\bar{u} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, \bar{U}_n) \in \Gamma_1$ désigne la solution du problème P3' et

$\{\bar{F}_i\}$ est la famille de sous-espaces vectoriels qu'optimise la version de P3 exprimée par (34).

3.6.4.1 - La qualité de la représentation.

Définition

Soit $x \in E^*$ et E' un sous espace vectoriel de E^*. Le réel

$$Q(x)/E' = \|Proj_{E'}(x)\|_N^2 / \|x\|_N^2$$

est appelée la qualité de la représentation de x par le sous-espace E'.
$Q(x)/E'$ est le cosinus carré de l'angle entre x et $Proj_{E'}(x)$.
$Q(x)/E'$ est compris entre 0 et 1, il prend la valeur 1 si et seulement si

$x = Proj(x)$; c'est-à-dire si et seulement si $x \in E'$.

Soient comme auparavant $<\{\bar{F}_i\}> \subset E^*$ l'extension canonique de $\oplus \bar{F}_i^*$, et $\hat{x}=Proj_{<\{\bar{F}_i\}>}(x)$. Le sous espace $<\{\bar{F}_i\}> = \bar{F}^*$ réalise l'optimum de :

$$\max_{E' \in \Gamma_o} \|Proj_{E'}(x)\|_N$$

alors

$$\forall E' \in \Gamma_o \qquad Q(x)/E' \leq Q(x)/\bar{F}^*$$

Nous appelons $Q(x)/\bar{F}^*$ la qualité de la représentation globale de la n-ACP de x.
On la note $Q(x)$:

$$Q(x) = Q(x)/\bar{F}^* = \frac{\|\hat{x}\|_N^2}{\|x\|_N^2} \qquad (89)$$

Naturellement :

$$0 \leq Q(x) \leq 1.$$

Nous nous proposons d'expliciter une autre borne supérieure de $Q(x)$.
Soient $k \in [n]$, $\overset{k}{X}$ la k-représentation matricielle du tenseur $x \in E^*$, et $N^k = \underset{k}{\otimes} N_i$. De façon à ne pas alourdir inutilement les notations on traite le cas k=n, la démarche suivie reste en effet valable lorsque $k \neq n$, aux adaptations de notation près (justifiées par l'isomorphisme défini en 3.3). On suppose de plus pour tout $k \in [n]$ que :

$$\text{rang}(X^k) \geq q_k \quad \text{et que } p^k \geq p_k.$$

Soient les sous espaces G_i définis par :

$$G_i = \begin{cases} E_i & \text{si } i \neq k \\ \bar{F}_i & \text{si } i = k \end{cases} \tag{90}$$

Posons :

$$G^* = \underset{k}{\mathbin{@}} G_i^* \; ; \quad F'^* = G_k^* \; ; \text{ et } F^* = E_k^*.$$

On vérifie alors que :

$$G^* \mathbin{@} F^* = E^* \; ;$$

$$<\{G_i\}> = <G,F'>.$$

$x \in E^*_k$ peut alors être interprété comme un tenseur de $G^* \mathbin{@} F^*$, de matrice associée X. D'après 2.4.4

$$\max_{F'} \|Proj_{<G,F'>}(x)\|_N^2 = tr(\Delta_k)$$

où Δ_k est la matrice diagonale issue de l'ACP d'ordre q_k du triplet (X, N^k, N_k) et F' dénote un sous espace vectoriel de F de dimension q_k ; en particulier :

$$\|Proj_{<G,\bar{F}_k>}(x)\|_N^2 \leq tr(\Delta_k). \tag{91}$$

D'après (90) et (18)

$$<\{\bar{F}_i\}> \subset <\{G_i\}> = <G,F'>$$

ce qui implique :

$$\|Proj_{<\{\bar{F}_i\}>}(x)\|_N \leq \|Proj_{<G,\bar{F}_k>}(x)\|_N$$

donc

$$\|Proj_{<\{\bar{F}_i\}>}(x)\|_N^2 \leq tr\ (\Delta k).$$

Aussi a-t-on pour tout k dans [n]

$$\|\hat{x}\|_N^2 \leq \mathrm{tr}(\Delta k), \tag{92}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\|\hat{x}\|_N^2}{\|x\|_N^2} \leq \frac{\mathrm{tr}(\Delta_k)}{\|x\|_N^2}.$$

Avec les notations de (II.76) et (89) on peut écrire :

$$\forall k \in [n] \quad Q(x) \leq Q_{q_k}(\overset{k}{X}),$$

donc

$$Q(x) \leq \min_{k\in[n]} \{Q_{q_k}(\overset{k}{X})\} \tag{93}$$

où $Q_{q_k}(x)$ désigne la qualité de la représentation de l'ACP d'ordre q_k du triplet $(\overset{k}{X}, N^k, N_k)$.
Ceci montre que la qualité globale de la représentation de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est inférieure ou égale à la qualité de la représentation issue de l'ACP de n'importe quel triplet $(\overset{k}{X}, N^k, N_k)$ $(k \in [n])$.

Considérons maintenant une bipartition ordonnée η définie par la permutation σ et l'entier $n_1 < n$.

Soient E^1, E^2, N^1, N^2, p^1, p^2, q^1, q^2 les éléments définis avec les notations du paragraphe (3.1).

En appliquant le raisonnement précédent à $E^1 \oplus E^2$ on vérifie que :

$$Q(x) \leq Q_{q^2}(\overset{\eta}{X})$$

ce qui permet d'écrire :

$$Q(x) \leq \min_{\eta} \{Q_{q^2}(\overset{\eta}{X})\}.$$

et qui montre que la qualité de la représentation de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est inférieur ou égal à celles issues de l'ACP de n'importe quelle η-représentation matricielles de χ. (94)

On remarque que l'expression (93) est un cas particulier de (94) caractérisé par σ défini en (11) et $n_1 = n-1$. On résume ces résultats par la chaîne d'inégalités

$$0 \leq \max_{E' \in \Gamma_o} \{Q(x)/E'\} = Q(x)/\langle\{\bar{F}_i\}\rangle = Q(x) \leq \min_{n} Q_{q^2}^{n}(X) \leq \min_{k} Q_{q_k}^{k}(X) \leq 1$$

3.6.4.2 - L'emboîtement

On reprend le problème P3 (version P3'). Soient :

$$P = \{p_i\}_{i \in n} \quad ; \quad Q = \{q_i\}_{i \in n} \text{ et } Q' = \{q'_i\}_{i \in n}$$

trois familles d'entiers positifs telles que

$$\forall i \in [n] \quad q'_i \leq q_i \leq p_i \tag{95}$$

On note P3(Q) et P3(Q') les problèmes P3 posés en termes des familles Q et Q' respectivement.

Soient $\bar{u} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots \bar{U}_n) \in \Gamma_1$ une solution de P3(Q) ;

$\bar{v} = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots \bar{V}_n) \in \Gamma_1$ une solution de P3(Q').

Définition

On dit que la solution $\bar{v}$ de P3(Q') est emboîtée dans la solution $\bar{u}$ de P3(Q) si la matrice $\bar{V}_k$ est constituée par les q'_k premières colonnes de la matrice $\bar{U}_k$. (96)

PROPOSITION 14

Soient Q et Q' deux familles vérifiant (95). Soient $\bar{u}$ et $\bar{v}$ solutions de P3(Q) et P3(Q') respectivement. Si $n > 2$ et si $Q \neq Q'$ les solutions $\bar{u}$ et $\bar{v}$ ne sont pas forcément emboîtées.

Démonstration

Supposons le contraire: $\bar{u}$ étant une solution de P3(Q) alors $\bar{v}$ définie en (96) est une solution du problème P3(Q'). Ceci signifie que si l'on connaît une solution pour P3(Q) on connait une solution pour tout problème P3(Q') tel que Q' satisfasse la condition (95).

Si la famille Q est telle que $q_k = \text{rang}(X^k)$, et si pour tout i dans [n] $M_i = I$ le problème P3(Q) rejoint le problème P4 de décomposition traité en 3.6.2 dont une solution est définie par $\bar{u} = (U_1,\ldots,\bar{U}_k)$ tel que $\bar{U}_k$ est la matrice des vecteurs propres de ${}^tX^k X^k$ correspondants aux q_k plus grandes valeurs propres. Une solution $\bar{v}$ de P3(Q') doit donc être définie par les matrices des q'_k plus grands vecteurs propres de ${}^tX^k X^k$, ce qui constitue l'approximation de TUCKER au modèle TUCKERN. Or on l'a montré en (3.6.2) un tel $\bar{v} \in \Gamma_1$ n'est pas toujours une solution du modèle TUCKERN, on doit conclure que les solutions de P3 ne sont pas forcément emboîtées. Les solutions de P3 sont cependant toujours emboîtées lorsque n = 2 puisqu'on retrouve alors l'Analyse en Composantes Principales d'un tableau de données qui, on le sait, donne toujours des solutions emboîtées. L'emboîtement est donc une propriété exclusive de la 2-ACP.

Le contre exemple suivant illustre l'absence d'emboîtement des solutions de la n-ACP du 3-hypercube de données χ associé à la famille $P = \{p_i\}_{i\in 3}$

$$p_1 = 4 \; ; \; p_2 = 6 \; ; \; p_3 = 5.$$

dont la 2-représentation matricielle est :

$$\overset{2}{X} = \begin{array}{cccccc}
0.0235473 & -0.7761941 & 0.5127500 & -0.5128341 & 0.1430003 & 0.1831912 \\
0.4519635 & 0.0502768 & 0.3121134 & -0.8037065 & 0.9610055 & 0.8007374 \\
-0.8121997 & 0.0356273 & 0.8635376 & 0.0176538 & -0.1848415 & 0.0415777 \\
0.1682802 & -0.9051218 & -0.8412813 & -0.5338485 & -0.5247375 & 0.7597591 \\
-0.0538043 & 0.8792263 & -0.7429281 & 0.7918908 & 0.0747375 & -0.1126993 \\
-0.6712195 & -0.9193510 & -0.8140239 & -0.5726916 & 0.0971738 & 0.1715735 \\
-0.6996304 & -0.8463715 & -0.3370153 & -0.0529135 & -0.6023143 & -0.4095649 \\
-0.6905453 & 0.9747311 & -0.5510901 & -0.9249534 & -0.2656242 & 0.9631636 \\
0.9177035 & -0.7109802 & -0.6686592 & 0.1059036 & -0.7083468 & -0.0856004 \\
-0.2165066 & -0.3249161 & -0.6989780 & -0.2100307 & 0.2197779 & -0.1347992 \\
0.9482576 & 0.6571407 & -0.2488935 & 0.3668576 & 0.6710398 & 0.7557198 \\
0.9220457 & -0.2807203 & 0.3563878 & 0.1033769 & 0.9245654 & -0.4140252 \\
0.3540253 & 0.9027414 & 0.1091219 & -0.4586047 & -0.6801714 & 0.7797821 \\
-0.5708013 & -0.8697857 & 0.7470762 & 0.8150577 & -0.2774432 & -0.1014343 \\
0.3726989 & -0.6125332 & -0.2575156 & 0.8002993 & 0.0210298 & -0.5445020 \\
-0.0819793 & 0.3420027 & -0.1671459 & -0.4571302 & -0.6608251 & -0.8223432 \\
0.0164480 & -0.0669783 & -0.6410361 & -0.7160170 & -0.8442790 & -0.7980725 \\
0.4640592 & 0.7688684 & -0.1979582 & -0.4270472 & 0.2470892 & 0.1352198 \\
0.2533611 & -0.8198921 & 0.6253895 & 0.0622135 & 0.6479617 & 0.0992979 \\
0.3097527 & -0.7509545 & 0.6832084 & 0.8170719 & 0.2731782 & -0.0538189
\end{array}$$

$$\overset{2}{X} \in M_{\mathbb{R}}(4 \times 5,6)$$

On note x le tenseur associé à χ dans l'espace tensoriel $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^6 \otimes \mathbb{R}^5$, et l'on munie chacun de ces sous espaces de la métrique unité, c'est-à-dire :

$$M_1 = I_4 \; ; \; M_2 = I_6 \; ; \; M_3 = I_5.$$

Quand $Q = \{q_i\}_{i \in 3}$ est la famille

$$q_1 = 3 \; ; \; q_2 = 5 \; ; \; q_3 = 2$$

la 3-ACP de χ fournit comme solution les trois matrices $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ et $\bar{U}_3$ suivantes :

$$\overline{u}_1 = \begin{array}{ccc}
0.1355336 & 0.8073187 & 0.2322578 \\
-0.6454744 & 0.2708002 & 0.5265484 \\
-0.4557917 & 0.3584041 & -0.8113260 \\
-0.5977017 & -0.3826882 & 0.1027284
\end{array}$$

$$\overline{u}_2 = \begin{array}{ccccc}
0.2407335 & 0.3390596 & -0.7246906 & 0.0101633 & -0.3095015 \\
0.8114854 & -0.1393167 & 0.2132639 & -0.5251686 & -0.0272967 \\
-0.0139541 & 0.5173670 & 0.6406787 & 0.1171858 & -0.1620294 \\
-0.2414098 & 0.4259338 & 0.0220508 & -0.4562195 & -0.5382984 \\
0.2124311 & 0.6453171 & -0.1028151 & 0.0771582 & 0.6484751 \\
0.4241915 & 0.0103468 & 0.0884064 & 0.7044661 & -0.4085644
\end{array}$$

$$\overline{u}_3 = \begin{array}{ccc}
0.4231052 & -0.5206485 & 0.2825616 \\
0.2088987 & -0.7353353 & -0.1918796 \\
0.5876584 & 0.3481405 & 0.4524839 \\
-0.5405409 & -0.2263312 & 0.7930690 \\
-0.3739203 & -0.1256168 & -0.2228026
\end{array}$$

les diagonales des matrices $\bar{\Lambda}_1$, $\bar{\Lambda}_2$ et $\bar{\Lambda}_3$ des valeurs propres correspondantes sont respectivement :

$$\text{diag}(\bar{\Lambda}_1) = 11.2105616 \quad 9.6242839 \quad 8.4662796$$

$$\text{diag}(\bar{\Lambda}_2) = 9.9382983 \quad 8.5156937 \quad 5.0379341 \quad 4.1247362 \quad 1.6844436$$

$$\text{diag}(\bar{\Lambda}_3) = 12.2075735 \quad 11.0498576 \quad 5.0436526.$$

On constate :

$$\bar{U}_1 \in O_{4,3} \; ; \; \bar{U}_2 \in O_{6,5} \; ; \; \bar{U}_3 \in O_{5,3}$$

$$\text{tr}(\bar{\Lambda}_1) = \text{tr}(\bar{\Lambda}_2) = \text{tr}(\bar{\Lambda}_3) = 29.301.$$

Puisque $\|x\|^2 = 39.712$ la qualité de la représentation de cette analyse est

$$Q(x) = \|\hat{x}\|^2/\|x\|^2 = 29.301/39.712 = 0.74$$

Quand $Q' = \{q'_i\}$ est la famille

$q'_1 = 3 \; ; \; q'_2 = 4 \; ; \; q'_3 = 2$

la 3-acp de x fournit comme solution les trois matrices $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ et $\bar{V}_3$

$$\bar{V}_1 = \begin{matrix} 0.3867112 & 0.7305645 & -0.3359054 \\ -0.5023544 & 0.3049942 & -0.6176078 \\ -0.3753397 & 0.5949205 & 0.7005767 \\ -0.6761765 & -0.1390096 & -0.1221495 \end{matrix}$$

$$\bar{V}_2 = \begin{matrix} -0.2129920 & 0.3574242 & 0.7246992 & 0.1068371 \\ -0.8372771 & -0.1517492 & -0.1608132 & -0.4929208 \\ 0.0162038 & 0.5000045 & -0.6557795 & 0.1200988 \\ 0.2321431 & 0.4113828 & 0.0018471 & -0.5210496 \\ -0.2111918 & 0.6544153 & 0.0741228 & 0.0201756 \\ -0.3935053 & 0.0414788 & -0.1157835 & 0.6777105 \end{matrix}$$

$$\bar{V}_3 = \begin{matrix} -0.3053115 & 0.5885822 & -0.1789856 \\ -0.0812283 & 0.7588744 & 0.2350292 \\ -0.6403198 & -0.2035510 & -0.3479955 \\ 0.5580199 & 0.1900254 & -0.7830876 \\ 0.4228372 & 0.0117474 & 0.4223724 \end{matrix}$$

Les diagonales des matrices Λ_1, Λ_2, Λ_3 des valeurs propres correspondantes sont respectivement

$$\text{diag}(\Lambda_1) = 10.8669689 \quad 8.9794573 \quad 7.8955425$$

$$\text{diag}(\Lambda_2) = 9.9969447 \quad 8.1050017 \quad 5.1696433 \quad 4.4703612$$

$$\text{diag}(\Lambda_3) = 12.7102191 \quad 10.5814037 \quad 4.4503034$$

On vérifie que :

$$\bar{V}_1 \in O_{4,4} \; ; \; \bar{V}_2 \in O_{6,4} \text{ et } \bar{V}_3 \in O_{5,3}.$$

$$\text{tr}(\Lambda_1) = \text{tr}(\Lambda_2) = \text{tr}(\Lambda_3) = 27.741.$$

Comme il fallait s'y attendre la qualité de cette analyse est inférieure à l'analyse précédente :

$$Q(x) = 27.741/39.712 = 0.70.$$

Finalement on constate que $\bar{V}_2$ ne coïncide pas avec les 4 premières colonnes de $\bar{U}_2$ et de plus $\bar{U}_1 \neq \bar{V}_1$ et $\bar{U}_3 \neq \bar{V}_3$, ce qui permet d'affirmer que les solutions de P3(Q) et P3(Q') ne sont pas emboîtées.

CHAPITRE IV : CUBE CENTRAL, COMPOSANTES PRINCIPALES, PROPRIETES D'OPTIMALITE

Ce chapitre a deux objectifs : tout d'abord nous nous proposons de définir les concepts de cube central et de η- composantes principales de la n-ACP d'un hypercube de données. Nous étudions ensuite les propriétés essentielles des η-composantes principales.

Soit $\{F_i\}_{i\in n}$ une famille de sous espaces vectoriels qui réalise l'optimum du problème P3 et soit $\hat{x}$ l'élément de F^* plus proche de x. Pour chaque bipartition ordonnée η de [n] nous construisons un sous espace $\overset{\eta}{G}{}^*$ tel que

$$F^* \subset \overset{\eta}{G}{}^* \subset E^*;$$

et nous précisons une base η de $\overset{\eta}{G}{}^*$. On a vu au chapitre précédent qu'étant fixée une base de l'espace tensoriel E^* on peut associer à chaque vecteur de cet espace un n-hypercube de données. L'élément $\hat{x}$ appartient à F^* et à $\overset{\eta}{G}{}^*$. On appelle "hypercube des η-composantes principales de χ" le n-hypercube de données associé au tenseur $\hat{x}$ et à la base η de $\overset{\eta}{G}{}^*$ tandis que le n-hypercube de données associé à $\hat{x}$ par rapport à la base ζ de F^* est dit "hypercube central". Cube central et η-composantes principales de χ sont donc deux représentations distinctes du même tenseur $\hat{x}$.

La matrice des η-composantes principales est définie comme la η-représentation matricielle de l'hypercube des composantes principales. Lorsque n = 2 la matrice des η-composantes principales coïncide avec la matrice des composantes principales d'une ACP traditionnelle. Par suite les η-composantes principales généralisent les composantes principales d'une ACP et, il est naturel de se demander si toutes les propriétés des composantes principales issues d'une ACP ordinaire demeurent vérifiées par les η-composantes principales d'une n-ACP.

La deuxième partie de ce chapitre tente de répondre à cette question. Elle commence par la présentation des principales propriétés d'optimalité des composantes principales d'une ACP ordinaire qui sont pour la plupart d'entre elles présentées par Okamoto en [11]. On montre alors que les

versions généralisées de ces propriétés ne sont pas toujours vérifiées par les n-composantes principales. Parmi les propriétés conservées on trouve la propriété d'optimalité en termes d'approximation euclidienne d'une matrice, qui nous permettra au chapitre suivant de construire des représentations graphiques possédant des qualités d'optimalité.

Dans tout ce qui suit on utilise parfois l' abréviation CP pour parler des composantes principales.

Soient χ un n-hypercube de données associée à la famille d'entiers $\{p_i\}_{i\in n}$ et $\{q_i\}_{i \in n}$ une autre famille d'entiers tels que $q_i \leq p_i$ quelque soit $i \in [n]$; la famille d'espaces euclidiens $\{(E_i, M_i)\}_{i \in [n]}$ de dimensions p_i est repérée par rapport aux bases respectives ξ^i de E_i dans laquelle la matrice de M_i est $M_i =: N_i^{-1}$. On appelle alors n-ACP$(\chi, \otimes N_i)$ $\{q_i\}$-dimensionnelle la n-analyse en composantes principales de χ ; c'est-à-dire la recherche de la solution du problème P3 ou de ses équivalents traitée au chapitre précédent.

4.1 - CUBE CENTRAL, COMPOSANTES PRINCIPALES : DEFINITIONS

On commence ce paragraphe en rappelant d'emblée la définition traditionnelle des composantes principales d'une ACP.

Définition

Soit $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ et M et N deux matrices symétriques définies positives d'ordre m et n respectivement. Soient $s \leq \text{rang}(X)$ (U,V,Λ) une solution d'ordre s de l'ACP du triplet (X,M,N). La matrice

$$C = XNV \qquad (1)$$

est dite la matrice des s premières composantes principales de l'ACP(X,M,N) ou tout simplement la matrice des composantes principales. La $j^{ème}$ composante principale de l'ACP(X,M,N) est la $j^{ème}$ colonne de la matrice C. D'après (II.45) U et V sont liées par la formule

$$U = XNV^{-1/2} \tag{2}$$

alors la matrice des composantes principales s'écrit aussi :

$$C = U\Lambda^{1/2} \tag{3}$$

et puisque U et V sont respectivement M et N-orthonormées

$$^tCMC = \Lambda \tag{4}$$

la matrice des composantes principales est M-orthogonale. De plus

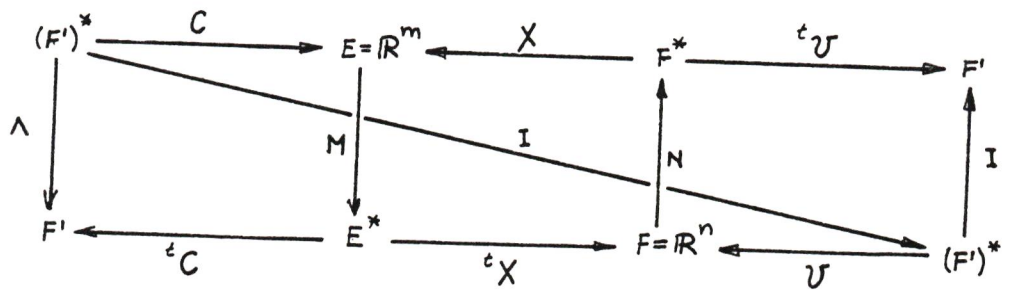
$$\|C\|_{M,I} = \Lambda^{1/2}, \tag{5}$$

et

$$\|C_j\|_M = \lambda_j^{1/2} \quad : \tag{6}$$

la M-norme de la $j^{ème}$ composante principale est égale à la racine carrée de la $j^{ème}$ valeur propre $\lambda_j(^tXMXN)$ de ^tXMXN.

On peut résumer ces diverses matrices dans le diagramme commutatif :



4.1.1 - L'hypercube central et l'hypercube des n-composantes principales

Reprenons à nouveau le problème P3 et ses équivalents :

$P = \{p_i\}_{i\in n}$ est une famille de n entiers positifs ;

$\{(E_i, M_i)\}_{i\in n}$ est une famille d'espaces euclidiens de dimensions p_i ;

ξ^i est une base de E_i par rapport à laquelle la matrice de M_i est M_i ;

ξ_i est la base duale de E_i^* ;

E_i^* est muni d'un produit scalaire N_i de matrice $N_i = M_i^{-1}$ dans la base ξ_i.

$\otimes E_i^*$ est l'espace vectoriel des formes n-linéaires sur xE_i. Il admet $\xi = \otimes\xi_i$ pour base ;

E^* est muni du produit scalaire N de matrice $N = \otimes N_i$ dans la base ξ ;

χ est un n-hypercube de données associé à la famille P ;

x est le tenseur de E associé à χ par rapport à la base ξ ,

$Q = \{q_i\}_{i\in n}$ est une autre famille d'entiers positifs telle que $q_i \leq p_i$ et $Q \neq P$;

Γ , Γ_0 et Γ_1 sont définis comme en (III.23), (III.32) et (III.35) :

$$\Gamma_0 = \{\{F_i\}_{i\in n} \mid F_i \subset E_i \ ; \ \dim(F_i) = q_i\} \tag{7}$$

$$\Gamma = \bigcup_{\{F_i\}_{i\in n}} \langle\{F_i\}\rangle \tag{8}$$

$$\Gamma_1 = \bigotimes_{i=1}^{n} O_{p_i q_i}^{M_i} \ ; \tag{9}$$

Si $\{F_i\}_{i\in n} \in \Gamma_0$ $<\{F_i\}>$ est l'image de $\otimes F_i^*$ par l'isomorphisme d'espace euclidien Φ (ch. III, page 67). On identifie $\otimes F_i^*$ et $<\{F_i\}>$ qui est un sous espace de $\otimes E_i^*$.

$\{\bar{F}_i\}_{i\in n}$ et $\bar{u} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \ldots, \bar{U}_m)$ sont les éléments de Γ_0 et Γ_1 qui définissent la solution de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$, ils optimisent les deux expressions suivantes équivalentes au problème P3 :

$$\max_{\{F_i\}\in\Gamma_0} \|Proj_{F^*}(x)\|_N \; ; \tag{10}$$

$$\max_{u\in\Gamma_1} \|(\otimes M_i U_i {}^t U_i)\underline{x}\|_N . \tag{11}$$

La base ζ^i de $\bar{F}_i$ définie par les colonnes de la matrice $\bar{U}_i$ est M_i-orthonormée, et la base duale ζ_i de $\bar{F}_i^*$ est N_i-orthonormée, aussi $\zeta = \otimes\zeta_i$ est elle une base N-orthonormée de $\otimes\bar{F}_i^*$ et la matrice décrivant la base ζ de $\bar{F}^*$ dans la base ξ de E^* est $\otimes M_i \bar{U}_i$.

S'il n'y a pas possibilité de confusion on écrit simplement $\{F_i\}$ et $u = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ pour désigner les deux éléments optimaux $\{\bar{F}_i\}$ et $\bar{u}$, qui, sont liés par l'expression :

$$F_i = <U_i>_{\xi^i} \quad . \tag{12}$$

La donnée d'une bipartition ordonnée de [n], $n = \{n_1, n_2\}$, conduit à la définition d'une famille $\{G_i\}_{i\in n}$ de sous espaces des E_i

$$G_i = \begin{cases} E_i & \text{si } i \in n_1 \\ F_i & \text{si } i \in n_2 \end{cases}$$

et de leurs bases respectives :

si $i \in n_1$ on prend ξ^i comme base de G_i et

si $i \in n_2$ on prend ζ^i comme base de G_i.

Alors η^i définie par :

$$\eta^i = \begin{cases} \xi^i \text{ si } i \in \eta_1 \\ \zeta^i \text{ si } i \in \eta_2 \end{cases}$$

est une base de G_i, et la base duale de G_i^*, η_i, permet de doter l'espace $G^* = \bigotimes G_i^*$ de la base $\eta = \bigotimes \eta_i$. On vérifie que la dimension de G^* est $p^1 q^2$; de plus, (III.17) montre que

$$F^* \subset G^* \subset E^*$$

donc la projection de x sur F^* :

$$\hat{x} = Proj_{F^*}(x)$$

appartient aux trois espaces F^*, G^*et E^*.

On note $\underline{x}$ la matrice unicolonne des coordonnées du tenseur x par rapport à la base ξ de E^*, et $\underline{\hat{x}}$, $\underline{h}$ et $\underline{\overset{\eta}{c}}$ les matrices unicolonnes des coordonnées du tenseur $\hat{x}$ par rapport aux bases ξ, ζ et η de E^*, F^* et G^* respectivement.

On note $\hat{\chi}$ le n-hypercube de données associé au tenseur $\hat{x}$ et à la base ξ de E^* (ch . III p.57), et on l'appelle "l'hypercube projeté."

Définition

On appelle "n-hypercube central de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$" ou plus simplement cube central, le n-hypercube de données associé au tenseur $\hat{x}$ et à la base ζ de F^*. On le note h.

Définition

On appelle "n-hypercube des η-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$", ou plus simplement cube des η-composantes principales, le n-hypercube de données associé au tenseur $\hat{x}$ et à la base η de G^*. On le note $\overset{\eta}{c}$.

Le cube central h, le cube des η-composantes principales $\overset{\eta}{C}$ et le cube projeté $\hat{\chi}$ sont donc des cubes de données associées au même tenseur $\hat{x}$ qu'ils décrivent dans les bases distinctes : ζ, η et ξ respectivement.

4.1.2 - Les représentations matricielles du cube central et du cube des η-composantes principales.

Nous avons souligné au chapitre I qu'étant donné un n-hypercube de données à chaque bipartition ordonnée de [n] correspond une représentation matricielle distincte du cube. Nous allons considérer ici la même bipartition η définie au paragraphe précédent et construire les η-représentations matricielles des hypercubes de données $\hat{\chi}$, h et $\overset{\eta}{C}$ que nous notons $\overset{\eta}{\hat{X}}$, $\overset{\eta}{H}$ et $\overset{\eta}{C}$ respectivement.

On sait que la matrice des vecteurs de la base ζ écrits dans la base ξ est :

$$B = MU = \bigotimes_{i} M_i U_i$$

on se propose maintenant de décrire les vecteurs de la base η dans la base ξ : si $i \in \eta_1$ la matrice de la base η^i de G_i par rapport à ξ^i est la matrice unité ;
si $i \in \eta_2$ la matrice de η^i relative à la base ξ^i est toujours U_i.
La matrice W_i définie par :

$$W_i = \begin{cases} I & \text{si } i \in \eta_1 \\ M_i U_i & \text{si } i \in \eta_2 \end{cases} \qquad (14)$$

permet d'écrire d'après (III. 19,20) la matrice des vecteurs de la base λ de G^* dans la base ξ de E^*:

$$W = \bigotimes_{i=1}^{n} W_i . \qquad (15)$$

Puisque ζ est une base de F^* l'élément $\hat{x}$ de F^* se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de ζ. Mais, par (11)

$$\underline{\hat{x}} = (\otimes M_i U_i {}^tU_i)\underline{x} = (MU)\,{}^tU\underline{x} \tag{16}$$

il résulte donc de (14) que les coefficients de cette combinaison linéaire sont les éléments de la matrice unicolonne ${}^tU\underline{x}$. Aussi les coordonnées du tenseur $\hat{x}$ dans la base ζ de F^* sont-ils donnés par la matrice $\underline{h}$:

$$\underline{h} = {}^t(\otimes U_i)\underline{x}. \tag{17}$$

De façon analogue, puisque $\underline{\hat{x}}$ s'écrit :

$$\underline{\hat{x}} = (\otimes M_i U_i {}^tU_i)\underline{x} = (\otimes W_i)\ (\otimes V_i)\underline{x} \tag{18}$$

où
$$V_i = \begin{cases} M_i U_i {}^tU_i & \text{si } i \in \eta_1 \\ {}^tU_i & \text{si } i \in \eta_2 \end{cases} \tag{19}$$

du fait que W est la matrice des vecteurs de η dans la base ξ on déduit que

$$\overset{\eta}{\underline{c}} = (\otimes V_i)\underline{x} \tag{20}$$

est la matrice unicolonne des coordonnées de $\hat{x}$ dans la base η de G^*.

Soit $\overset{\eta}{X}$ la η-représentation matricielle du tenseur x associé à la base ξ de E^* (ch. III, page 59). L'expression (16) et les résultats du paragraphe (III.3) permettent de construire la η-représentation matricielle du cube de données $\hat{\chi}$:

$$\overset{\eta}{\hat{X}} = (\underset{i\in\eta_1}{\otimes} M_i U_i {}^tU_i)\ \overset{\eta}{X}\ {}^t(\underset{i\in\eta_2}{\otimes} M_i U_i {}^tU_i) = M^1 U^1 {}^tU^1\ \overset{\eta}{X}\ U^2 {}^tU^2 M^2 \tag{21}$$

De même, par (17) la η-représentation matricielle du cube central h est :

$$\overset{\eta}{H} = {}^t(\underset{i\in\eta_1}{\otimes} U_i)\ \overset{\eta}{X}\ (\underset{i\in\eta_2}{\otimes} U_i) = {}^tU^1\ \overset{\eta}{X}\ U^2\ , \tag{22}$$

et, finalement, par (18), la η-représentation matricielle du cube des η-composantes principales $\overset{\eta}{C}$ est :

$$\overset{\eta}{C} = (\underset{i\in\eta_1}{\otimes} V_i)\ \overset{\eta}{X}\ {}^t(\underset{i\in\eta_2}{\otimes} V_i)$$

que, par (19) s'écrit :

$$\overset{\eta}{C} = (\underset{i\in\eta_1}{\otimes} M_i U_i\, {}^tU_i)\ \overset{\eta}{X}\ (\underset{i\in\eta_2}{\otimes} U_i) = M^1U^1\,{}^tU^1\ \overset{\eta}{X}U^2 \qquad (23)$$

Définition

$\overset{\eta}{C}$ est la matrice des η-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$.

En d'autres termes, la matrice des η-composantes principales est la η-représentation matricielle de l'hypercube de données associée au tenseur $\hat{x}$ et à la base η de G^*.

Puisque les matrices U_i sont M_i-orthonormées on déduit des expressions (21), (22) et (23) :

$$\overset{\eta}{H} = {}^tU_1\ \overset{\eta}{C} = {}^tU^1\ \overset{\eta}{\tilde{X}}U^2 \qquad (24)$$

$$\overset{\eta}{C} = M^1U^1\ \overset{\eta}{H} = \overset{\eta}{\hat{X}}U^2 \qquad (25)$$

$$\overset{\eta}{\hat{X}} = M^1U^1\ \overset{\eta}{H}\ {}^tU^2\ M^2 = \overset{\eta}{C}\ {}^tU^2\ M^2 \qquad (26)$$

On remarque que :

$$\overset{\eta}{H} \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)\ ;\quad \overset{\eta}{C} \in M_{\mathbb{R}}(p^1,q^2)\ ;\quad \overset{\eta}{\tilde{X}} \in M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2),$$

et on vérifie les égalités :

$$\|\overset{\eta}{H}\|_{I,I} = \|\overset{\eta}{C}\|_{N^1,I} = \|\overset{\eta}{\tilde{X}}\|_{N^1,N^2} \qquad (27)$$

résultat que l'on pouvait déduire directement de l'isomorphisme Φ étudié au chapitre III et du fait que les bases ζ^i des F_i sont M_i-orthonormées.

4.1.3 - Un cas particulier : le cas $\eta_2 = \{k\}$.

On considère dans ce paragraphe le cas de la bipartition ordonnée η de $[n]$ définie par :

$$\eta_1 = \{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\} \; ; \quad \eta_2 = \{k\} \tag{28}$$

4.1.3.1 - La matrice des k-composantes principales

Définition

Quand η est définie par (28) on appelle matrice des k-composantes principales et on la note $\overset{k}{C}$, à la matrice des η-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$.

Avec les notations usuelles la matrice des k-composantes principales s'écrit donc :

$$\overset{k}{C} = (\underset{k}{\otimes} M_i U_i {}^t U_i) \overset{k}{X} U_k = M^k U^k {}^t U^k \overset{k}{X} U_k \tag{29}$$

la matrice des k-composantes principales est N^k orthogonale, car

$$\begin{aligned} {}^t\overset{k}{C} N^k \overset{k}{C} &= {}^t U_k \, {}^t\overset{k}{X} U^k \, {}^t U^k M^k N^k M^k U^k \, {}^t U^k \overset{k}{X} U_k \\ &= {}^t U_k \, {}^t\overset{k}{X} U^k \, {}^t U^k \overset{k}{X} U_k \end{aligned} \tag{30}$$

mais $u = (U_1, U_2 .., U_n)$ étant une solution de P3 satisfait le système S2 décrit en (III.60), par suite :

$$ {}^t\overset{k}{C} N^k \overset{k}{C} = {}^t U_k M_k U_k \Lambda_k = \Lambda_k, \tag{31}$$

où Λ_k est la matrice diagonale des plus grandes valeurs propres de $T_k(u)$. Puisque $tr(\Lambda_k)$ est indépendante de k on note $tr(\Lambda)$ cette valeur.
On peut donc compléter (27) en écrivant pour toute bipartition η et pour tout entier $k (k \leq n)$:

$$\|\overset{\eta}{H}\|_{I,I} = \|\overset{\eta}{C}\|_{N^1,I} = \|\overset{k}{C}\|_{N^k,I} = \|\overset{\eta}{\hat{X}}\|_{N^1,N^2} = \|\overset{k}{\hat{X}}\|_{N^k,N_k} = \|\hat{x}\|_{\eta} = tr^{1/2}(\Lambda). \tag{32}$$

Considérons maintenant la matrice

$$\overset{k}{Y} = M^k U^k \, {}^t U^k \overset{k}{X}.$$

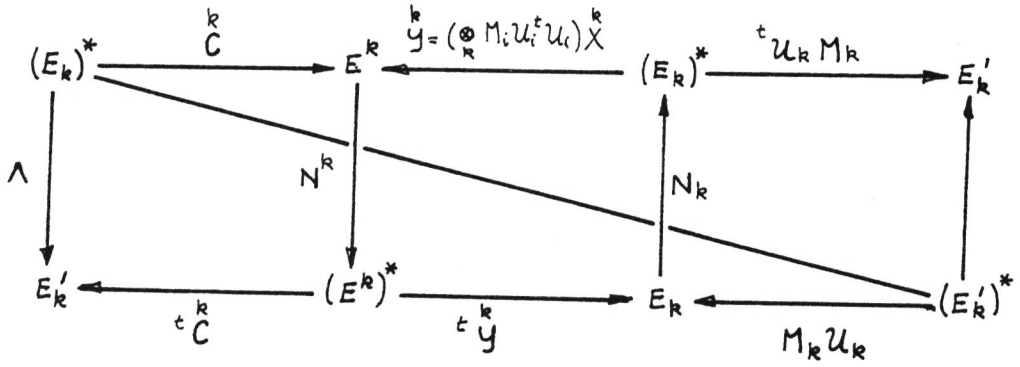
l'ACP du triplet $(\overset{k}{Y}, N^k, N_k)$ fait intervenir la matrice

$$R_k = {}^t\overset{k}{Y} N^k \overset{k}{Y} N_k = {}^t\overset{k}{X} U^k \, {}^t U^k \overset{k}{X} .$$

Puisque u satisfait le système S2 on déduit de (III.60) que la matrice des premiers vecteurs propres N_k-normés de R_k est $M_k U_k$ et que la matrice des valeurs propres correspondantes est Λ_k. La matrice des composantes principales de l'ACP du triplet $(\overset{k}{Y}, N^k, N_k)$ est donc :

$$\overset{k}{Y} N_k M_k U_k = \overset{k}{Y} U_k = M^k U_k \, {}^t U_k \overset{k}{X} U_k$$

qui, par (29) est égale à $\overset{k}{C}$. On conclut que la matrice $\overset{k}{C}$ des k-composantes principales de la n-ACP$(\chi, \otimes N_i)$ coïncide avec la matrice des composantes principales de l'ACP du triplet $(\overset{k}{Y}, N^k, N_k)$; elle répond donc au schéma :



On savait que les colonnes de $\overset{k}{C}$ étaient N^k-orthogonales, on déduit maintenant que la N^k-norme de la $j^{ème}$ colonne de $\overset{k}{C}$ est $(\lambda^k_j)^{1/2}$, la racine carrée de la $j^{ème}$ valeur propre de la matrice diagonale Λ_k.
C'est-à-dire :

$${}^t\overset{k}{C}_j \, N^k \, \overset{k}{C}_j = \lambda^k_j. \qquad (33)$$

4.1.3.2 - La $j^{ème}$ k-composante principale

Soient $k \in [n]$ et $j \in [q_k]$. On note comme d'habitude $(U_k)_j$ la $j^{ème}$ colonne de la matrice U_k. ζ_j^k est le $j^{ème}$ vecteur de la base ζ^k de F_k définie par la matrice U_k. Par suite :

$$F_k = \langle U_k \rangle_{\xi^k} = \bigoplus_{j=1}^{q_k} \langle (U_k)_j \rangle_{\xi^k} = \bigoplus_{j=1}^{q_k} \langle \zeta_j^k \rangle, \qquad (34)$$

et puisque ζ^k est une base M_k-orthonormée

$${}^t(U_k)_j M_k (U_k)_j = 1 \in M_{\mathbb{R}}(1,1).$$

Considérons la famille $\{G_i^{pj}\}_{i \in n}$ de sous espaces de E_i définie par

$$G_i^{kj} = \begin{cases} E_i & \text{si } i \neq k \\ \langle (U_k)_j \rangle_{\xi^i} & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Soit ρ^i la base de G_i^{kj} définie par :

$$\rho^i = \begin{cases} \xi^i & \text{si } i \neq k \\ \zeta_j^k & \text{si } i = k. \end{cases}$$

et soit le produit

$$G^{kj*} = \bigotimes_{i=1}^{n} G_i^{kj*} .$$

On interprète G^{kj*} grâce à l'isomorphisme décrit en (III.3.3) comme un sous-espace vectoriel de E^*. G^{kj*} admet pour base $\rho = \otimes \rho_i$.

La N-projection orthogonale de $\hat{x}$ sur le sous espace G^{kj*}

$$c^{kj} = N.Proj_{G^{kj*}}(\hat{x}),$$

a pour matrice unicolonne de coordonnées dans la base ρ le vecteur que l'on note $\underline{c}^{kj}$. Puisque la matrice des vecteurs de la base ρ^i dans la base ξ^i est I si $i \neq k$ et $(U_k)_j$ si $i = k$ on sait par (III.19,20) que la matrice de ρ dans la base ξ est :

$$W = \bigotimes W_i$$

où W_i est défini par :

$$W_i = \begin{cases} I & \text{si } i \neq k \\ M_k(U_k)_j & \text{si } i = k. \end{cases}$$

On déduit donc que la matrice P du projecteur N-orthogonal sur G^{*kj} est

$$P = \bigotimes_{i=1}^{n} S_i$$

où

$$S_i = \begin{cases} I & \text{si } i \neq k \\ M_k(U_k)_j \; {}^t(U_k)_j & \text{si } i = k \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$P = \bigotimes_{i=1}^{n} W_i R_i \qquad (35)$$

où

$$R_i = \begin{cases} I & \text{si } i \neq k \\ {}^t(U_k)_j & \text{si } i = k \end{cases} . \qquad (36)$$

La matrice unicolonne des coordonnées de c^{kj} dans la base ξ de E^* est :

$$P\underline{\hat{x}} = (\bigotimes S_i)\underline{\hat{x}} = (\bigotimes w_i)\ (\bigotimes R_i)\ (\bigotimes M_i U_i\ {}^t U_i)\underline{x}$$

$$= W(\bigotimes R_i M_i U_i\ {}^t U_i)\underline{x}$$

Or, W est la matrice de ρ dans la base ξ , aussi a-t-on

$$\underline{c}^{kj} = (\bigotimes R_i M_i U_i\ {}^t U_i)\underline{x}$$

pour la matrice des coordonnées du tenseur c^{kj} rapportées à la base ρ de G^{*kj} . En conséquence la k-représentation matricielle, C^{kj}, associée au

tenseur c^{kj} dans la base ρ est :

$$C^{kj} = (\underset{k}{\otimes} R_i M_i U_i \ {}^t U_i) \ X^k \ {}^t(R_k M_k U_k \ {}^t U_k)$$

qui par (36) devient

$$C^{kj} = (\underset{k}{\otimes} M_i U_i \ {}^t U_i) \ X^k \ (U_k)_j$$

qui coïncide avec la $j^{ème}$ colonne de la matrice C^k des k-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$:

$$C^{kj} = (C)^k_j .$$

Définition

On appelle la $j^{ème}$ k-composante principale de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ la k-représentation matricielle du tenseur c^{kj} dans la base ρ de G^{kj}_* .

On la note C^{kj} et l'on constate qu'elle est égale à la $j^{ème}$ colonne de C^k. D'après le paragraphe précédent la $j^{ème}$ k-composante principale est aussi la $j^{ème}$ composante principale issue de l'ACP du triplet $(Y = (\underset{k}{\otimes} M_i U_i \ {}^t U_i) X^k, \ N^k, \ N_k)$.

De (33) on déduit que

$$\| c^{kj} \|_N = \| C^{kj} \|_{N^k} = (\lambda^k_j)^{1/2}$$

et que C^{kj} et $C^{kj'}$ sont N^k-orthogonales lorsque $j \neq j'$.

4.1.4 - Les n-composantes principales comme une généralisation des composantes principales d'une ACP.

Nous allons considérer dans ce paragraphe les n-composantes principales d'une n-ACP dans le cas particulier n = 2.

Soient $x \in E_1^* \otimes E_2^*$ et X^1 et X^2 les 1-représentation et 2-représentation matricielles de x associées à la base $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ de E^*. On reconnait que

$$t^1_X = \overset{2}{X} \quad ; \quad t^2_X = \overset{1}{X}$$

$$N^2 = N_2 \quad ; \quad N^1 = N_1$$

et si (U_1, U_2, Λ) est une solution de l'ACP du triplet $(\overset{2}{X}, N_1, N_2)$, (ch. II, 2.4.3), $\bar{u} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ est une solution de la 2-ACP de $(\chi, N_1 \otimes N_2)$, où

$$\bar{U}_1 = N_1 U_1 \quad \text{et} \quad \bar{U}_2 = N_2 U_2 \tag{37}$$

Par définition la matrice des CP de l'ACP du triplet $(\overset{2}{X}, N_1, N_2)$ est

$$C = \overset{2}{X}\, N_2 U_2$$

et la matrice des 2-CP de la 2-ACP de $(\chi, N_1 \otimes N_2)$ est

$$\overset{2}{C} = M_1 \bar{U}_1\, {}^t\bar{U}_1\, \overset{2}{X}\, \bar{U}_2 \tag{38}$$

En remplaçant (37) dans (38) on obtient

$$\overset{2}{C} = U_1\, {}^tU_1\, N_1\, \overset{2}{X}\, N_2 U_2 \tag{39}$$

mais d'après (2)

$$U_1 = \overset{2}{X}\, N_2 U_2\, \Lambda^{-1/2}$$

par suite (39) s'écrit

$$\overset{2}{C} = \overset{2}{X}\, N_2 U_2 \Lambda^{-1/2} \Lambda^{-1/2}\, {}^tU_2 N_2\, {}^t\overset{2}{X}\, N_1\, \overset{2}{X}\, N_2 U_2 =$$

$$= \overset{2}{X}\, N_2 U_2 \Lambda^{-1}\, {}^tU_2 N_2 U_2 \Lambda = \overset{2}{X}\, N_2 U_2 = C.$$

Cette expression montre l'égalité de C et $\overset{2}{C}$: lorsque n=2 la matrice des 2-composantes principales de la 2-ACP de $(\chi, N_1 \otimes N_2)$ coïncide avec la matrice des composantes principales de l'ACP du triplet $(\overset{2}{X}, N_1, N_2)$. La définition des η-composantes principales d'une n-ACP est donc une généralisation de la définition des composantes principales d'une ACP.

Lorsque $n \neq 2$ la matrice des composantes principales de l'ACP du triplet $(\overset{\eta}{X}, N^1, N^2)$ n'est pas toujours égale à la matrice des η-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$. En effet : soient Δ la matrice diagonale des plus grandes valeurs propres issues de l'ACP de $(\overset{\eta}{X}, N^1, N^2)$ et C la matrice des composantes principales de cette analyse. Par (5) on sait que

$$\|C\|^2_{N^1,I} = tr(\Delta)$$

d'après (32) et (III.92)

$$\|\overset{\eta}{C}\|^2_{N^1,I} = \|\hat{x}\|^2_n = tr(\Lambda) \leq tr(\Delta) = \|C\|^2_{N^1,I}$$

c'est-à-dire

$$\|\overset{\eta}{C}\|_{N^1,I} \leq \|C\|_{N^1,I} \qquad (40)$$

On présente au paragraphe 4.2.4 de ce chapitre un exemple dans lequel cette inégalité est stricte. Cela implique que $\overset{\eta}{C} \neq C$. Par suite, lorsque $n > 2$ les matrices des composantes principales de l'ACP du triplet $(\overset{\eta}{X}, N^1, N^2)$ et de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ peuvent être inégales. Cependant, d'après (III.3.5.2) si $q_k = \text{rang } (\overset{k}{X})$ l'approximation de Tucker est une solution du modèle TUCKERN et les matrices des composantes principales de ces deux analyses coïncident.

4.2 - PROPRIETES D'OPTIMALITE DES COMPOSANTES PRINCIPALES

Ce paragraphe présente les propriétés essentielles de la matrice des composantes principales de l'ACP d'un triplet (X,M,N). La plupart d'entre elles sont exposées par Okamoto en [11] d'une façon légèrement différente de celle que nous adoptons. Les démonstrations de Okamoto sont en outre faites dans le cas particulier M = I, N = I. Nous les présentons avec des métriques quelconques.

On montre que les 5 premières propriétés restent valables dans le contexte plus général des η-composantes principales d'une n-ACP. La sixième propriété n'est vérifiée que dans le cas où η prend une forme particulière. A l'opposé les 5 propriétés restantes ne sont plus satisfaites par les η-composantes principales d'une n-ACP (avec $n > 2$), et ce même lorsque l'on impose les conditions les plus contraignantes.

On fait la démonstration des 6 premières propriétés dans le cadre de la n-ACP, et on présente une esquisse de démonstration des 5 dernières dans le cadre de l'ACP. On expose des contre exemples pour montrer la non pertinence de ces 5 propriétés dans le cadre général.

4.2.1 - Meilleure approximation euclidienne d'une matrice

4.2.1.1 - Définition

Soient $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$, M et N deux métriques (matrices symétriques définies positives) d'ordre m et n respectivement et r un entier inférieur à n.

Notons :

F un sous ensemble de $M_{\mathbb{R}}(m,r)$: $F \subset M_{\mathbb{R}}(m,r)$ et

Ω un sous ensemble de $O =: O_{nr}^{N}$: $\Omega \subset O$

On dit que $\bar{C}$ est "la" $(F \times \Omega)$-meilleure approximation $(M \otimes N)$-euclidienne de X si $\bar{C}$ optimise l'expression :

$$\min_{C \in F} \left(\min_{A \in \Omega} \| X - C\,{}^{t}A \|_{M,N} \right) \qquad (41)$$

en d'autres termes, s'il existe $\bar{A} \in \Omega$ tel que pour tout $(C,A) \in F \times \Omega$

$$\| X - \bar{C}\,{}^{t}\bar{A} \|_{M,N} \leq \| X - C\,{}^{t}A \|_{M,N}.$$

Si $F = M_{\mathbb{R}}(m,r)$ et $\Omega = O$ on dit meilleure au lieu de $(F \times \Omega)$-meilleure
Si M = I et N = I on dit euclidienne au lieu de $(M \otimes N)$-euclidienne.

Exemple : On montre plus loin que si C est la matrice des CP issue de l'ACP de (X,M,N) alors C est la meilleure approximation $(M \otimes N)$-euclidienne de X.

4.2.1.2 - Une propriété des meilleures approximations euclidiennes

Etant donnée une matrice X de $M_{\mathbb{R}}(m,n)$ chaque ligne de X peut être considérée comme la matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, considéré lui-même comme un espace euclidien de métrique N par rapport à la base canonique.

Soit X^i la $i^{ème}$ ligne de X, ${}^tX^i \in \mathbb{R}^n$, et par suite le produit scalaire des vecteurs définis par les lignes i et j de X est :

$$X^i \; N \; {}^tX^j$$

Si $\bar{C}$ est la $(F \times \Omega)$-meilleure approximation $(M \otimes N)$-euclidienne de X, $\bar{C}{}^t\bar{A}$ est la matrice la plus proche de X au sens de la métrique $\langle .,. \rangle_{M,N}$ parmi toutes les matrices de la forme $C{}^tA$ où $(C,A) \in (F \times \Omega)$.
Soit

$$\varepsilon = \|X-\bar{C}{}^t\bar{A}\|^2_{M,N}$$

D'après le lemme 6 du chapitre II

$$\sum_{i=1}^{m} \|{}^t(X-\bar{C}{}^t\bar{A})^i\|^2_N \leq tr(M)\|X-\bar{C}{}^t\bar{A}\|^2_{M,N} = tr(M).\varepsilon$$

tr(M) est une constante, et donc si ε est assez petit la N-distance entre les vecteurs de $(\mathbb{R}^n,N)$ définis par deux lignes homologues de X et $\bar{C}{}^t\bar{A}$ doit aussi être petite. Alors, une bonne représentation graphique des vecteurs définis par les lignes d'une de ces matrices doit être en même temps une représentation graphique raisonnable des lignes de l'autre.

L'expression $Y = \bar{A}{}^t\bar{C}$ montre que les m vecteurs définis par les colonnes de la matrice Y appartiennent tous à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension r dont une base N-orthonormée est définie par les colonnes de la matrice A.

Les coordonnées de ces m vecteurs dans cette base sont données par les colonnes de la matrice ${}^t\bar{C}$, c'est-à-dire par les lignes de $\bar{C}$. On peut donc construire une représentation cartésienne (axes orthogonaux, vecteurs directeurs placés à la distance 1 de l'origine) des vecteurs définis par les lignes de $\bar{C}{}^t\bar{A}$ en utilisant comme coordonnées les lignes correspondantes de la matrice $\bar{C}$. La N-distance entre deux de ces vecteurs est mesurée exactement dans le diagramme ainsi obtenu par la longueur du segment qui sépare les points concernés.

En conséquence si ε est assez petit on peut, à l'aide de la matrice $\bar{C}$, construire une représentation cartésienne "acceptable" des vecteurs définis par les lignes de la matrice X dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, N)$.

Il faut néanmoins remarquer que la $(F \times \Omega)$-meilleure approximation (M ⊗ N)-euclidienne de X fournit une bonne représentation cartésienne des lignes de X, mais rien ne nous garantit qu'elle soit la meilleure représentation cartésienne possible. Au chapitre V de cette thèse nous définissons avec plus de précision le concept de "meilleure représentation cartésienne d'un nuage de points". On montre alors que sous certaines contraintes la matrice $\bar{C}$ fournit une représentation optimale du nuage des lignes de la matrice X.

4.2.2 - Propriétés d'optimalité des composantes principales de l'ACP

Soient $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$, $0 < r \leq \text{rang}(X)$, M et N deux métriques d'ordre m et n respectivement. Soit (V,U,Λ) une solution d'ordre r de l'ACP du triplet (X,M,N) (ch . II page 38) et C la matrice des r premières composantes principales de X (ch. 4.1 p.) :

$$C = XNU.$$

V est la matrice N-orthonormée des r premiers vecteurs propres de ${}^tXMXN$:

$$^{t}X M X N U = U \Lambda .$$

On définit les ensembles :

$$F_1 = \{C \mid C = XNA \text{ où } A \in O^N_{n,r}\}$$
$$F_2 = \{C \mid C = XNA \text{ où } A \in M_{\mathbb{R}}(n,r)\}$$
$$F_3 = M_{\mathbb{R}}(m,r)$$
$$O_1 = O^N_{n,r}$$
$$O_2 = M_{\mathbb{R}}(n,r)$$

Evidemment

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3$$
$$O_1 \subset O_2$$

et l'on vérifie que :

$$C \in F_1 \text{ et } U \in O_1 .$$

Les 6 premières propriétés suivantes sont démontrées plus tard dans le cadre général de la n-ACP :

PROPRIETE 1

"Meilleure approximation par une matrice de rang inférieur ou égale à r" : les matrices C et U réalisent l'optimum de :

$$\min_{(C,U) \in F_3 \times O_2} \| X - C\,{}^{t}U \|_{M,N}$$

PROPRIETE 2

"Maximisation de la norme " :
La matrice des composantes principales C réalise l'optimum de :

$$\max_{C \in F_1} \| C \|_{M,I}$$

PROPRIETE 3

"Maximisation du produit scalaire" :

Les matrices C et U réalisent l'optimum de :

$$\max_{(C,U) \in F_1 \times O_1} \langle X, C\,{}^tU \rangle_{M,N}$$

PROPRIETE 4

"Maximisation de la projection" :

Les matrices C et U réalisent l'optimum de :

$$\max_{(C,U) \in F_2 \times O_2} \left| \frac{\langle X, C\,{}^tU \rangle_{M,N}}{\| C\,{}^tU \|_{M,N}} \right|$$

PROPRIETE 5

"Meilleure approximation euclidienne" :

La matrice C est la meilleure approximation (M & N)-euclidienne de X, elle réalise le

$$\min_{C \in F_3} \left(\min_{U \in O_1} \| X - C\,{}^tU \|_{M,N} \right)$$

PROPRIETE 6

"Corrélation optimale"

La matrice des composantes principales C réalise le :

$$\max_{C \in F_3} \langle X, M.Proj_{<C>} X \rangle_{M,N}$$

où $M.Proj_{<C>}$ dénote la matrice du projecteur M-orthogonal sur l'espace engendré par les colonnes de C.

Remarque : Si M et N sont les métriques unité

$$<X, Proj_{<C>}X> = \sum_{j=1}^{n} <X_j, Proj_{<C>}X_j> = \sum_{j=1}^{n} (\|X_j\|^2 <X_j\ Proj_{<C>}X_j>)/\|X_j\|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \|X_j\|^2 R^2(X_j,C).$$

où X_j représente la $j^{ème}$ colonne de X et $R^2(X_j,C)$ est le coefficient de corrélation linéaire multiple entre X_j et les colonnes de C.

D'autre part, lorsque C est le plein rang

$$M.Proj_{<C>} = C({}^tCMC)^{-1}{}^tCM$$

la propriété 6 est alors équivalente à

$$\max_{C \in F_3} \ tr({}^tXMC({}^tCMC)^{-1}{}^tCMXN).$$

PROPRIETE 7

La matrice des composantes principales C réalise le :

$$\max_{C \in F_1} \ \|{}^tXMC\|_{N,I} \qquad (42)$$

Preuve :

Tout $C \in F_1$ est de la forme XNA où $A \in O_1$; donc

$$\|{}^tXMC\|^2_{N,I} = \|{}^tXMXNA\|^2_{N,I} = tr({}^tAN{}^tXMXN{}^tXMXNA) \qquad (43)$$

mais la matrice

$$S = ({}^tXMXN)({}^tXMXN)$$

est N-symétrique. En vertu du lemme 4 du chapitre II (43) est optimisée lorsque A est la matrice des premiers vecteurs propres de S. Or les premiers vecteurs propres de S sont les mêmes que ceux de la matrice ${}^tXMXN$ il résulte que (42) est réalisé quand $A = U$, c'est-à-dire $C = XNU = C$.

PROPRIETE 8
==========

"Conservation optimale du produit scalaire" :
La matrice des composantes principales C réalise le :

$$\min_{C \in F_3} \| XN\,{}^tX - C\,{}^tC \|_{M,M} \qquad (44)$$

Preuve

D'après [12;336] si $Y \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ l'optimum de $\min_{D \in M_{\mathbb{R}}(m,r)} \| Y\,{}^tY - D\,{}^tD \|$ est atteint quand $D = YV$, où V est la matrice des r plus grand vecteurs propres de ${}^tYY$. Puisque M et N sont des métriques il existe deux matrices non singulières K et L telles que

$$M = {}^tKK \text{ et } N = {}^tLL$$

Posons donc

$$Y = KX\,{}^tL \text{ et } D = KC$$

alors (44) devient équivalente à :

$$\min_{D \in M_{\mathbf{R}}(m,r)} \| Y\,{}^tY - D\,{}^tD \| . \qquad (45)$$

Puisque U est la matrice des r plus grands vecteurs propres de ${}^tXMXN$ la matrice des r plus grands vecteurs propres de ${}^t(KX\,{}^tL)(KX\,{}^tL)$ est LU :

$${}^tYYLU \equiv LU\Lambda ,$$

par suite (45) est optimisée quand

$$D = YLU$$

et (44) est assurée quand C est la matrice des composantes principales de l'ACP de (X,M,N) :

$$C = K^{-1}D = K^{-1}YLU = K^{-1}KX^{t}LLU = XNU = \mathcal{C}\,.$$

Remarque

${}^{t}XNX$ est la matrice des N-produits scalaires entre lignes de X, tandis que $C^{t}C$ est la matrice des I-produits scalaires entre lignes de C. La propriété 8 signifie donc que $\mathcal{C}$ fournit la meilleure approximation dans $M_{\mathbb{R}}(m,r)$ de la matrice des N-produits scalaires des lignes de X au sens de la métrique $<.,.>_{M,M}$. En d'autres termes $\mathcal{C}$ préserve au mieux les N-produits scalaires.

PROPRIETE 9

"Minimisation de la matrice des produits scalaires des résidus" : Les matrices $\mathcal{C}$ et U réalisent l'optimum de :

$$\min_{(C,U)\in F_2\times O_2} \|{}^{t}(X-C^{t}U)M(X-C^{t}U)\|_{N,N} \qquad (46)$$

Preuve

On montre cette propriété et celles qui suivent en reprenant la démarche précédente: on transforme (46) de façon à ce que M et N deviennent les matrices unité et on utilise les résultats démontrés par Okamoto pour le cas M = I, N = I.

D'après [11;683] (théorème 4.6) si $Y \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ l'expression :

$$\|{}^{t}(Y-YE^{t}F)(Y-YE^{t}F)\|$$

est minimisée lorsque E et F appartiennent à $M_{\mathbb{R}}(n,r)$ quand E et F coïncident avec la matrice des r plus grands vecteurs propres de ${}^{t}YY$. Dans notre problème C est un élément de F_2, donc de la forme XNA où $A \in M_{\mathbb{R}}(n,r)$. L'expression (46) s'écrit alors :

$$\min_{(A,U)\in O_2\times O_2} \|{}^{t}(X-XNA^{t}U)M(X-XNA^{t}U)\|_{N,N}$$

soit encore

$$\min_{(E,F)\in O_2\times O_2} \| {}^t(Y-YE{}^tF)(Y-YE{}^tF)\|$$

où $Y = KX{}^tL$; $E = LA$ et $F = LU$

le minimum est donc atteint quand :

$$E = F = LU$$

et par suite le minimum de (46) est assuré quand

$$U = L^{-1}F = U$$

$$C = XNU$$

c'est-à-dire quand U et C coïncident avec U et C respectivement.

PROPRIETE 10

"Maximisation simultanée des valeurs propres" :
Pour tout $i \leq r$ la matrice C réalise l'optimum de

$$\max_{C\in F_1} \lambda_i({}^tCMC) \qquad (47)$$

où $\lambda_i({}^tCMC)$ désigne la ième plus grande valeur propre de ${}^tCMC$.

Preuve

Soit D de la forme $D = YB$ où $Y \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ et $B \in O^I_{n,r}$. D'après [11;682] (théorème 4.3) pour tout $i \leq r$ le maximum de $\lambda_i({}^tDD)$ est obtenu quand B coïncide avec la matrice des plus grands vecteurs propres de ${}^tYY$. Dans notre problème $C \in F_1$ est de la forme XNA où $A \in O_1$. Alors (47) s'écrit sous les deux formes équivalentes :

$$\max_{A \in O_1} \lambda_i({}^tAN{}^tXMXNA)$$

$$\max_{D=YB} \lambda_i({}^tDD) \qquad (48)$$

où

$$Y = KX{}^tL \; ; \; B = LA \text{ et } D = YB$$

(48) est optimisée quand B est la matrice des r premiers vecteurs propres de ${}^tYY$. Alors

$$A = L^{-1}B = L^{-1}LU = U$$

ce qui veut dire que (47) atteint son maximum quand

$$C = XNA = XNU$$

est la matrice C des composantes principales de l'ACP du triplet (X,M,N).

PROPRIETE 11

"Minimisation simultanée des valeurs propres"
Pour tout $i \leq r$ les matrices C et U réalisent l'optimum de :

$$\min_{(C,U) \in F_2 \times O_2} \lambda_i({}^t(X-C{}^tU)M(X-C{}^tU)N) \qquad (49)$$

Preuve :

Soient $Y \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$, E et F deux matrices appartenant à $M_{\mathbb{R}}(n,r)$.

D'après [11;683] (Théorème 4.4) le maximum de la ième valeur propre de la matrice ${}^t(Y-YE{}^tF)(Y-YE{}^tF)$ est obtenu quand E et F coïncident avec la matrice des r premiers vecteurs propres de ${}^tYY$.

Or, $C \in F_2$ est de la forme XNA où $A \in M_{\mathbb{R}}(n,r)$ l'expression (49) s'écrit :

$$\lambda_i({}^t(X-XNA{}^tB)M(X-XNA{}^tB)N)$$

ou encore

$$\lambda_i({}^t(Y-YE{}^tF)(Y-YE{}^tF))$$

avec une nouvelle fois :

$$Y = KX{}^tL \; ; \; E = LA \text{ et } F = LB$$

cette quantité est maximisée quand

$$E = F = LU$$

(49) prend donc sa valeur minimale quand

$$B = A = L^{-1}LU = U \quad \text{et}$$

$$C = XNU$$

est la matrice C des composantes principales de l'ACP de (X,M,N).

4.2.3 - Propriétés conservées par la n-ACP

On montre dans ce paragraphe que des versions généralisées des 6 premières propriétés restent valables pour les η-composantes principales de la n-ACP.

On reprend les concepts et notations de 4.1 : η est une bipartition ordonnée de [n] et x est un élément de E^*. Puisque il n'y a aucun risque de confusion on écrit X au lieu de X_η, et la matrice des η-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est noté C au lieu de C_η.

On définit les ensembles :

$$G_1 = \{C \mid C = (\underset{i\in n_1}{\otimes} M_i A_i {}^t A_i) X (\underset{i\in n_2}{\otimes} A_i) \text{ où } A_i \in O^{M_i}_{p_i q_i}\} \tag{50}$$

$$G_2 = \{C \mid C = (\underset{i\in n_1}{\otimes} M_i A_i {}^t A_i) X (\underset{i\in n_2}{\otimes} A_i) \text{ où } A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)\} \tag{51}$$

$$G_3 = \{C \mid C = (\underset{i\in n_1}{\otimes} A_i) H \text{ où } H \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2) \; ; \; \forall i \in n_2 \; A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)\} \tag{52}$$

$$O_1 = \{B \mid B = \underset{i\in n_2}{\otimes} B_i \quad \text{où } \forall i \in n_2 \; B_i \in O^{N_i}_{p_i,q_i}\} \tag{53}$$

$$O_2 = \{B \mid B = \underset{i\in n_2}{\otimes} B_i \quad \text{où } \forall i \in n_2 \; B_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)\} \tag{54}$$

Clairement

$$\begin{aligned} &G_1 \subset G_2 \subset G_3 \\ &O_1 \subset O_2. \end{aligned} \tag{55}$$

Soit $u = (U_1,U_2,\ldots,U_n)$ une solution du modèle TUCKERN, $u \in \Gamma_1$ réalise le :

$$\min_{a\in\Gamma_1} \| x - \mathrm{Proj}_{\otimes<A_i>}(x) \|_N$$

où $a = (A_1,A_2,\ldots,A_n)$.

Par définition la matrice C des n-composantes principales de la n-ACP de $(\chi,\otimes N_i)$ est :

$$C = (\underset{i\in n_1}{\otimes} M_i U_i {}^t U_i) \; X \; (\underset{i\in n_2}{\otimes} U_i) = M^1 U^1 {}^t U^1 \chi U^2$$

ce qui montre que $C \in G_1$. Notons pour tout $i \in n_2$

$$V_i = M_i U_i \tag{56}$$

Puisque ${}^tV_iN_iV_i = {}^tU_iM_iN_iM_iU_i = {}^tU_iM_iU_i = I$

$V_i \in O_{p_iq_i}^{N_i}$ et donc $V = \underset{i\in n_2}{\otimes} V_i$ appartient à O_1.

Les matrices $C \in G_1$ et $V \in O_1$ issues de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ vérifient les propriétés suivantes qui sont des extensions des 6 premières propriétés de l'Analyse en Composantes Principales ordinaire.

PROPRIETE 1

(C,V) réalise l'optimum de :

$$\min_{(C,B)\in G_3\times O_2} \|X-C^tB\|_{N^1,N^2} \qquad (57)$$

Démonstration

D'après les définitions de G_3 et O_2 l'expression (57) est équivalente à :

$$\min \|X-A^1H^tB\|_{N^1,N^2} \qquad (58)$$

où $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ si $i \in n_1$; $B_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ si $i \in n_2$ et $H \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)$; il est clair que (58) peut s'écrire

$$\min \|X-A^1H^tA^2\|_{N^1,N^2}$$

où pour tout $i \in [n]$ $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ et $H \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)$;
d'après les résultats de (III.3.3) cette quantité est équivalente à

$$\min \|\underline{x} - (A^1 \otimes A^2)\underline{h}\|_{N^1\otimes N^2}$$

donc à

$$\min \|\underline{x}-A\underline{h}\|_N$$

où $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$; $\underline{h} \in M_{\mathbb{R}}(q,1)$; $A = \otimes A_i$ et $\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de x dans la base ξ de E^* ;

et puisque $A\underline{h}$ appartient au sous-espace $<A>_\xi$

$$||\underline{x}-A\underline{h}||_N \geq ||\underline{x}-N.\mathcal{P}roj_{<A>_\xi}\underline{x}||_N \qquad (59)$$

où $N.\mathcal{P}roj_{<A>_\xi}$ est la matrice dans la base ξ du projecteur N-orthogonal sur l'espace engendré par les colonnes de A.
Or tout espace vectoriel peut être muni d'une base orthonormée il existe donc $b_i \in O^{N_i}_{p_i q_i}$ telle que

$$<A_i>_\xi i = <b_i>_\xi i$$

et donc telle que

$$<\otimes A_i>_\xi = <\otimes b_i>_\xi .$$

Dans ce cas

$$N.\mathcal{P}roj_{<A>_\xi} = N.\mathcal{P}roj_{<\otimes b_i>_\xi} .$$

La matrice $(\otimes b_i)$ est N-orthonormée, aussi le projecteur N-orthogonal sur l'espace $<\otimes b_i>_\xi$ a pour matrice :

$$N\mathcal{P}roj_{<\otimes b_i>_\xi} = (\otimes b_i)^t(\otimes b_i)N.$$

Posons dans cette égalité

$$a_i = N_i b_i \qquad (60)$$

$a_i \in O^{M_i}_{p_i q_i}$ car ${}^t a_i M_i a_i = {}^t b_i N_i M_i N_i b_i = I$

il vient :

$$N.\mathcal{P}roj_{<\otimes b_i>_\xi} = (\otimes M_i a_i)^t(\otimes M_i a_i)(\otimes N_i) = (\otimes M_i a_i {}^t a_i)$$

alors :

$$||\underline{x}-N.\mathcal{P}roj_{<A>}\underline{x}||_N = ||\underline{x}-(\otimes M_i a_i {}^t a_i)\underline{x}||_N \qquad (61)$$

mais, la solution u de TUCKERN vérifie :

$$\|\underline{x}-(\otimes M_i a_i {}^t a_i)\underline{x}\|_N \geq |\underline{x}-(\otimes M_i U_i {}^t U_i)\underline{x}|_N \qquad (62)$$

alors (59) (61) et (62) montrent que

$$\|\underline{x}-(\otimes A_i)\underline{h}\|_N \geq \|\underline{x}(\otimes M_i U_i {}^t U_i)\underline{x}\|_N$$

qui est équivalent à

$$\|X-A^1 H {}^t B\|_{N^1,N^2} \geq \|X-M^1 U^1 {}^t U^1 X U^2 {}^t U^2 M^2\|_{N^1,N^2}$$

En utilisant (56) on conclut que $\forall (C,B) \in G_3 \times O_2$

$$\|X-C {}^t B\|_{N^1,N^2} \geq \|X-C {}^t V\|_{N^1,N^2}$$

ceci signifie qu'on ne peut pas trouver de bipartition η , de matrice $H \in M_{\mathbb{R}}(q^1,q^2)$ et de famille $\{A_i\}_{i\in[n]}$ $(A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i))$ telles que

$$\|X-(\underset{i\in\eta_1}{\otimes} A_i) H {}^t(\underset{i\in\eta_2}{\otimes} A_i)\|_{N^1,N^2} \quad \text{soit inférieur à} \quad \|X-C {}^t V\|_{N^1,N^2} .$$

PROPRIETE 2'

La matrice C des η-composantes principlaes de $(\chi,\otimes N_i)$ réalise le :

$$\max_{C\in G_1} \|C\|_{N^1,I} \qquad (63)$$

Démonstration

Puisque $u = (U_1,U_2,\ldots,U_n)$ définit une solution du problème P3 on sait par (III.38) que quelque soit $a = (A_1,A_2,\ldots,A_n) \in \Gamma_1$

$$\|(\otimes M_i A_i {}^t A_i)\underline{x}\|_N \leq \|(\otimes M_i U_i {}^t U_i)\underline{x}\|_N$$

c'est-à-dire

$$\|M^1A^1t_{A^1}X_{A^2}t_{A^2}M^2\|_{N^1,N^2} \leq \|M^1{}_U{}^1t_U{}^1X_U{}^2t_U{}^2M^2\|_{N^1,N^2} \quad ; \qquad (64)$$

mais la quantité à gauche de (64) est égale à :

$$\|M^1A^1t_{A^1}X_{A^2}\|_{N^1,I}$$

et celle à droite à :

$$\|M^1{}_U{}^1t_U{}^1X_U{}^2\|_{N^1,I} = \|C\|_{N^1,I}$$

par suite si $A_i \in O^{M_i}_{p_i,q_i}$

$$\|M^1A^1t_{A^1}X_{A^2}\|_{N^1,I} \leq \|C\|_{N^1,I}. \qquad (65)$$

L'expression (64) montre que C réalise le maximum de $\|C\|_{N^1,I}$ sur l'ensemble G_1. On ne peut donc pas trouver de bipartition η et des matrices A_i, $A_i \in O^{M_i}_{p_iq_i}$, telles que

$$\|(\underset{i\in\eta_1}{\otimes} M_iA_i{}^tA_i)X(\underset{i\in\eta_2}{\otimes} A_i)\|_{N^1,I} > \|C\|_{N^1,I}.$$

Remarque :
Puisque $G_1 \subset G_2 \subset G_3$ C peut ne pas faire l'optimum de (63) ni dans G_2 ni dans G_3.

PROPRIETE 3'

Le couple (C,V) issu de la n-ACP de $(X,\otimes N_i)$ réalise le :

$$\max_{(C,B)\in G_1\times O_1} \langle X, C\,{}^tB\rangle_{N^1,N^2}$$

La démonstration de cette propriété utilise le lemme suivant qui se déduit de l'inégalité de Schwartz :

Lemme

Soit F un sous ensemble de $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ et M une matrice symétrique semi définie positive, alors

$$\max_{(A,B)\in F\times F} tr({}^tAMB) = \max_{A\in F} tr({}^tAMA).$$

Démonstration (de 3')

Toute solution u du problème P3 optimise l'expression

$$\min_{a\in\Gamma_1} \|x-N.Proj_{<\otimes A_i>}(x)\|_N$$

le projecteur ci-dessus étant N-orthogonal u optimise le produit scalaire

$$\max_{a\in\Gamma_1} <x,N.Proj_{<\otimes A_i>}(x)>_N$$

qui est équivalent à :

$$\max_{a\in\Gamma_1} <\underline{x},(\otimes M_iA_i{}^tA_i)\underline{x}>_N =$$

$$\max_{a\in\Gamma_1} <X,M^1A^1{}^tA^1XA^2{}^tA^2M^2>_{N^1,N^2}$$

alors, pour tout $a \in \Gamma_1$:

$$<X,M^1A^1{}^tA^1XA^2{}^tA^2M^2>_{N^1,N^2} \leq <X,C^tV>_{N^1,N^2}$$

Lorsque $(C,B) \in G_1 \times O_1$ la matrice C^tB s'écrit $M^1A^1{}^tA^1XA^2{}^tB$ où $A_i \in O^{M_i}_{p_iq_i}$ et pour $i \in n_2$, $B_i \in O^{N_i}_{p_iq_i}$. Posons :

$$D^2 = \otimes_{i\in n_2} D_i = \otimes_{i\in n_2} N_iB_i$$

le produit scalaire $<X,C^tB>_{N^1,N^2}$ devient :

$$tr({}^tXN^1M^1A^1{}^tA^1XA^2{}^tBN^2) = tr({}^tD^2{}^tXA^1{}^tA^1XA^2) ;$$

l'appartenance de D_i à $O^{M_i}_{p_i q_i}$ implique que A^2 et D^2 sont du même type.
Le lemme ci-dessus garantit que

$$\max({}^tD^2{}^tX_A{}^1{}^tA^1X_A{}^2) = \max({}^tA^2{}^tX_A{}^1{}^tA^2X_A{}^2)$$

mais, puisque

$$\mathrm{tr}({}^tA^2\ {}^tX_A{}^1{}^tA^1X_A{}^2) = \langle X, M^1A^1{}^tA^1X_A{}^2{}^tA^2M^2\rangle_{N^1,N^2}$$

il résulte que

$$\langle X, M^1A^1{}^tA^1X_A{}^2{}^tB\rangle_{N^1,N^2} \leq \langle X, C^tV\rangle_{N^1,N^2}$$

c'est-à-dire $\forall (C,B) \in G_1 \times O_1$

$$\langle X, C^tB\rangle_{N^1,N^2} \leq \langle X, C^tV\rangle_{N^1,N^2}$$

ce qui prouve la propriété 3'.

PROPRIETE 4'

Le couple (C,V) issu de la n-ACP de $(X, \otimes N_i)$ réalise le :

$$\max_{(C,B)\in G_3\times O_2} \left| \frac{\langle X, C^tB\rangle_{N^1,N^2}}{\|C^tB\|_{N^1,N^2}} \right|$$

Démonstration

Cette propriété est une conséquence directe du lemme suivant que l'on énonce sans démonstration :

Lemme :

Soit (E,M) un espace euclidien et F un sous ensemble de E tel que si $y \in F$ et $r \in \mathbb{R}$ alors l'élément ry appartient aussi à F .
Si étant donné $x \in E$ il existe $\bar{y} \in F$ tel que $\forall y \in F$

$$\|x-\bar{y}\|_M \leq \|x-y\|_M$$

alors $\forall y \in F$

$$\left|\frac{\langle x,\bar{y}\rangle}{\|\bar{y}\|}\right| \geq \left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|}\right| .$$

Notons F l'ensemble des matrices qui peuvent s'écrire sous la forme $C\,{}^tB$ où $(C,B) \in G_3 \times E_2$. D'une part il est facile de montrer que si $r \in \mathbb{R}$ et $y \in F$, ry appartient aussi à F et d'autre part la propriété 1' assure que si $y \in F$

$$\|X-C\,{}^tY\|_{N^1,N^2} \leq \|X-Y\|_{N^1,N^2}.$$

On est donc en mesure d'utiliser le lemme ci-dessus qui garantit la validité de la propriété 4'.

PROPRIETE 5'

La matrice C des η-composantes principales de la n-ACP de $(X,\mathbb{N}_i)$ constitue la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^1 \otimes N^2)$-euclidienne de X : elle réalise l'optimum de :

$$\min_{C\in G_3} \left(\min_{B\in O_1} \|X-C\,{}^tB\|_{N^1,N^2}\right) \qquad (66)$$

Démonstration

La propriété 1' affirme que (C,V) réalise le minimum de la quantité $\|X-C\,{}^tB\|_{N^1,N^2}$ sur l'ensemble $G_3 \times O_2$. Or $(C,V) \in G_1 \times O_1$ et

$$G_1 \times O_1 \subset G_3 \times O_1 \subset G_3 \times O_2$$

il résulte que (C,V) réalise le minimum de cette quantité sur $G_3 \times O_1$. C optimise donc (66).

PROPRIETE 6'

Si η est une bipartition ordonnée quelconque de $[n]$ la propriété d'optimalité 6 des composantes principales de l'ACP n'admet pas de contre partie dans le cadre de la n-ACP pour $n > 2$, même lorsque l'on se limite à l'ensemble G_1. Par contre

si η est de la forme $\eta = \{\eta_1, \{k\}\}$ la matrice des k-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ réalise sur G_3 le maximum de :

$$\langle X, N.\mathrm{Proj}_{<C>} X\rangle_{N1,N2} \cdot \qquad (67)$$

On se place d'abord dans le cadre général (η sans contraintes). On montre qu'alors les η-composantes principales de la n-ACP ne réalisent pas le maximum de (67) même dans G_1. On utilise pour cela un contre exemple dont les détails sont présentés dans l'annexe C2.

Les paramètres de ce contre exemple sont :

$$n=3$$
$$p_1=7 \quad , \quad p_2=4 \quad , \quad p_3=6$$
$$q_1=6 \quad , \quad q_2=2 \quad , \quad q_3=2$$
$$M_1=I \quad , \quad M_2=I \quad , \quad M_3=I$$
$$\eta_1=\{1\} \quad , \quad \eta_2=\{2,3\}$$

χ est le cube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i\in[3]}$ dont la 3-représentation matricielle est le tableau $\overset{3}{X}$ (voir annexe).

La 3-ACP de χ fournit comme solution les matrices :

$$U_1 \in O_{7,6} \ , \ U_2 \in O_{4,2} \quad \text{et} \quad U_3 \in O_{3,2}.$$

La matrice

$$\overset{\eta}{C} = \left(\underset{i\in\eta_1}{\otimes} M_i U_i {}^t U_i\right) \overset{\eta}{X} \left(\underset{i\in\eta_2}{\otimes} U_i\right) = U_1 {}^t U_1 \overset{\eta}{X} (U_2 \otimes U_3)$$

constitue la matrice des η-composantes principales de χ .
Ecrivons X et C au lieu de $\overset{\eta}{X}$ et $\overset{\eta}{C}$ et remplaçons C par C en (67).
On obtient :

$$\langle X, \mathrm{Proj}_{<C>} X\rangle = \mathrm{tr}({}^t X \, \mathrm{Proj}_{<C>} X) =$$

$$= \mathrm{tr}({}^t X C ({}^t C C)^{-1} {}^t C X) = \mathrm{tr}(C ({}^t C C)^{-1} C^t X {}^t X)$$

la matrice R, élément de $M_{\mathbb{R}}(12,12)$

$$R = C({}^tCC)^{-1}C X {}^tX$$

a pour trace :

$$tr(R) = \langle X, Proj_{\langle C \rangle} X \rangle = 17.288. \qquad (68)$$

Construisons maintenant à l'aide des matrices $A_1 \in O_{7,6}$, $A_2 \in O_{4,2}$ et $A_3 \in O_{3,2}$ présentées dans l'annexe les matrices C et S :

$$C = A_1 {}^tA_1 X (A_2 \otimes A_3)$$

$$S = C({}^tCC)^{-1}{}^tCX{}^tX.$$

On vérifie que $C \in M_{\mathbb{R}}(7,4)$ appartient à l'ensemble G_1 et que

$$tr(S) = \langle X, proj_{\langle C \rangle} X \rangle = 17.476 \qquad (69)$$

(68) et (69) montrent que C ne peut pas réaliser l'optimum de (67) même dans G_1.

Par contre, si les deux classes de η sont $\eta_1 = \{1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n\}$ et $\eta_2 = \{k\}$ on a :

PROPRIETE 6"

La matrice C des k-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ réalise l'optimum de

$$\max_{C \in G_3} \langle X, N^k . proj_{\langle C \rangle} X \rangle_{N^k, N_k} \qquad (70)$$

où X est la k-représentation matricielle de χ et $N^k = \bigotimes_k N_i$.

Démonstration

Soit pour tout $i \in [n]$ la matrice K_i telle que ${}^tK_iK_i = N_i$; et soit P_C la matrice du projecteur N^i-orthogonal sur l'espace engendré par les vecteurs colonnes de C : $P_C = N^k.\mathcal{P}roj_{<C>}$.

Notons $Y = X{}^tK_k$ et Y_i la ième colonne de Y. Soit alors

$$g(C) = \langle X, P_C X\rangle_{N^k,N_k} = tr({}^tXN^kP_CXN_k) =$$

$$= tr(K_k{}^tXN^kP_CX{}^tK_k) = tr({}^tYN^kP_CY) =$$

$$= \langle Y, P_C Y\rangle_{N^k,I} = \sum_{i=1}^{q_k} \langle Y_i, P_C Y_i\rangle_{N^k}.$$

Lorsque $\bar{C}$ est telle que $<C> \subset <\bar{C}>$ on vérifie que

$$\langle Y_i, P_C\ Y_i\rangle_{N^k} \leq \langle Y_i, P_{\bar{C}}\ Y_i\rangle_{N^k}$$

et donc

$$g(C) \leq g(\bar{C}).$$

Lorsque C n'est pas de plein rang on peut toujours construire une matrice $\bar{C}$ de plein rang de façon à ce que $<C> \subset <\bar{C}>$ et donc

$$g(C) \leq g(\bar{C}).$$

c'est-à-dire

$$\langle X, N^k.\mathcal{P}roj_{<C>}X\rangle_{N^k,N_k} \leq \langle X, N^k.\mathcal{P}roj_{<\bar{C}>}X\rangle_{N^k,N_k}$$

on ne perd donc pas en généralité en se limitant à optimiser (70) sur le sous ensemble G_3' de G_3 formé par les matrices C de plein rang. Si $C \in G_3'$, C est de la forme

$$C = (\underset{i\in n_1}{\boxtimes} A_i)H = A^kH$$

où les A_i ($i \neq k$) aussi bien que H sont de plein rang. On peut alors écrire :

$$\langle X,\ N^k.Proj_{\langle C\rangle}X\rangle_{N^k,N_k} = \langle X, C({}^tCN^kC)^{-1}{}^tC\ N^kX\rangle_{N^k,N_k} =$$

$$= tr({}^tXN^kA^kH({}^tH{}^tA^kN^kA^kH)^{-1}\ {}^tH^kA^kN\ XN_k\ ) \qquad (71)$$

Supposons toutes les A_i ($i \neq k$) fixes et cherchons $H \in M_{\mathbb{R}}(q^k,q_k)$ qui maximime (71). Soit $a_i \in O^{N_i}_{p_iq_i}$ telle que les colonnes de a_i constituent une base N_i-orthogonale de l'espace engendré par les colonnes de A_i :

$$\langle A_i\rangle = \langle a_i\rangle$$

On observe que

$$\langle A^kH\rangle \subset \langle A^k\rangle$$

donc

$$\langle A^kH\rangle \subset \langle a^k\rangle$$

ceci implique, étant donnée H de plein rang, qu'il existe une autre matrice H, elle aussi de plein rang telle que

$$A^kH = a^k\,H$$

par suite le maximum de (71) sur $M_{\mathbb{R}}(q^k,q_k)$ coïncide avec le maximum sur le sous ensemble $M_{\mathbb{R}^*}(q^k,q_k)$ de matrices de $M_{\mathbb{R}}(q^k,q_k)$ de plein rang. Si l'on note maintenant

$$Y = {}^ta^kN^kX{}^tK_k$$

l'optimum de (71) devient :

$$\max_{H\in M_{\mathbb{R}^*}(q^k,q_k)} tr({}^tYH({}^tHH)^{-1}{}^tHY) =$$

$$\max_{H\ \in\ M_{\mathbb{R}}{}^*(q^k,q_k)} tr(({}^tHH)^{-1}{}^tHY{}^tYH) \qquad (72)$$

D'après Rao [12;340] (cf. 8.6)l'optimum de (72) est atteint quand H est la matrice des composantes principales de l'ACP de Y : si

$$ {}^{t}YYw \equiv w\,\Delta \qquad (\ \Delta \text{ diagonale}) $$

H doit être alors :

$$ H = Yw. $$

On vérifie que la matrice $U = K_k^{-1}w$ est la matrice des plus grands vecteurs propres de $K_k^{-1}\,{}^{t}YYK_k$ qui est égale à ${}^{t}XN^{k}a^{k}t{}^{t}a^{k}N^{k}XN_k$. C'est-à-dire :

$$ ({}^{t}XN^{k}a^{k}t{}^{t}a^{k}N^{k}XN_k)U \equiv U\Delta \qquad (73) $$

La matrice H qui optimise (71) s'écrit alors :

$$ H = {}^{t}a^{k}N^{k}X\,{}^{t}K_k w = {}^{t}a^{k}N^{k}X\,{}^{t}K_k K_k K_k^{-1} w = $$

$$ H = {}^{t}a^{k}N^{k}XN_k U. $$

Remplaçons cette expression en (71) et supprimons les indices supérieurs afin d'alléger l'écriture. On obtient :

$$ tr({}^{t}XNa\,{}^{t}aNXN_k U({}^{t}UN_k\,{}^{t}XNa\,{}^{t}aNXN_k U)^{-1}\,{}^{t}UN_k\,XNa\,{}^{t}aNXN_k) $$

en utilisant (73) cette expresion se réduit à :

$$ tr(U\,\Delta({}^{t}UN_k U\Delta)^{-1}\Delta\,{}^{t}UN_k) = tr(\Delta) $$

car la matrice U est N_k-orthonormée.
L'identité (73) permet aussi d'écrire :

$$ tr({}^{t}UN_k\,{}^{t}XN^{k}a^{k}t{}^{t}a^{k}N^{k}XN_k U) = tr(\Delta) $$

mais, puisque $u = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une solution de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ on vérifie que

$$tr({}^tU N_k {}^t X N^k a^k t a^k N^k X N_k U) \leq tr({}^t U_k {}^t X U^k t U^k X U_k) = tr(\Lambda)$$

c'est-à-dire :

$$tr(\Delta) \leq tr(\Lambda)$$

d'où

$$\max_{C \in G_3} \langle X, N^k . Proj_{<C>} X \rangle N^k, N_k \leq tr(\Lambda). \qquad (75)$$

Considérons maintenant la matrice C des k-composantes principales :

$$C = (\underset{k}{\otimes} M_i U_i {}^t U_i) X U_k = M^k U^k t U^k X U_k$$

On vérifie que C appartient à G_3 et il résulte de (31) que

$$\langle X, N^k . Proj_{<C>} X \rangle_{N^k, N_k} = tr({}^t X N^k C ({}^t C N^k C)^{-1} {}^t C N^k X N_k) =$$

$$= tr({}^t X N^k M^k U^k \; {}^t U^k X U_k \Lambda_k^{-1} \; {}^t U_k \; {}^t X U_k \; {}^t U_k M^k N^k X N_k) =$$

$$= tr({}^t X U^k t U^k X U_k \Lambda_k^{-1} \; {}^t U_k \; {}^t X U_k \; {}^t U_k X N_k) = tr(\Lambda_k) = tr(\Lambda)$$

alors

$$\langle X, N^k . Proj_{<C>} X \rangle_{N^k, N_k} = tr(\Lambda).$$

L'expression (75) nous permet donc d'affirmer que la matrice C des k-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ réalise l'optimum de (70)

4.2.4 - Propriétés perdues par la n-ACP

Dans ce paragraphe on montre, par un même contre exemple, que les propriétés 7, 8, 9,10 et 11 de l'analyse en composantes principales ne sont pas vérifiées par les n-composantes principales d'une n-ACP ($n > 2$)

même lorsque l'on se restreint à des structures particulières de bipartition n . Les divers éléments de ce contre exemple sont présentés dans l'annexe C_3.

Les paramètres sont :

$$\begin{array}{lll} n=3 & & \\ p_1=4 \quad , & p_2=6 \quad , & p_3=5 \\ q_1=3 \quad , & q_2=4 \quad , & q_3=3 \\ M_1=I \quad , & M_2=I \quad , & M_3=I \end{array} \tag{76}$$

χ est le 3-cube de données associé à la famille $\{p_i\}_{i\in n}$ dont sa 2-représentation matricielle est le tableau $\overset{2}{X}$; et on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^6 \otimes \mathbb{R}^5$ repéré dans la base canonique.

On présente en annexe les matrices

$$U_1^* \in O_{4,3} \ , \quad U_2^* \in O_{6,4}, \quad U_3^* \in O_{5,3}$$

qui constituent l' approximation de TUCKER de la solution du problème P3 ainsi posé ; c'est-à-dire U_1^*, U_2^* et U_3^* sont les matrices des q_1,q_2 et q_3 plus grands vecteurs propres de $\overset{1}{X}\,{}^t\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}\,{}^t\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}\,{}^t\overset{3}{X}$. Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les matrices diagonales correspondantes des valeurs propres.

La 3-ACP de χ fournit comme solution les matrices $U_1 \in O_{4,3}$, $U_2 \in O_{6,4}$, $U_3 \in O_{5,3}$ et les matrices diagonales correspondantes Λ_1, Λ_2 et Λ_3.

La matrice des 2-composantes principales de cette 3-ACP est :

$$\overset{2}{C} = \left(\bigotimes_2 U_i \, {}^t U_i\right) \overset{2}{X} U_2 = (U_1 \, {}^t U_1 \otimes U_3 \, {}^t U_3) \overset{2}{X} U_2$$

On calcule :

$$\mathrm{tr}(\Lambda_1) = \mathrm{tr}(\Lambda_2) = \mathrm{tr}(\Lambda_3) = \|\overset{2}{C}\|^2 = \|\hat{x}\|^2 = 27.742$$

et on vérifie que

$$tr(\Lambda_1) = tr(\Lambda_2) = tr(\Lambda_3) < \min(tr(\Delta_1), tr(\Delta_2), tr(\Delta_3))$$

qui nous permet de constater que l'inégalité stricte peut être réalisée dans (40).

Les matrices A_1, A_2, A_3 qui définissent notre contre exemple, sont construites à partir d'une autre 3-ACP de χ. Les paramètres de cette 3-ACP sont les mêmes qu'auparavant sauf pour q_2 que l'on change en q_2+1, c'est-à-dire 4 en 5.

On obtient comme résultat de cette 3-ACP les matrices : $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$, $\bar{\Lambda}_1$, $\bar{\Lambda}_2$, $\bar{\Lambda}_3$; et l'on constate que

$$tr(\bar{\Lambda}_1) = tr(\bar{\Lambda}_2) = tr(\bar{\Lambda}_3) = 29.301 > 27.742$$

(résultat qu'on devait attendre car $q_2+1 > q_2$).

Les matrices A_1, A_2et A_3 sont :

$A_1 = \bar{U}_1$, $A_3 = \bar{U}_3$, et A_2 la matrice formée par les $q_2=4$ premières colonnes de $\bar{U}_2$. Naturellement chaque colonne de A_2 est un vecteur propre de la matrice ${}^t\chi(\underset{2}{\overset{2}{\otimes}} A_i {}^tA_i)\chi$, puisque $A_1 \in O_{4,3}$, $A_2 \in O_{6,4}$ et $A_3 \in O_{5,3}$

la matrice

$$\bar{C} = (\underset{2}{\overset{2}{\otimes}} A_i {}^tA_i)\chi A_2$$

appartient donc à l'ensemble G_1.

On constate que $a = (A_1, A_2, A_3)$ est différente de $u = (U_1, U_2, U_3)$ car

$$A_1 \neq U_1, \quad A_2 \neq U_2, \quad A_3 \neq U_3.$$

Pour que a soit une autre solution de P3 (avec $q_2=4$), d'après (III.59) la quantité $\mathrm{tr}({}^tA_2\,{}^t\overset{2}{X}\,(\underset{2}{\oplus} A_i\,{}^tA_i)\,\overset{2}{X}\,A_2)$ doit aussi être égale à 27.742. Or, cette trace, égale à la somme des 4 premières valeurs propres de $\bar{\Lambda}_2$, ne vaut ici que 27.612 on déduit que $a = (A_1,A_2,A_3)$ n'est pas une solution du problème P3.

Dans ce qui suit on considère la bipartition ordonnée η où $\eta_2 = \{2\}$. Puisque l'on ne risque pas d'ambiguités on écrit X et C au lieu de $\overset{2}{X}$ et $\overset{2}{C}$.

PROPRIETE 7'

La matrice des η-composantes principales de la n-ACP ($n > 2$) de $(\chi,\underset{i}{\oplus}N_i)$ ne réalise même pas sur G_1 l'optimum de :

$$\max_{C\in G_1} \|{}^t\chi N^1 C\|_{N^2,I}$$

Pour démontrer ceci il suffit de vérifier dans le contre exemple considéré que :

$$\|{}^t\chi\, C\| < \|{}^t\chi\bar{C}\|$$

En effet :

$$\|{}^t\chi C\|^2 = \mathrm{tr}({}^tC\chi{}^t\chi C) = \mathrm{tr}({}^tU_2\,{}^t\chi(\underset{2}{\oplus}U_i\;{}^tU_i)\chi{}^t\chi(\underset{2}{\oplus}U_i\;{}^tU_i)\chi U_2) \qquad (77)$$

mais

$${}^t\chi(\underset{k}{\oplus}U_i\;{}^tU_i)\;\chi\;U_k \equiv U_k\Lambda_k$$

alors (77) se réduit à :

$$\mathrm{tr}(\Lambda_2 U_2\,{}^tU_2\Lambda_2) = \mathrm{tr}(\Lambda_2)^2$$

c'est-à-dire

$$\|{}^t\chi C\|^2 = \mathrm{tr}(\Lambda_2)^2 = 212.339.$$

(la matrice $(\Lambda_2)^2$ est aussi montrée en annexe).
D'autre part :

$$\| {}^tX\bar{C}\|^2 = tr({}^t\bar{C}X{}^tX\,\bar{C}) = tr({}^tA_2{}^tX(\underset{2}{\oplus} A_i\,{}^tA_i)X{}^tX(\underset{2}{\oplus} A_i\,{}^tA_i)XA_2) \tag{78}$$

qui se réduit à la somme des carrés de tous les éléments de la diagonale de $\bar{\Lambda}_2$ exempté le dernier car chaque colonne de A_2 est vecteur propre de ${}^tX(\underset{2}{\oplus} A_i\,{}^tA_i)X$. Cette somme qui vaut

$$\sum_{i=1}^{q_2} (\bar{\Lambda}_2)^2_{ii} = 213.681$$

montrer le résultat cherché :

$$\| {}^tXC\| < \| {}^tX\bar{C}\|$$

PROPRIETE 8'

La matrice des n-composantes principales de la n-ACP ($n > 2$) de $(X, \oplus N_i)$ ne réalise pas l'optimum de

$$\max_{C\in G_1} \|XN^2\,{}^tX - C\,{}^tC\|_{N^1,N^1}.$$

Pour démontrer ceci il suffit de constater dans le contre exemple que :

$$\|X{}^tX - C{}^tC\| > \|X{}^tX - \bar{C}{}^t\bar{C}\|.$$

On présente en annexe les matrices $X{}^tX$, $C{}^tC$ et $\bar{C}{}^t\bar{C}$ sur lesquelles on peut constater en effet que:

$$118.870 = \|X{}^tX - C{}^tC\| > \|X{}^tX - \bar{C}{}^t\bar{C}\| = 117.528.$$

On peut donc dire qu'il est en général possible de trouver une matrice $C \in G_1$ telle que la matrice des produits scalaires entre lignes de C permet d mieux approcher la matrice des N^2-produits scalaires entre lignes de X que ne le fait la matrice des produits scalaires entre lignes de C .

PROPRIETE 9'

Les matrices C et V issues de la n-ACP (n > 2) de $(\chi, \mathbb{N}_i)$ (cf. page 148) ne réalisent même pas sur $G_1 \times O_1$ l'optimum de :

$$\min_{(C,B) \in O_1 \times G_1} \| {}^t(X-C{}^tB)N^1(X-C{}^tB)\|_{N^2,N^2}.$$

On montre ceci en constatant que dans le contre exemple présenté

$$\| {}^t(X-C{}^tU_2)(X-C{}^tU_2)\| > \| {}^t(X-C{}^tA_2)(X-C{}^tA_2)\|. \qquad (79)$$

Soient R, $\bar{R}$, Λ_R et $\Lambda_{\bar{R}}$ les matrices (montrées en annexe) :

$$R = {}^t(X-C{}^tU_2)(X-C{}^tU_2)$$

$$\bar{R} = {}^t(X-\bar{C}{}^tA_2)(X-\bar{C}{}^tA_2) \qquad (80)$$

et Λ_R et $\Lambda_{\bar{R}}$ les matrices diagonales de leurs valeurs propres. Puisque R et $\bar{R}$ sont symétriques on a :

$$\|R\|^2 = \mathrm{tr}(\Lambda_R)^2 \quad \text{et} \quad \|\bar{R}\|^2 = \mathrm{tr}(\Lambda_{\bar{R}})^2$$

les matrices $(\Lambda_R)^2$ et $(\Lambda_{\bar{R}})^2$ données en annexe vérifient :

$$33.596 = \|R\|^2 > \|\bar{R}\|^2 = 32.522$$

ce qui confirme (79).

PROPRIETE 10'

Il n'est pas vrai que pour tout $i \leq q^2$ la matrice $\overset{\eta}{C}$ des η-composantes principales de $(\chi, \mathbb{N}_i)$ réalise l'optimum de :

$$\max_{C \in G_1} \lambda_i({}^tCC).$$

On montre ceci en présentant dans notre contre exemple un indice i pour lequel

$$\lambda_i(C\,{}^tC) < \lambda_i(\bar{C}\,{}^t\bar{C})$$

Soient S et $\bar{S}$ les matrices :

$$S = {}^tCC = {}^tU_2\ {}^t\chi(\mathbb{Q}^2 U_i\ {}^tU_i)\chi U_2$$

$$\bar{S} = {}^t\bar{C}\bar{C} = {}^tA_2\ {}^t\chi(\mathbb{Q}^2 A_i\ {}^tA_i)\chi\ A_2$$

les définitions de u et a assurent que $S = \Lambda_2$ et $\bar{S}$ est la matrice diagonale des $q_2 = 4$ premiers éléments de la diagonale de $\bar{\Lambda}_2$. Pour tout $i \leq q_2$ on a donc :

$$\lambda_i({}^tCC) = \lambda_i(\Lambda_2) = (\Lambda_2)_{ii}$$

$$\lambda_i({}^t\bar{C}\bar{C}) = \lambda_i(\bar{\Lambda}_2) = (\bar{\Lambda}_2)_{ii}$$

si l'on choisit i=2 on vérifie que :

$$8.105 = (\Lambda_2)_{22} < (\bar{\Lambda}_2)_{22} = 8.516$$

C'est-à-dire :

$$\lambda_2({}^tCC) < \lambda_2({}^t\bar{C}\bar{C}).$$

PROPRIETE 11'

Il n'est pas vrai que le couple (C,V) issu de la n-ACP (n > 2) de $(\chi, \mathbb{N}_i)$ réalise pour tout $i \leq q^2$ l'optimum de :

$$\min_{(C,B)\in G_1\times O_1} \lambda_i({}^t(X-C\,{}^tB)N^1(X-C\,{}^tB)N^2)$$

Les matrices R, $\bar{R}$, Λ_R et $\Lambda_{\bar{R}}$ définies en (80) vérifient :

$$\lambda_i(R) = \lambda_i(\Lambda_R) = (\Lambda_R)_{ii}$$

$$\lambda_i(\bar{R}) = \lambda_i(\Lambda_{\bar{R}}) = (\Lambda_{\bar{R}})_{ii}$$

On montre en annexe que pour i = 1

$$(\Lambda_R)_{11} = 4.033 \text{ et } (\Lambda_{\bar{R}})_{11} = 3.813$$

ce qui prouve que

$$\lambda_i(R) > \lambda_i(\bar{R})$$

et que la propriété 11 de l'Analyse en Composantes Principales n'a pas non plus de contre partie dans le cadre de la n-ACP.

Esteban Polit Une n-ACP d'un hypercube de Donnees

CHAPITRE V - INTERPRETATION DES SORTIES DE LA n-ACP

Etant donné le n-hypercube de données χ dont le $i^{ème}$ mode a p_i éléments la n-ACP de χ consiste à chercher la forme n-linéaire $\hat{x}$ de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}$ la plus proche de la forme n-linéaire x qu'on associe au cube χ. La procédure développée au chapitre III choisit $\hat{x}$ comme une extension canonique d'une forme n-linéaire h définie sur un ensemble de la forme $\underset{i=1}{\overset{n}{X}} F_i$, où F_i est un espace vectoriel de dimension q_i. Les données d'une n-ACP sont l'hypercube de données χ , la famille d'entiers $\{q_i\}$ et les n matrices symétriques définies positives servant à définir les métriques sur les différents espaces. Les produits de l'analyse sont donc la forme n-linéaire h et les espaces F_i. La forme h est déterminée par son cube des données associé, qu'on appelle cube central, et les espaces F_i sont définis par les colonnes des matrices orthonormées U_i. On construit $\hat{x}$ à partir de h et des U_i.

La première partie de ce chapitre a pour but d'interpréter d'une façon plus précise le cube central et les matrices U_i. Elle passe par l'introduction du concept d'élément idéal d'un mode. On montre que la forme n-linéaire $\hat{x}$ est complètement déterminée par la connaissance des éléments idéaux. Le nombre d'éléments idéaux du mode i est q_i ($q_i \leq p_i$). Les entrées du cube central sont les valeurs prises par $\hat{x}$ (ou bien par h) sur les éléments idéaux. On peut dire que les éléments idéaux permettent de condenser l'information contenue dans le cube , qui contient $p = \prod_{i=1}^{n} p_i$ réels, en un cube plus petit h constitué par $q = \prod_{j=1}^{n} q_i$ réels, les éléments idéaux jouent le rôle joué par les composantes principales (variables latentes) en Analyse en Composantes Principales : quand on a affaire à un tableau X à n lignes et p colonnes où chaque ligne contient de l'information concernant chacun des n objets ou individus, on considère souvent que chaque colonne de X représente un caractère ou une variable et que le terme x_{ij} de X est la valeur prise par la $j^{ème}$ variable sur l'individu i. Ainsi X est assimilé à un tableau

CHAPITRE V - INTERPRETATION DES SORTIES DE LA n-ACP

Etant donné le n-hypercube de données χ dont le $i^{ème}$ mode a p_i éléments la n-ACP de χ consiste à chercher la forme n-linéaire $\hat{x}$ de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}$ la plus proche de la forme n-linéaire x qu'on associe au cube χ. La procédure développée au chapitre III choisit $\hat{x}$ comme une extension canonique d'une forme n-linéaire h définie sur un ensemble de la forme $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} F_i$, où F_i est un espace vectoriel de dimension q_i. Les données d'une n-ACP sont l'hypercube de données χ , la famille d'entiers $\{q_i\}$ et les n matrices symétriques définies positives servant à définir les métriques sur les différents espaces. Les produits de l'analyse sont donc la forme n-linéaire h et les espaces F_i. La forme h est déterminée par son cube des données associé, qu'on appelle cube central, et les espaces F_i sont définis par les colonnes des matrices orthonormées U_i. On construit $\hat{x}$ à partir de h et des U_i.

La première partie de ce chapitre a pour but d'interpréter d'une façon plus précise le cube central et les matrices U_i. Elle passe par l'introduction du concept d'élément idéal d'un mode. On montre que la forme n-linéaire $\hat{x}$ est complètement déterminée par la connaissance des éléments idéaux. Le nombre d'éléments idéaux du mode i est q_i ($q_i \leq p_i$). Les entrées du cube central sont les valeurs prises par $\hat{x}$ (ou bien par h) sur les éléments idéaux. On peut dire que les éléments idéaux permettent de condenser l'information contenue dans le cube , qui contient $p = \prod_{i=1}^{n} p_i$ réels, en un cube plus petit h constitué par $q = \prod_{j=1}^{n} q_i$ réels, les éléments idéaux jouent le rôle joué par les composantes principales (variables latentes) en Analyse en Composantes Principales : quand on a affaire à un tableau X à n lignes et p colonnes où chaque ligne contient de l'information concernant chacun des n objets ou individus, on considère souvent que chaque colonne de X représente un caractère ou une variable et que le terme x_{ij} de X est la valeur prise par la $j^{ème}$ variable sur l'individu i. Ainsi X est assimilé à un tableau

"individus-variables". Il est traditionnel de se demander si les p variables observées peuvent être reconstituées à partir d'un nombre plus petit r de variables de base que l'on appelle parfois variables latentes ou variables idéales. Lorsque tel est le cas, on dit que les r variables latentes suffisent à expliquer le phénomène étudié. Si la reconstitution exacte n'est pas possible on détermine les r variables de base qui permettent une reconstitution approchée optimale des p variables originales par des combinaisons linéaires. La $j^{ème}$ composante principale est la matrice unicolonne contenant les valeurs prises par tous les individus sur la $j^{ème}$ variable idéale.

Au chapitre IV nous avons défini les matrices $\overset{n}{C}$ des n-composantes principales d'une n-ACP. Nous avons montré alors qu'elles généralisent la matrice des composantes principales de l'ACP et vérifient quelques unes de ses propriétés d'optimalité. Au paragraphe 5.3 de ce chapitre on montre que la matrice $\overset{n}{C}$ s'interprète de façon similaire aux composantes principales de l'ACP : elle fournit en colonne les valeurs prises, d'aprèx $\hat{x}$, par "un ensemble de variables idéales sur l'ensemble d'individus réels".

Il est clair que chaque élément d'un mode du cube χ définit une section du cube. La section associée au $i^{ème}$ élément du mode k correspond à la $i^{ème}$ colonne de la k-représentation matricielle de χ : $(\overset{k}{X})_j$. Appelons pour l'instant "individus" les éléments du mode k. A chaque individu correspond donc une colonne de $\overset{k}{X}$, et par conséquence, un vecteur de $\mathbb{R}^{pk}$ qu'on désigne comme l'espace des individus et que l'on note E^k. La $j^{ème}$ colonne de $\overset{k}{X}$ fournit les valeurs observées prises par l'individu j. De même, la $j^{ème}$ colonne de $\overset{k}{\hat{X}}$ donne les valeurs calculées ou prédites pour l'individu j, et les colonnes de $\overset{k}{C}$ donnent les valeurs assignées aux individus idéaux par la forme n-linéaire $\hat{x}$. Le paragraphe 5.4 présente l'étude des individus réels, calculés et idéaux de l'espace E^k. Un individu est bien représenté dans l'analyse si les valeurs réelles et prédites qui se correspondent, sont proches l'une de l'autre. On propose des coefficients permettant de mesurer

la qualité de la représentation d'un individu réel, et la contribution de chaque individu idéal à cette représentation. On montre comment obtenir une représentation graphique des individus appartenant à E^k de façon à pouvoir juger de leurs proximités. Finalement on considère que les lignes de la matrice $\overset{k}{X}$ définissent des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension p_k qu'on appelle l'espace des conditions. On utilise la matrice $\overset{k}{C}$ des k-composantes principales pour construire une représentation cartésienne de cet espace. Naturellement ces représentations cartésiennes sont approchées et l'on étudie alors leurs qualités.

Au paragraphe 5.6 on définit le concept de "meilleure représentation cartésienne d'un nuage de points". Il nous permet de montrer que les représentations graphiques construites dans les paragraphes précédents ne sont pas en général optimales ; mais, que si $\hat{x}$ se trouve assez proche de x elles ne peuvent être mauvaises et si certaines conditions sont remplies elles sont optimales dans un sens moins large.

Au paragraphe 5.4 et 5.5 on traite, on l'a déjà dit, le problème de la représentation des colonnes et lignes de la matrice $\overset{k}{X}$; dans le dernier paragraphe de ce chapitre, le 5.7, on traite le problème de la représentation graphique des lignes et colonnes de la matrice $\overset{n}{X}$. Nous montrons d'abord que la meilleure représentation cartésienne des lignes de $\overset{n}{X}$ est fournie par les lignes de la matrice $\overset{n}{C}$ des composantes principales de $\overset{n}{X}$, puis on propose la construction de deux représentations approchées. Bien que moins bonnes que celle définie par $\overset{n}{C}$ elles ont l'avantage de se calculer d'une façon peu coûteuse à partir des sorties de la n-ACP. La première utilise les lignes de la matrice $\overset{n}{C}$ des n-composantes principales de la n-ACP de χ , et la seconde réalise l'ACP du tableau $\overset{8}{X}$.

5.1 - UNE INTERPRETATION DES MATRICES U_i. LES ELEMENTS IDEAUX

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles constitués chacun de p_i éléments. Notons ξ_j^i au $j^{ème}$ élément de l'ensemble E_i. Soit χ une fonction de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans $\mathbb{R}$; appelons $x_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ l'image de l'élément $(\xi^1_{j_1}, \xi^2_{j_2}, \ldots, \xi^n_{j_n})$ par χ :

$$\chi : xE_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi^1_{j_1}, \ldots, \xi^n_{j_n}) \longrightarrow x_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

On dit que $x_{j_1 \ldots j_n}$ est la valeur prise par χ chez les éléments $\xi^1_{j_1}, \xi^2_{j_2}, \ldots, \xi^n_{j_n}$.

L'application χ définit un n-hypercube de données qu'on note aussi χ :

$$\chi : x[p_i] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n) \to x_{j_1 j_2 \ldots j_n}.$$

On décide de considérer que les éléments de l'ensemble E_i constituent une base d'un espace vectoriel E_i de dimension p_i, ce qui veut dire en outre, qu'il est licite de parler des combinaisons linéaires des éléments $\xi^i_1, \xi^i_2, \ldots, \xi^i_{p_i}$. Nous appellerons ξ^i à la base de E_i constituée par les éléments de E_i ($\xi^i = E_i$) et nous disons que E_i constitue le $i^{ème}$ mode de l'hypercube de données.

On décide de considérer de plus que les quantités $x_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ sont les valeurs prises sur les éléments $(\xi^1_{j_1}, \xi^2_{j_2}, \ldots, \xi^n_{j_n})$ par une forme n-linéaire x définie sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$:

$$x : xE_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi^1_{j_1}, \ldots, \xi^n_{j_n}) \to x_{j_1 j_2 \ldots j_n} .$$

L'espace vectoriel $L_n(xE_i;\mathbb{R})$ des formes n-linéaires sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est muni du produit scalaire N, dont la matrice N par rapport à la base $\xi = \otimes\xi^i$ s'écrit $N = \otimes N_i$, où N_i est une matrice symétrique définie positive d'ordre p_i.

Si $\{q_i\}_{i\in n}$ est une famille d'entiers positifs telle que $p_i \leq q_i$ la n-ACP $\{q_i\}$-dimensionnelle de $(\chi,\otimes N_i)$ nous permet de trouver la forme n-linéaire de rang $\{q_i\}$ plus proche de x au sens de la métrique N. On la note $\hat{x}$ et on l'appelle la forme n-linéaire calculée, projetée ou bien prédite. Pour chaque $i \in [n]$ la n-ACP de $(\chi,\otimes N_i)$ fournit au travers des colonnes de la matrice U_i un ensemble ζ^i de q_i vecteurs N_i^{-1}-orthonormés de E_i. Notons $M_i = N_i^{-1}$, et désignons par F_i le sous espace de E_i engendré par les vecteurs $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \ldots, \zeta_{q_i}^i$ de ζ^i, $\hat{x}$ est alors l'extension canonique d'une forme n-linéaire h définie sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$. C'est-à-dire qu'il existe $h \in \otimes F_i^*$ telle que

$$\hat{x}(a_1,a_2,\ldots,a_n) = h(P_1(a_1),\ldots,P_n(a_n)) \qquad (1)$$

où a_i désigne un élément de E_i, et P_i désigne le projecteur M_i-orthogonal sur F_i.

Puisque ζ^i est une base de F_i la forme n-linéaire h est parfaitement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur tous les n-uples du produit cartésien $x\zeta^i$, qui sont d'ailleurs, les coordonnées de h dans la base $\otimes\zeta^i$ de $\otimes F_i$.

Les colonnes des matrices U_i constituent donc les coordonnées des vecteurs de ζ^i dans la base ξ^i de E_i ; et l'hypercube central h fournit les valeurs prises par la forme n-linéaire h sur les diverses combinaisons d'éléments des ζ^i :

$$h(\zeta_{k_1}^1, \zeta_{k_2}^2, \ldots, \zeta_{k_n}^n) = h_{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

D'après (1)

$$\hat{x}(\zeta^1_{k_1}, \zeta^2_{k_2}, \ldots, \zeta^n_{k_n}) = h_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

La forme $\hat{x}$ est complètement déterminée par la connaissance des vecteurs $\zeta^i_{k_i}$ ($i \in n$, $k_i \in p_i$) car on l'a vu, le cube central h est une fonction des U_i :

$$\underline{h} = (\otimes\, {}^t U_i)\underline{x}$$

$$\underline{\hat{x}} = (\otimes M_i U_i)\underline{h}$$

où $\underline{x}$ est la matrice unicolonne des coordonnées de x dans la base ξ; et $\underline{h}$ et $\underline{\hat{x}}$ sont les matrices unicolonnes représentant h et $\hat{x}$ dans les bases respectives ζ et ξ de $\otimes F_i$ et $\otimes E_i$.

Puisque les ensembles ζ^i nous permettent de construire la meilleure approximation $\hat{x}$ de x nous dirons que les éléments de ζ^i sont les éléments idéaux du $i^{ème}$ mode de χ . Selon la définition du paragraphe 3.4 ζ^i constitue un ensemble générateur minimal du $i^{ème}$ mode.

Définition

Les éléments de l'ensemble E_i sont appelés les éléments réels du $i^{ème}$ mode de χ. $\xi^i_{j_i}$ est le $j_i$ème élément réel du $i^{ème}$ mode.

Définition

On appelle élément fictif du $i^{ème}$ mode tout vecteur de l'espace E_i qui n'appartient pas à l'ensemble E_i.

Définition

On appelle élément idéal du $i^{ème}$ mode de χ tout vecteur de l'ensemble ζ^i.

$\zeta^i_{k_i}$ est dit le $k_i$ème élément idéal du mode i.

Naturellement les éléments fictifs et donc aussi les éléments idéaux sont des combinaisons linéaires des éléments réels (du mode correspondant) car ces derniers constituent des bases des E_i. Les colonnes des matrices U_i définissent les coefficients des combinaisons linéaires associées aux éléments idéaux ; elles fournissent les coordonnées des éléments idéaux dans la base de E_i formée par les éléments réels .

On doit remarquer que la proposition réciproque est fausse : rien ne permet d'affirmer que les éléments réels sont des combinaisons linéaires des éléments idéaux.

5.2 - UNE INTERPRETATION DU CUBE CENTRAL

Soient $\eta = \{n_1, n_2\}$ une bipartition ordonnée de $[n]$, σ la permutation associée et H_η la η-représentation matricielle du n-hypercube de données h. La matrice H possède alors une ligne pour chaque élément du produit cartésien $\zeta^{\sigma(1)} \times \zeta^{\sigma(2)} \times \ldots \times \zeta^{\sigma(n_1)}$ et une colonne pour chaque élément du produit cartésien $\zeta^{\sigma(n_1+1)} \times \ldots \times \zeta^{\sigma(n)}$. Nous dirons que H donne les valeurs prises par les éléments idéaux des modes $\sigma(n_1+1)$, $\sigma(n_1+2), \ldots, \sigma(n)$ dans les conditions définies par les éléments idéaux des modes $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)$:

Exemple

Soit χ le 3-hypercube de données décrit en 1.1. Le premier mode est constitué par 10 individus, le deuxième par 5 épreuves et le troisième par 4 juges. x_{ijk} est la note donnée au $i^{ème}$ individu par le $k^{ème}$ juge dans la $j^{ème}$ épreuve d'une compétition.

Soient $q_1=3$, $q_2=2$, $q_3=2$. La n-ACP de χ fournit la forme $\hat{x}$ appartenant à $L_n(xE_i;\mathbb{R})$ de rang inférieure ou égale à $\{q_i\}_{i\in n}$ la plus proche de x. Elle fournit aussi 3 individus idéaux, 2 épreuves idéales et 2 juges idéaux.

Le terme générique h_{pqr} ($p \in [3]$, $q \in [2]$, $r \in [2]$) du cube central est la note qui, d'après $\hat{x}$, devrait donner le $r^{ème}$ juge idéal au $p^{ème}$ individu idéal dans la $q^{ème}$ épreuve idéale : le cube central est un abrégé des valeurs correspondantes aux diverses combinaisons des éléments idéaux de tous les modes. Si $\eta = \{\{2,3\},\{1\}\}$ la matrice $\overset{\eta}{H}_I$ ($=H$) associe une colonne à chaque individu idéal et une ligne à chaque couple formé d'une épreuve idéale et d'un juge idéal. Elle est formée de 4 lignes et 2 colonnes. On dit que $\overset{\eta}{H}$ donne en colonne les notes obtenues par les individus idéaux dans des conditions idéales.

Au moment de l'interprétation des sorties d'une n-ACP il se peut qu'on ne puisse pas accorder une signification aux individus idéaux d'un mode. On arrive souvent à des situations analogues quand on interprète les composantes principales issues de l'ACP d'un tableau "variables-individus" : il n'est pas possible de donner un libellé à certaines composantes et parfois on se borne à dire tout simplement qu'une composante est une combinaison des variables dont certaines ont un poids plus important que les autres. Quand tel est le cas pour les éléments idéaux d'un mode, l'interprétation du cube central comme un abrégé des rapports entre les éléments idéaux devient complexe et difficile à manipuler. Par contre si ces éléments peuvent être bien caractérisés l'interprétation du cube central devient plus claire et elle peut apporter des résultats intéressants à la connaissance du phénomène étudié.

Revenons à notre exemple pour essayer de déterminer maintenant quelle est la note qui devrait recevoir un individu idéal dans des conditions réelles. On se demande par exemple quelle note devrait assigner le $k^{ème}$ juge réel au $q^{ème}$ individu idéal dans la $j^{ème}$ épreuve réelle, si bien entendu, le $q^{ème}$ individu idéal existait.

5.3 - UNE INTERPRETATION DE LA MATRICE DES η-COMPOSANTES PRINCIPALES

On s'intéresse à déterminer la valeur qui prend la forme n-linéaire $\hat{x}$ sur l'élément $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de xE_i quand certains des a_i sont des éléments réels et les autres des éléments idéaux des espaces E_i correspondants.

Soit η une bipartition de $[n]$. Pour chaque $k \in [n]$ choisissons un entier i_k appartenant à $[p_k]$ si $k \in \eta_1$ et à $[q_k]$ si $k \in \eta_2$. Appelons $\rho^k_{i_k}$ le $i_k$ème élément réel du mode k si $k \in \eta_1$, et le $i_k$ème élément idéal si $k \in \eta_2$;

$$\rho^k_{i_k} = \begin{cases} \xi^k_{i_k} & \text{si} \quad k \in \eta_1 \\ \zeta^k_{i_k} & \text{si} \quad k \in \eta_2 \end{cases}$$

Nous nous proposons de calculer la valeur de $\hat{x}(\rho^1_{i_1},\rho^2_{i_2},\ldots,\rho^n_{i_n})$.

D'abord faisons de η une bipartition ordonnée en dotant chaque classe d'un ordre total. Soient $n_1 = \text{card}(\eta_1)$, $n_2 = \text{card}(\eta_2)$ et σ la permutation de $[n]$ qui définit avec l'entier n_1 la bipartition ordonnée η. Appelons C_1 et C_2 les produits cartésiens

$$C_1 = \xi^{\sigma(1)} \times \xi^{\sigma(2)} \times \ldots \times \xi^{\sigma(n_1)}$$

$$C_2 = \zeta^{\sigma(n_1+1)} \times \ldots \times \zeta^{\sigma(n)}.$$

Les éléments de C_1 sont des n_1-uples d'éléments réels tandis que les éléments de C_2 sont de n_2-uples d'éléments idéaux. On remarque que

$$\text{card}(C_1) = p^1 \quad \text{et} \quad \text{card}(C_2) = q^2.$$

On sait que $\hat{x}$ appartient au sous espace $<\{F_i\}>$ (où $F_i = <U_i>_{\xi i}$) et que les coordonnées de $\hat{x}$ dans la base ξ de $<\{F_i\}>$ sont les entrées de l'hypercube central h :

$$\hat{x} = \sum_{j_1=1}^{q_1} \sum_{j_2=1}^{q_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} h_{j_1 j_2 \cdots j_n} \hat{\xi}^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} h_{j_1 \cdots j_n} \left(\bigotimes_{k=1}^{n} \hat{\xi}_k^{j_k} \right) \qquad (2)$$

$\overset{n}{H}$, la n-représentation matricielle du cube central h, est une matrice qui compte une ligne pour chaque élément du produit cartésien $\zeta^{\sigma(1)} \times \zeta^{\sigma(2)} \times \ldots \times \zeta^{\sigma(n_1)}$ et une colonne pour chaque élément de C_2. L'élément générique de $\overset{n}{H}$ est :

$$\overset{n}{H}{}^{j_{\sigma(1)} j_{\sigma(2)} \cdots j_{\sigma(n_1)}}_{j_{\sigma(n_1+1)} \cdots j_{\sigma(n)}} = h_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

où naturellement $j_{\sigma(k)} \in [q_{\sigma(k)}]$.

D'après (2)

$$\hat{x}\,(\rho^1_{i_1}, \rho^2_{i_2}, \ldots, \rho^n_{i_n}) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_n} h_{j_1 j_2 \cdots j_n} \prod_{k=1}^{n} \hat{\xi}_k^{j_k}(\rho^k_{i_k}) \qquad (3)$$

mais on sait par (III.11) que

$$\hat{\xi}_k^{j_k}(\rho^k_{i_k}) = \begin{cases} (M_k U_k)^{i_k}_{j_k} & \text{si} \quad k \in n_1 \\ \delta^{i_k}_{j_k} & \text{si} \quad k \in n_2 \end{cases}$$

Alors (3) s'écrit :

$$\hat{x}(\rho^1_{i_1}, \ldots, \rho^n_{i_n}) = \sum_{j_{\sigma(1)}}^{q_{\sigma(1)}} \cdots \sum_{j_{\sigma(n_1)}}^{q_{\sigma(n_1)}} \overset{n}{H}{}^{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(n_1)}}_{i_{\sigma(n_1+1)} \ldots i_{\sigma(n)}} \prod_{\ell=1}^{n_1} [M_{\sigma(\ell)} U_{\sigma(\ell)}]^{i_{\sigma(\ell)}}_{j_{\sigma(\ell)}}$$

$$= \sum_{j_{\sigma(1)}} \cdots \sum_{j_{\sigma(n_1)}} \overset{n}{H}{}^{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(n_1)}}_{i_{\sigma(n_1+1)} \ldots i_{\sigma(n)}} \left[\bigotimes_{\ell=1}^{n_1} M_{\sigma(\ell)} U_{\sigma(\ell)} \right]^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(n_1)}}_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(n_1)}} =$$

$$= \left[\left(\bigotimes_{i \in n_1} M_i U_i \right) \overset{n}{H} \right]^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(n_1)}}_{i_{\sigma(n_1+1)} \cdots i_{\sigma(n)}} .$$

Par (IV,25) on obtient finalement :

$$\hat{x}(\rho^{1}_{i_1},\rho^{2}_{i_2},\ldots,\rho^{n}_{i_n}) = \overset{\eta}{C}{}^{\,i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n_1)}}_{\,i_{\sigma(n_1+1)}\cdots i_{\sigma(n)}} \qquad (4)$$

Cette expression montre que la matrice $\overset{\eta}{C}$ fournit la valeur prise par $\hat{x}$ dans chaque n_2-uple d'éléments idéaux appartenant à C_2 et chaque n_1-uple d'éléments réels appartenant à C_1. On dit que $\overset{\eta}{C}$ donne en colonne les valeurs que $\hat{x}$ attribue aux éléments idéaux de C_2 dans les conditions réelles définies par les éléments de C_1.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, si $\eta = \{\{2,3\},\{1\}\}$, la matrice $\overset{\eta}{C}$ des η-composantes principales (qui coïncide avec $\overset{1}{C}$) donne en colonne les notes que les individus idéaux devraient recevoir de chaque juge réel dans chaque épreuve réelle. $\overset{\eta}{C}{}^{3,1}_{2}$ est donc la note qui devrait être attribuée au second individu idéal dans la troisième épreuve par le premier juge. Si $\eta = \{\{3\},\{2,1\}\}$ alors le réel $\overset{\eta}{C}{}^{4}_{1,2}$ est la note qui devrait donner le quatrième juge réel dans la première épreuve idéal au second invididu idéal.

En résumé, les entrées des matrices des η-composantes principales sont les valeurs prises par la forme n-linéaire $\hat{x}$ sur les diverses combinaisons possibles d'éléments réels et idéaux des espaces E_i.

5.4 - LES ESPACES E^k et F^k DES INDIVIDUS

5.4.1 - La représentation cartésienne

L'ensemble ς^i des éléments idéaux du ième mode de χ engendre le sous espace vectoriel F_i de E_i. Les coordonnées de ces éléments par rapport à la base ξ^i de E_i sont consignées dans les colonnes de la matrice U_i. Si P_i est le projecteur M_i-orthogonal sur le sous espace F_i la matrice de P_i par rapport aux bases ξ^i et ς^i est :

$$P_i = {}^{t}U_i M_i$$

Alors, les colonnes de la matrice ${}^tU_iM_iI$ ($={}^tU_iM_i$) donnent les coordonnées des projections des individus réels (du mode i) associées à la base de F_i constituée par les éléments idéaux. Puisque cette base est M_i-orthonormée on peut faire une représentation cartésienne (axes orthogonaux, vecteurs directeurs à la distance 1 de l'origine) en associant à chaque élément réel le point dont les coordonnées par rapport aux axes sont données par les lignes de la matrice

$$ {}^t({}^tU_iM_i) = M_iU_i. $$

Les individus idéaux sont alors représentés par les vecteurs unitaires des axes. On peut appeler le graphique ainsi obtenu "la représentation cartésienne des projections des éléments réels dans l'espace des éléments idéaux".

Soit maintenant k un élément de [n]. Distinguons le $k^{ème}$ mode parmi les autres modes. De façon à fixer les idées et simplifier l'écriture nous appelons le mode k l'espace des individus et nous disons que tous les autres modes définissent les conditions dans lesquelles les formes n-linéaires x et $\hat{x}$ affectent des valeurs aux individus. Une condition est un élément du produit cartésien $\underset{k}{\times} E_i$ un individu est un élément de E_k.

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ une condition, si pour tout $i \neq k$ a_i est un élément réel du mode i nous disons qu'il s'agit d'une condition réelle. Si pour tout $i \neq k$, a_i est un élément idéal nous disons qu'elle définit une condition idéale.

Soient $\overset{k}{X}$, $\overset{k}{\hat{X}}$ et $\overset{k}{C}$ les k-représentations matricielles des cubes de données χ, $\hat{\chi}$ et h. Ces trois matrices sont formées de p^k lignes : une ligne pour chaque condition réelle, c'est-à-dire pour chaque élément du produit cartésien de tous les modes excepté le $k^{ème}$. Les colonnes de $\overset{k}{X}$ contiennent les "scores" des individus réels dans toutes les conditions réelles ; les colonnes de $\overset{k}{\hat{X}}$ fournissent les scores calculés ou prédits pour les individus réels dans les diverses conditions réelles ; et

les colonnes de $\overset{k}{C}$ contiennent les scores calculés des individus idéaux dans toutes les conditions réelles.

Considérons l'espace $E^k = \mathbb{R}^{p_k}$ doté de la base canonique. Il est clair que chaque colonne des matrices $\overset{k}{X}$, $\overset{k}{\hat{X}}$ et $\overset{k}{C}$ peut être interprétée comme le système des coordonnées d'un vecteur de E^k dans cette base ; on peut associer alors à chaque colonne de ces matrices un vecteur de l'espace E^k. L'espace E^k sera nommé "l'espace des scores des individus". Lorsqu'il n'y a pas possibilité de confondre E^k avec E_k on dit simplement qu'il est l'espace des individus.

Par simplicité on écrit ici X, $\hat{X}$ et C au lieu de $\overset{k}{X}$, $\overset{k}{\hat{X}}$ et $\overset{k}{C}$. On dit que le vecteur défini par la $i^{ème}$ colonne de X est le $i^{ème}$ individu réel ; en confondant le vecteur et sa matrice de coordonnées on le note X_i. De même on appelle $i^{ème}$ individu calculé le vecteur défini par X_i, et $j^{ème}$ individu idéal le vecteur défini par C_j.

Notons F^k le sous espace de E^k engendré par les individus idéaux : $F^k = \langle C \rangle$. Nous voulons montrer que les individus calculés sont les projections N^k-orthogonales des individus réels sur le sous espace des individus idéaux.

Soit P^k le projecteur N^k-orthogonal sur F^k. Puisque $F^k = \langle C \rangle$ la matrice P^k de P^k dans la base canonique est :

$$P^k = C({}^tCN^kC)^{-1}\ {}^tCN^k.$$

Par (IV,31)

$$P^k = C(\Lambda_k)^{-1}\ {}^tCN^k$$

Par (III,60) et (IV,23)

$$P^k(X) = C(\Lambda_k)^{-1}{}^tC N^k X = M^k U^k {}^tU^k X U_k \Lambda_k^{-1} {}^tU_k {}^tX U^k {}^tU^k M^k N^k X =$$

$$= M^k U^k {}^tU^k X U_k \Lambda_k^{-1} \Lambda_k {}^tU_k M_k = C {}^tU_k M_k = \hat{X} \qquad (5)$$

$$P^k(X) = \hat{X}$$

Ce qui montre que l'individu calculé i_k ($i_k \in [p_k]$) est bien la projection N^k-orthogonale de l'individu réel i_k sur le sous espace F^k et que les individus calculés se trouvent dans F^k :

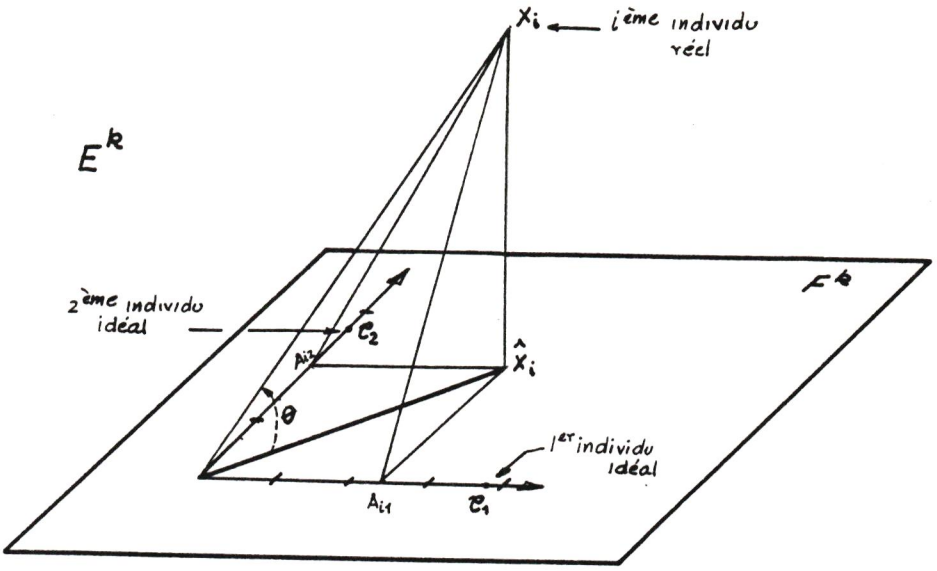
$$P^k(X_i) = \hat{X}_i \in F^k.$$

Les q_k individus définis par la matrice $C\Lambda_k^{-1/2}$ constituent une base N^k-orthonormée de F^k. Notons ζ^k cette base et ξ^k la base canonique de E^k (il ne faut pas confondre ζ^k et ξ^k avec les bases duales de ζ_k et ξ_k). De (5) on déduit que les coordonnées des individus calculés sont données dans la base ζ^k par les colonnes de la matrice $\Lambda_k^{1/2} {}^tU_k M_k$. On peut donc utiliser cette matrice pour construire une représentation cartésienne des individus calculés et des projections des individus réels sur F^k. On associe à chaque individu le point dont les coordonnées sur les axes orthogonaux constituent la ligne correspondante de la matrice

$$A = M_k U_k \Lambda_k^{1/2} \quad ; \qquad (6)$$

le j_k-individu idéal se place sur le j_k-ème axe à la distance $\lambda_{j_k}^{1/2}$ de l'origine.

Par suite cette représentation cartésienne est équivalente à une similitude près, à la représentation cartésienne des individus réels dans l'espace F_k décrite au début du paragraphe.



Représentation graphique de E^k et F^k

Le tableau A fournit les coordonnées des individus (calculés et projetés) par rapport à la base ς^k

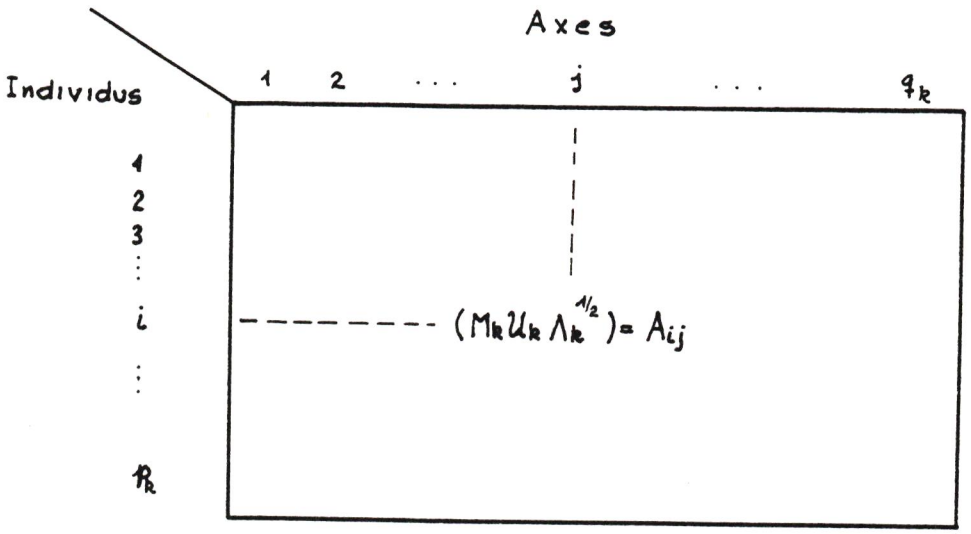


Tableau A

5.4.2 - La qualité des représentations et les contributions

On mesure la fidélité avec laquelle la forme n-linéaire $\hat{x}$ reproduit les scores du $i^{ème}$ individu en comparant dans l'espace euclidien (E^k, N^k) la norme du $i^{ème}$ individu réel avec celle du $i^{ème}$ individu calculé. Le rapport entre ces deux normes constitue le cosinus de l'angle entre l'individu réel X_i et sa projection $\hat{X}_i$ sur l'espace des individus idéaux. Notons $\varrho_k(i)$ la qualité de la représentation du ième individu du mode k

$$\varrho_k(i) = \frac{\|\hat{X}_i\|^2_{N^k}}{\|X_i\|^2_{N^k}}$$

$\varrho_k(i)$ varie entre zéro et un. Elle prend la valeur 1 si et seulement si $\hat{X}_i$ et X_i coïncident, c'est-à-dire si les scores de l'individu i sont parfaitement calculés par la forme n-linéaire $\hat{x}$.

On montre sans difficulté que

$$\varrho_k(i) = (A\,{}^tA)_{ii} / ({}^tX N^k X)_{ii} \qquad (7)$$

Lorsque l'on assigne à tout individu du mode k un poids il nous semble logique d'introduire les définitions suivantes :

On appelle norme carrée du mode k la somme pondérée des carrés des normes des individus réels :

$$N2(k) = \sum_{i=1}^{p_k} w(i) \|X_i\|^2_{N^k} = \|X\|^2_{N^k, D_k}$$

où w(i) est le poids assigné à l'individu i et D_k est la matrice diagonale des poids correspondants.

On appelle norme carrée expliquée du mode k la somme pondérée des carrés des normes des individus calculés :

$$N2C(k) = \sum_{i=1}^{p_k} w(i)\, \|\hat{X}_i\|^2_{N^k} = \|\hat{X}\|^2_{N^k,D_k}$$

On appelle qualité de la représentation du mode k, qu'on note Q_k le quotient de la norme^2 et de la norme^2 expliquée du mode k ;

$$Q_k = \frac{N2C(k)}{N2(k)} = \frac{\|\hat{X}\|^2_{N^k,D_k}}{\|X\|^2_{N^k,D_k}}$$

Evidemment Q_k varie entre zéro et un. Elle prend la valeur 1 si et seulement si tous les individus du mode k sont parfaitement reproduits, c'est-à-dire, si les cubes des données χ et $\hat{\chi}$ coïncident.

Notons P le projecteur N^k-orthogonal sur le sous espace F^k de E^k et P_j le projecteur N^k-orthogonal sur le $j^{ème}$ axe (individu idéal) de F^k. Puisque ces deux projecteurs sont N^k-orthogonaux, la N^k-orthogonalité de la matrice C assure la véracité des égalités :

$$\|\hat{X}\|^2_{N^k,D_k} = \sum_i w(i)\|\hat{X}_i\|^2_{N^k} = \sum_i w(i)\, \|P(X_i)\|^2_{N^k} = \tag{8}$$

$$= \sum_i w(i)\ \Big\|\sum_j P_j(X_i)\Big\|^2_{N^k} = \sum_i \sum_j w(i)\, \|P_j(X_i)\|^2_{N^k} = \tag{9}$$

$$= \sum_j \sum_i w(i)\|P_j(X_i)\|^2_{N^k} = \sum_i \sum_j w(i)\, A^2_{ij}\ . \tag{10}$$

(Le diagramme de la page 183 aide à mieux comprendre ces équations).
(8) (9) et (10) permettent de définir les "contributions absolues" :

1- La contribution d'un axe à la norme calculée du mode k :

$$C(j) = \sum_i w(i)\, \|P_j(X_i)\|^2_{N^k}$$

On vérifie que :

$$C(j) = \sum_i w(i)\ (A_{ij})^2 = ({}^tAD_kA)_{jj}\ ;$$

$$\sum_j C(j) = N2C(k)\ (= \|\hat{X}\|^2_{N^k,D_k})$$

2- La contribution d'un individu à la norme calculée du mode k :

$$C(i) = w(i)\|P(X_i)\|^2_{N^k}$$

On vérifie que :

$$C(i) = w(i)\ \|\hat{X}_i\|^2_{N^k} = \sum_j w(i)\ (A_{ij})^2 = ({}^tAAD_k)_{ii}\ ;$$

$$\sum_i C(i) = N2C(k).$$

3- La contribution d'un axe à la norme calculée d'un individu :

$$C_i(j) = \|P_j(X_i)\|^2_{N^k}$$

qui vérifie :

$$C_i(j) = (A_{ij})^2 \quad \text{et}$$

$$\sum_j C_i(j) = \|\hat{X}_i\|^2_{N^k} = \frac{1}{w(i)}\ C(i)$$

4- L'apport d'un individu à la contribution d'un axe à la norme calculée du mode k :

$$C_j(i) = w(i)\ \|P_j(X_i)\|^2_{N^k}$$

qui vérifie :

$$C_j(i) = w(i)\ (A_{ij})^2 \quad \text{et}$$

$$\sum_i C_j(i) = C(j).$$

On peut définir deux types de contributions relatives ; le premier rapporte les contributions absolues aux normes réelles, alors que le deuxième les rapporte aux normes calculées.

Ainsi par exemple la contribution relative de l'axe j au carré de la norme du mode k s'écrit :

$$100 \times (C(j)/\|X\|^2_{N^k,D_k})$$

et la contribution relative de cet axe au carré de la norme expliquée du mode k est :

$$100 \times (C(j)/\|\hat{X}\|^2_{N^k,D_k}).$$

La contribution relative de l'axe j au carré de la norme calculée de l'individu i est :

$$100 \times ((A_{ij})^2/C(i))$$

tandis que sa contribution relative au carré de la norme (réelle) de l'individu i s'écrit

$$100 \times ((A_{ij})^2 /\|X_i\|_{N^k}).$$

Les contributions relatives peuvent être obtenues en construisant le tableau de contributions absolues :

Individus \ CONTRIBUTIONS ABSOLUES axes	1	2	...	j	...	q_k	NORME² CALCULÉE PONDERÉE	NORME² CALCULÉE	NORME²	NORME² PONDERÉE
1										
⋮										
i				$\omega(i)(A_{ij})^2$			$\omega(i)C(i)$	$C(i)$	$\|X_i\|^2_{N^k}$	$\omega(i)\|X_i\|^2_{N^k}$
⋮										
p_k										
CONTRIBUTIONS DES AXES A LA N2C(k)				C(j)			NORME² CALCULÉE N2C(k)			NORME² N2(k)

Remarque :
Si N_k est diagonale et si on l'utilise pour définir les coefficients de pondération du mode k on peut écrire

$$\|\hat{x}\|^2_{N^k,D_k} = \|\hat{x}\|^2_{N^k,N_k} = \|\hat{x}\|^2_{\otimes N_i} ;$$

$$\|x\|^2_{N^k,D_k} = \|x\|^2_{N^k,N_k} = \|x\|^2_{\otimes N_i} \quad \text{et}$$

$$Q_k = \|\hat{x}\|^2_{\otimes N_i} / \|x\|^2_{\otimes N_i} = Q(x) :$$

La qualité de la représentation du mode k coïncide avec la qualité de la représentation de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$, la contribution absolue d'un axe au carré de la norme calculée du mode k devient alors :

$$C(j) = ({}^tAD_kA)_{jj} = (\Lambda_k^{1/2}\ {}^tU_kM_kN_kM_kU_k\Lambda_k^{1/2})_{jj} = (\Lambda_k)_{jj} = \lambda_j.$$

5.4.3 - Interprétation de la représentation cartésienne de F^k.

On a déjà dit que la représentation cartésienne de l'espace F^k, engendré par les individus idéaux, consiste à dessiner dans un système d'axes orthogonaux les individus calculés et les individus idéaux du mode k. Les coordonnées des individus calculés sont données par les lignes de la matrice

$$A = M_kU_k\Lambda_k^{1/2} \qquad (11)$$

et celles des individus idéaux se trouvent dans la matrice $\Lambda_k^{1/2}$. Dans cette représentation les N^k-distances entre deux individus sont égales à la longueur du segment qui sépare les points concernés.

On sait qu'un individu calculé représente aussi la projection sur F^k de l'individu réel correspondant. Si la qualité de la représentation du mode k est assez proche de l'unité cette représentation cartésienne reproduit assez fidèlement la disposition de tous les p_i individus réels dans l'espace E^k.

L'interprétation du graphe ainsi obtenu nous paraît claire : on ne souligne que quelques aspects :

- Si les points correspondant à deux individus calculés se trouvent proches l'un de l'autre, les scores de ces individus obtenus avec la forme n-linéaire $\hat{x}$ doivent être semblables. Si de plus les qualités des représentations de ces deux individus sont proches de 1, on peut affirmer que les scores réels de ces individus doivent être proches.

- Si les points représentant deux individus calculées sont portés par une même droite issue de l'origine les scores qu'ils obtiennent sur la forme n-linéaire $\hat{x}$ sont proportionels . Si la qualité de la représentation de ces individus est acceptable leurs scores réels doivent être approximativement proportionels . L'individu plus éloigné de l'origine obtient les scores plus élevés et vice-versa.

- Si la contribution relative de l'axe j au carré de la norme calculée de l'individu i est proche de 100 % les scores de cet individu obtenus à partir de $\hat{x}$ sont approximativement proportionels à ceux de l'individu idéal j, car, dans ce cas, le point correspondant à i est proche de l'axe j. De plus lorsque la qualité de la représentation de cet individu est acceptable on peut conclure que l'individu idéal j présente un comportement semblable à l'individu réel i car ils obtiennent des scores proportionels.

Cette situation permet de caractériser les axes, donc les individus idéaux, de façon semblable à la démarche suivie en ACP usuelle. Cela rend plus lisible la représentation cartésienne du mode k et mieux interprétable le cube central.

On a dit que si Q_k est proche de 1 la représentation cartésienne de F^k doit être une bonne représentation des p_i individus réels. On se demande maintenant si cette représentation est optimale au sens où elle respecte au mieux les distances entre individus réels. On montre au paragraphe 5.6 qu'en général la réponse à cette question est négative.

5.5 - L'ESPACE DES CONDITIONS ET LA MATRICE DES k-COMPOSANTES PRINCIPALES

Dans le paragraphe précédent on a considéré les colonnes de $\overset{k}{X}$ comme appartenant à un espace qu'on a appelé l'espace des individus. On considère ici la contre partie : on suppose que les lignes de cette matrice appartiennent à un espace de dimension p_k que l'on appelle l'espace des conditions. Une condition est un (n-1)uple constitué d'éléments réels appartenant à tous les modes excepté le $k^{ème}$.

Il nous intéresse de construire une bonne représentation cartésienne des p^k conditions. Si l'on assimile la matrice $\overset{k}{X}$ à un tableau "variables-individus" il s'agit donc de faire maintenant une représentation cartésienne des variables.

Au chapitre IV on a montré que la matrice des n-composantes principales était la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^1 \otimes N^2)$-euclidienne de $\overset{n}{X}$. Cela signifie d'après (IV, 4.2.1.2) que si la qualité de la représentation de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est acceptable, la matrice $\overset{k}{C}$ des k-composantes principales constitue une représentation cartésienne non négligeable des lignes de la matrice $\overset{k}{X}$. Nous montrons dans les paragraphes qui suivent qu'elle conduit sous certaines conditions à une représentation cartésienne optimale.

Un exemple :

Soit χ le 3-cube de données où pour chaque année d'une période de temps on recense la population économiquement active d'un pays ventilée par régions et par catégories socio-professionnelles. Supposons le premier mode constitué par 22 régions, le second par 57 catégories socio-profesionnelles, et le troisième par 5 années consécutives. La 2-représentation matricielle de χ est un tableau à 57 colonnes et 22 $\times$ 5 lignes. A chaque CSP correspond une colonne et à tout couple formé d'une région et d'une année correspond une ligne. A une région sont donc associées 5 lignes correspondant chacune à une année. Une représentation graphique fidèle des lignes du tableau $\overset{2}{X}$ permet de visualiser l'évolution temporelle des régions en fonction de la composition professionnelle de sa population économiquement active. Supposons que 3 régions idéales, 3 catégories socio-professionnelles et 2 années idéales suffisent dans le 3-ACP de χ pour obtenir une qualité de représentation satisfaisante (proche de 1).

Dans ces conditions, la matrice $\overset{2}{C}$ appartenant à $M_{\mathbb{R}}(110,3)$ permet de construire une bonne représentation cartésienne des 110 couples région-année. Si l'on joint par des segments de droite les 5 points correspondant à chaque région on obtient un diagramme de l'évolution des régions.

Bien que la représentation cartésienne de $\overset{k}{X}$ fondée sur $\overset{k}{C}$ ne soit pas optimale tout en conservant une qualité acceptable elle est obtenue par des multiplications matricielles simples à partir des sorties de la n-ACP.

On précise plus bas la notion de meilleure représentation cartésienne, dans le but de déterminer la qualité des représentations graphiques issues des matrices A et $\overset{k}{C}$ comme outils de description des espaces des individus et des conditions.

5.6 - MEILLEURE REPRESENTATION CARTESIENNE D'UN NUAGE DE POINTS

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace euclidien de dimension n, ξ une base dans laquelle la matrice de $\mathcal{N}$ est N. On appelle nuage de m points de E un ensemble de m vecteurs de E.

Définition

Soient $a = \{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ et $b = \{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ deux nuages de E, et $\{w_i\}_{i\in m}$ un système de poids. On appelle "distance" entre les deux nuages le réel :

$$d(a,b) = \sum_{j=1}^{m} w_j \|a_j-b_j\|_{\mathcal{N}}$$

d, qui dépend de $\{w_i\}$, est une distance si $w_j > 0$ pour tout $j \in [m]$.

Soit x un nuage de m points de E, et X_i la matrice unicolonne des coordonnées de x_i dans la base ξ . La matrice $X = (X_1,X_2,\ldots,X_m)$ est dite la matrice associée au nuage x dans la base ξ .

Réciproquement si X appartient à $M_{\mathbb{R}}(n',m)$ et si ξ' est une base d'un sous-espace E' de E les m vecteurs

$$x_j = \sum_{i=1}^{n'} X_{ij}\xi'_i$$

définissent un nuage de m points de E. On note :

$$[X] = \{x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_m\}$$

et on dit que [X] est le nuage des colonnes de X associé à la base ξ'. Les coordonnées de x_j par rapport à ξ' sont données par la $j^{-ème}$ colonne de X. La définition de nuage des lignes d'une matrice suit des voies analogues.

Une infinité de nuages de E peuvent être associés à une matrice X, mais dès qu'on fixe une base un seul nuage lui est associé. Notons C_X l'ensemble de tous les nuages de m points de E dont X est la matrice associée. Puisque tout espace euclidien peut être muni d'une base N-orthonormée :

$$C_X = \{ [UX] \quad | \quad U \in O^N_{nn'} \}$$

où $[UX]$ est le nuage déterminé par les colonnes de la matrice X et par la base ξ de E.

Si $Z \in C_X$ on sait alors qu'il existe une matrice U de $O^N_{nn'}$ telle que $Z = [UX]$. Ceci signifie que les m points du nuage Z appartiennent tous au sous espace $\langle U \rangle_\xi$ engendré par les colonnes de la matrice U . Les coordonnées de ces m points dans la base définie par les colonnes de U sont données par les colonnes de X.

Soient $n' < n$, $X \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$, $Y \in M_{\mathbb{R}}(n',m)$ et $[X]$ le nuage associé aux colonnes de X et à la base ξ de E. On appelle "écart" de Y à X et on note $e(Y \to X)$ la quantité :

$$e(Y \to X) = \min_{Z \in C_y} d([X],Z)$$

On remarque que

$$e(Y \to X) = \min_{U \in O^N_{n\,n'}} d([X],[UY]) = \min_{U \in O^N_{nn'}} \|X - UY\|_{N,D_p}$$

où D_p est la matrice diagonale des poids : $(D_p)_{ij} = \delta^i_j w_i$.

F. Glaçon montre en [3] dans le chapitre relatif aux méthodes procrustéenes et dans un contexte un peu plus général que :

$$e^2(Y \to X) = \|X\|^2_{N,D_p} + \|Y\|^2_{I,D_p} - 2 \sum_k \lambda_k^{1/2} \; (YD_p {}^tXNXD_p {}^tY). \qquad (12)$$

Si $e(Y \to X) = \varepsilon$ il est clair qu'il existe une matrice $U \in O^N_{nn'}$ telle que $d([X],[UY]) = \varepsilon$,
ce qui veut dire que le nuage des colonnes de $[UY]$ est le plus proche de $[X]$ parmi les nuages qu'admettent Y comme matrice associée.

On peut représenter $[UY]$ dans un système d'axes orthonormés : les coordonnées du point représentant le $j^{ème}$ vecteur de $[UY]$ sont données par la $j^{ème}$ colonne de Y. Dans le diagramme ainsi obtenu la N-distance entre deux vecteurs du nuage est mesurée par la longueur du segment séparant les points correspondants. Ce diagramme cartésien, qui ne dépend que de la matrice Y, fournit une représentation fidèle du nuage $[UY]$. Si ε est "petit" on admet qu'il est aussi une bonne représentation du nuage $[X]$.

On peut mesurer la qualité de la représentation de X par Y en utilisant par exemple, l'indice :

$$Q(Y \to X) = \left(1 + \frac{e^2(Y \to X)}{\|X\|^2_{N,D_p}}\right)^{-1}$$

qui est compris entre zéro et un.
La valeur de $Q(Y \to X)$ est égale à :

$$\begin{array}{lll} 0 & si & e(Y \to X) = \infty \\ 1 & si & e(Y \to X) = 0 \\ 1/2 & si & e(Y \to X) = \|X\|^2_{N,Dp} \end{array}$$

Soit maintenant $\mathcal{Y}$ un sous-ensemble de $M_{\mathbb{R}(n',m)}$ et $\bar{Y}$ un élément de $\mathcal{Y}$. Si $\bar{Y}$ réalise l'optimum de :

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} e(Y \to X) \qquad (13)$$

$\bar{Y}$ est la matrice appartenant à $\mathcal{Y}$ qui donne lieu à la meilleure représentation cartésienne de X car elle minimise la distance entre les deux nuages :

Définition

$\bar{Y}$ réalisant (13) est dite la $\mathcal{Y}$-meilleure représentation cartésienne de X.

Lorsque $\mathcal{Y} = M_{\mathbb{R}}(n',m)$ on dit, tout simplement, que $\bar{Y}$ est la meilleure représentation cartésienne de X (en n' dimensions).

Remarque :

$$\min_{Y \in \mathcal{Y}} (e(Y \to X)) = \min_{Y \in \mathcal{Y}} \left(\min_{U \in O^N_{n,n'}} \|X - UY\|_{N,D_p} \right) \qquad (14)$$

Voyons maintenant quelle est la valeur de (13) quand $\mathcal{Y} = M_{\mathbb{R}}(n',m)$.
D'après la propriété 1 de l'Analyse en Composantes Principales (IV, 4.2.2) l'expression

$$\|X - UY\|_{N,D_p} = \|{}^tX - {}^tY\,{}^tU\|_{D_p,N} \qquad (15)$$

est minimisée quand ${}^tY$ est égale à la matrice C, des composantes principales de l'ACP du triplet $({}^tX, D_p, N)$. Cela montre que ${}^tC$ est la meilleure représentation cartésienne du nuage des colonnes de la matrice X.
Dans ces conditions :

$$\min_{Y} e^2(Y \to X) = e^2({}^tC \to X)$$

alors :

$$\min_{Y} e^2(Y \to X) = \|X\|^2_{N,D_p} + \|{}^tC\|^2_{I,D_p} - 2 \sum_k \lambda_k^{1/2} ({}^tCD_p {}^tXNXD_pC)$$

$$= \|X\|^2_{N,D_p} - \sum_{j=1}^{n'} \lambda_j = \sum_{j=n'+1}^{n} \lambda_j$$

où λ_j est la $j^{ème}$ valeur propre de $XD_p {}^tXN$.
La qualité de représentation optimale est donc :

$$Q({}^tC \to X) = \left(1 + \frac{\sum_{j=n'+1}^{n} \lambda_j}{\|X\|^2_{N,D_p}}\right)^{-1} .$$

Une deuxième mesure de la qualité de la représentation de X par la matrice $Y \in M_{\mathbb{R}}(n',n)$ est donnée par :

$$Q'(Y \to X) = Q({}^tC \to X) - Q(Y \to X)$$

qui nous indique le manque à gagner encouru lorsqu'on représente X par Y et non par la représentation cartésienne optimale de dimension n'.

De façon symétrique on montre que si $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ alors, la meilleure représentation cartésienne du nuage des lignes de X est la matrice des composantes principales de l'ACP de (X,D_p,N).

Dans la suite, sauf mention contraire, on comprend par représentation cartésienne d'une matrice celle du nuage des lignes.

On établit finalement le lien existant entre la meilleure approximation euclidienne (IV, 4.2.1) et la meilleure représentation cartésienne d'une matrice qui se déduit directement des définitions :

Soient $X \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$, $\Omega = O^N_{nn'}$, F un sous ensemble de $M_{\mathbb{R}}(m,n')$ et D_p la matrice des poids des lignes de X. Si Y est la $(\Omega \times F)$-meilleure approximation $(D_p \otimes N)$-euclidienne de X alors Y est la F-meilleure représentation cartésienne du nuage des lignes de X.

Nous avons vu au chapitre IV que la matrice $\overset{n}{C}$ des n-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ était la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^1 \otimes N^2)$-euclidienne de X. Si $n_2 = \{k\}$ O_1 coïncide avec $O_{p_k q_k}^{N_k}$, si de plus pour tout $i \neq k$ les matrices N_i sont diagonales et si l'on prend $\otimes N_i$ comme matrice des poids, alors on peut affirmer que la matrice $\overset{k}{C}$ des k-composantes principales de $\overset{k}{X}$ réalise dans G_3 la meilleure représentation cartésienne des lignes de $\overset{k}{X}$: $\overset{k}{C}$ est la G_3-meilleure représentation cartésienne du nuage des "conditions" (on rappelle que la distance entre les lignes de $\overset{k}{X}$ est calculée avec la métrique N_k).

Lorsque les contraintes ci-dessus ne sont pas satisfaites, d'après les résultats du paragraphe 5.5, la matrice $\overset{k}{C}$ est une bonne représentation cartésienne des lignes de $\overset{k}{X}$, mais, on ne peut pas garantir qu'elle fournisse une représentation optimale.

L'écart entre les nuages des lignes de $\overset{k}{X}$ et $\overset{k}{C}$ est :

$$e^2(\overset{k}{C} \to \overset{k}{X}) = \|\overset{k}{X}\|^2_{N^k, N_k} - \|\overset{k}{C}\|^2_{N^k, I} = \|\overset{k}{X}\|^2 - tr(\Lambda_k)$$

La qualité de la représentation de $\overset{k}{X}$ par $\overset{k}{C}$ est :

$$Q(\overset{k}{C} \to \overset{k}{X}) = (1 + \frac{\|\overset{k}{X}\|^2 - tr(\Lambda_k)}{\|\overset{k}{X}\|^2})^{-1} \simeq \frac{tr(\Lambda_k)}{\|\overset{k}{X}\|^2}$$

et $Q'(\overset{k}{C} \to \overset{k}{X})$ devient :

$$Q'(\overset{k}{C} \to \overset{k}{X}) \simeq \frac{1}{\|\overset{k}{X}\|^2} (tr(\Delta_k) - tr(\Lambda_k))$$

où Δ_k est la matrice diagonale des valeurs propres obtenue lors de l'ACP de $(\overset{k}{X}, N^k, N_k)$.

On est maintenant en mesure de donner une réponse à la question posée la fin du paragraphe 5.4.3. On considère l'espace euclidien (E^k, N^k) des scores des individus. Les p_k individus réels sont définis par les lignes de ${}^t\overset{k}{X}$, et les p_i individus calculés par les lignes de ${}^t\overset{k}{\hat{X}}$. Ayant affecté les poids $\{w_i\}$ aux individus on se demande sur la qualité de la représentation de ${}^t\overset{k}{X}$ par les lignes de la matrice $A = M_k U_k \Lambda_k^{1/2}$. On rappelle que la matrice U_k est construite de sorte qu'elle vérifie l'expression :

$$ {}^t\overset{k}{X} \left(\underset{k}{\otimes} U_i \, {}^t U_i\right) \overset{k}{X} N_k \, M_k \, U_k \equiv M_k U_k \Lambda_k . \qquad (16) $$

On sait que la meilleure représentation cartésienne du nuage des lignes de ${}^t\overset{k}{X}$ est la matrice des composantes principales de l'ACP de $({}^t\overset{k}{X}, D_p, N^k)$. C'est-à-dire si $U \in M_{\mathbb{R}}(n,n')$ et Δ_k sont telles que :

$$ {}^t\overset{k}{X} N^k \overset{k}{X} D_p U \equiv U \Delta_k $$

alors la meilleure représentation cartésienne du nuage des lignes de ${}^t\overset{k}{X}$ est la matrice :

$$ C = U \Delta_k^{1/2} . \qquad (17) $$

D'après (16) et (17) même lorsque N_k est diagonale, et même lorsque l'on prend N_k comme la matrice diagonale des poids des individus rien ne garantit que A soit égale à C. On peut d'ailleurs construire des exemples pour lesquels A et C sont différentes. Ceci signifie que la matrice A ne fournit pas la meilleure représentation cartésienne du nuage des individus réels.

En revanche, puisque

$$ \overset{k}{\hat{X}} = \overset{k}{C} U_k M_k = (\overset{k}{C} \Lambda_k^{-1/2}) \Lambda_k^{1/2} U_k M_k = (\overset{k}{C} \Lambda_k^{-1/2}) \, {}^t A $$

quelle que soit la matrice D_p on a :

$$ \| \overset{k}{\hat{X}} - \overset{k}{C} \Lambda_k^{-1/2} \, {}^t A \|_{N^k, D_p} = 0 $$

Alors, puisque ${}^{k}C\,\Lambda_k^{-1/2}$ est une matrice N^k-orthonormée il résulte que A est une représentation cartésienne exacte, donc la meilleure représentation cartésienne du nuage des individus calculés (lignes de ${}^{t}\overset{k}{X}$)

Par rapport au nuage des individus réels on doit se contenter de dire que si la qualité de la représentation du mode k est proche de 1 :

$$Q_k = \frac{\|\hat{\overset{k}{X}}\|^2_{N^k,D_p}}{\|\overset{k}{X}\|^2_{N^k,D_p}} \simeq 1$$

alors, vu que

$$e^2(A \to {}^{t}\overset{k}{X}) \leq \|\overset{k}{X}-\hat{\overset{k}{X}}\|^2_{N^k,D_p}$$

la qualité de la représentation de ${}^{t}\overset{k}{X}$ par A doit être elle aussi proche de 1 :

$$Q(A \to {}^{t}\overset{k}{X}) \simeq 1.$$

5.7 - LES ACP DES REPRESENTATION MATRICIELLESDU CUBE PROJETE. LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DES LIGNES ET COLONNES DE $\overset{n}{X}$

L'information contenue dans l'hypercube de données χ peut être analysée de plusieurs façons. Nous en précisons deux ici :

1- On peut considérer cette information comme un tout et faire la n-ACP du cube dans le but de trouver une forme n-linéaire de rang prédéterminé qui permette de reproduire de façon optimale le cube original χ. On obtient en outre le cube central h, les matrices U_i et les matrices $\overset{n}{C}$ des n-composantes principales dont on vient de discuter leurs possibles interprétations.

2- On peut organiser les entrées du cube des données pour obtenir des tableaux que l'on soumet à des analyses convenables. Ainsi par exemple on peut faire des ACP sur les n-représentations matricielles de χ , un des objectifs de cette démarche serait de représenter graphiquement les lignes et les colonnes de $\overset{n}{X}$. Les lignes de $\overset{n}{X}$ sont les éléments du produit cartésien des modes inclus dans n_1 et les colonnes les éléments du produit cartésien des modes appartenant à n_2.

On note dans ce paragraphe $\overset{n}{C}$ la matrice des composantes principales issue de l'ACP de $(\overset{n}{X}, N^1, N^2)$ qu'on distingue de $\overset{n}{C}$ la matrice des n-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$.

En Analyse en Composantes Principales on utilise la matrice $\overset{n}{C}$ pour construire une représentation cartésienne des lignes du tableau des données $\overset{n}{X}$. Au chapitre IV on a présenté quelques propriétés d'optimalité de cette matrice, on attire l'attention sur les suivantes :

- Elle constitue la meilleure approximation euclidienne de $\overset{n}{X}$.

- Elle préserve au mieux les N^2-produits scalaires entre les lignes de $\overset{n}{X}$.

- Si N^1 est une matrice diagonale de poids alors $\overset{n}{C}$ est la meilleure représentation cartésienne des lignes de X.

Si bien que l'objectif direct de la n-ACP est d'analyser le cube χ dans son ensemble, et non pas les tableaux $\overset{n}{X}$, on montre dans la suite quelle permet de construire des représentations cartésiennes "acceptables" des lignes de $\overset{n}{X}$ au moins par deux voies. La première dont on a déjà parlé consiste à utiliser la matrice $\overset{n}{C}$ des n-composantes principales de χ . La propriété 5' du chapitre IV assure que $\overset{n}{C}$ est la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^1 \otimes N^2)$-euclidienne de $\overset{n}{X}$. Alors, d'après ce qu'on a dit en 4.2.1.2, si la qualité de la représentation de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est proche de 1 la qualité de la représentation de $\overset{n}{X}$ par $\overset{n}{C}$, $Q(\overset{n}{C} \to \overset{n}{X})$, ne doit pas être très éloignée de 1. Même si la représentation cartésienne des lignes de $\overset{n}{X}$ à partir des lignes de $\overset{n}{C}$ n'est pas celle qui préserve au mieux ni les N^2-produits scalaires ni les N^2-distances on peut avoir intérêt à l'utiliser car une fois effectuée la n-ACP de χ , on obtient $\overset{n}{C}$ par des simples multiplications matricielles :

$$\overset{n}{C} = \left(\underset{i\in n_1}{\otimes} M_i U_i\ {}^t U_i\right) \overset{n}{X} \left(\underset{i\in n_2}{\otimes} U_i\right).$$

Un désavantage de $\overset{n}{C}$ par rapport à $\overset{n}{C}$ c'est que le nombre de colonnes de $\overset{n}{C}$ est fixe et égal à $\prod_{i\in n_2} q_i = q^2$. Si l'on veut représenter les lignes de $\overset{n}{X}$ dans un espace de dimension r inférieur à q^2 il faudrait refaire la n-ACP de χ en modifiant les q_i de façon à ce que $\prod_{i\in n_2} q_i$ soit égale à r, car, contraitement à l'ACP la n-ACP n'a pas la propriété d'emboîtement. D'ailleurs il n'est pas toujours possible de trouver des q_i tels que $q^2 = r$.

La seconde voie permet de contourner ces obstacles. Elle consiste à réaliser l'ACP des tableaux $\overset{n}{\hat{X}}$. Les représentations graphiques des lignes de $\overset{n}{X}$, ainsi obtenues, ne sont pas non plus optimales, mais elles ne sont pas coûteuses et sont emboîtées.

La forme n-linéaire $\hat{x}$ est parmi toutes les formes de rang inférieur ou égal à $\{q_i\}_{i\in n}$, la plus proche de x au sens de la métrique N .
La proximité entre $\hat{x}$ et x est mesurée par

$$Q(\chi) = \|\hat{x}\|^2_N / \|x\|^2_N .$$

Si $Q(\chi)$ est voisine de 1 les formes x et $\hat{x}$ sont proches l'une de l'autre au sens de la métrique N . Cela implique que pour toute n les matrices $\overset{n}{X}$ et $\overset{n}{\hat{X}}$ sont aussi proches au sens de la métrique définie par N^1 et N^2.
Si cette proximité est assez forte, et si l'on soumet $\overset{n}{X}$ et $\overset{n}{\hat{X}}$ à des analyses stables les résultats obtenus devraient être semblables. On peut donc dire que l'analyse de $\overset{n}{\hat{X}}$ est une approximation acceptable de l'analyse de $\overset{n}{X}$.
Dans ce cadre d'idées si $Q(\chi)$ ne s'éloigne pas trop de 1 on peut obtenir une approximation de l'ACP de $\overset{n}{X}$ en effectuant l'ACP de $\overset{n}{\hat{X}}$. L'avantage de cette démarche c'est qu'une fois réalisée la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ on peut obtenir l'ACP de $(\overset{n}{\hat{X}}, N^1, N^2)$ d'une façon peu coûteuse.

On s'intéresse surtout à la représentation graphique des lignes et colonnes de $\overset{n}{X}$. Afin de simplifier l'écriture nous notons ici X, $\hat{X}$ et C au lieu de $\overset{n}{X}$, $\overset{n}{\hat{X}}$ et $\overset{n}{C}$ respectivement.

Soit $r \leq \min(q^1, q^2)$. Nous considérons donc l'ACP r dimensionnelle de (X, N^1, N^2).
Le schéma correspondant est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{p^1} = E^1 & \xleftarrow{\hat{X}} & (E^2)^* \\ \downarrow N^1 & & \uparrow N^2 \\ (E^1)^* & \xrightarrow{t\hat{X}} & E^2 = \mathbb{R}^{p^2} \end{array}$$

où $\quad \hat{X} = M^1 U^1 \, {}^t U^1 X U^2 {}^t U^2 M^2.$

Soient :

$$T = {}^t\hat{X} N^1 \hat{X} N^2,$$

U et Λ les matrices des r permiers éléments propres de T :

$$TU \equiv U\Lambda \quad , \text{ et}$$

$$V = \hat{X} N^2 U \Lambda^{-1/2} \qquad (18$$

Les colonnes de U sont N^2-orthonormées et V est la matrice des r premiers vecteurs propres N^1-orthonormées de $\hat{X} N^2 {}^t\hat{X} N^1$.

D'après la définition donnée en (II,2.4.2.2.) le triplet (V,U,Λ) constitue une solution de l'ACP de $(\hat{X}, N^1, N^2)$.

On utilise les lignes des matrices

$$R_L = V\Lambda^{1/2}$$

$$R_C = U\Lambda^{1/2}$$

pour représenter dans un système d'axes orthogonaux les lignes et les colonnes de la matrice $\hat{X}$. On remarque que : $R_L \in M_{\mathbb{R}}(p^1,r)$; $R_C \in M_{\mathbb{R}}(p^2,r)$;

R_L est la matrice des composantes principales de l'ACP $(\hat{X}, N^1, N^2)$ et
R_C est la matrice des composantes principales de l'ACP $({}^t\hat{X}, N^2, N^1)$.

Les matrices R_L et R_C définissent les représentations cartésiennes que l'on cherche. En principe leur obtention implique la diagonalisation de T. Nous montrons qu'elles peuvent être obtenus grâce à la diagonalisation d'une matrice d'ordre inférieure à celui de T.

Considérons l'ACP de (C, N^1, I) :

On rappelle que C n'est pas la matrice des composantes principales de $\hat{X}$. On sait que :

$$C = M^1 U^1 \, {}^t U^1 X U^2,$$

$$C = \hat{X} U^2$$

Soient :

$$\bar{T} = {}^t C N^1 C,$$

$\bar{U}$ et $\bar{\Lambda}$ les matrices des r premiers éléments propres de $\bar{T}$:

$$\bar{T}\bar{U} \equiv \bar{U}\bar{\Lambda} \quad \text{et}$$

$$\bar{V} = C\bar{U}\,\bar{\Lambda}^{-1/2}$$

Alors, le triplet $(\bar{V},\bar{U},\bar{\Lambda})$ constitue la solution de l'ACP de (C,N^1,I)
Les lignes des matrices

$$\bar{R}_L = \bar{V}\bar{\Lambda}^{1/2}$$

$$\bar{R}_C = \bar{U}\bar{\Lambda}^{1/2}$$

qui sont les composantes principales des ACP de (C,N^1,I) et $({}^tC,I,N^1)$ respectivement, sont utilisées pour représenter les lignes et les colonnes de C dans un repère cartésien.

On vérifie que :

$$\bar{T} = {}^tCN^1C = {}^t(\hat{X}U^2)N^1(\hat{X}U^2) = {}^tU^2\ {}^t\hat{X}N^1\hat{X}N^2M^2U^2 =$$

$$= {}^tU^2\ T\ M^2U^2$$

et

$$T = M^2U^2\ {}^tCN^1C{}^tU_2M^2N^2 = M^2U^2\ \bar{T}\ {}^tU^2$$

alors

$$TM^2U^2\bar{U} = M^2U^2\bar{T}\ {}^tU_2M^2U^2\bar{U} = M^2U^2\ \bar{T}\bar{U} = M^2U^2\bar{U}\bar{\Lambda}$$

c'est-à-dire

$$T(M^2U^2\bar{U}) = (M^2U^2\bar{U})\bar{\Lambda} \qquad (19)$$

Les expressions (18) et (19) montrent que

$$U = M^2U^2\bar{U} \quad \text{et}$$

$$\Lambda = \bar{\Lambda}.$$

On en déduit

$$V = \hat{X}N^2U\Lambda^{-1/2} = \hat{X}N^2M^2U^2\bar{U}\Lambda^{-1/2} = \hat{X}U^2\bar{U}\Lambda^{-1/2} = C\bar{U}\bar{\Lambda}^{-1/2} = \bar{V}$$

$$R_L = V\Lambda^{1/2} = C\bar{U} = \bar{V}\ \bar{\Lambda}^{1/2} = \bar{R}_L$$

ce qui montre d'une part que les composantes principales de $\hat{X}$ sont des combinaisons linéaires de n-composantes principales de χ dont les coefficients sont définis par les colonnes de $\bar{U}$, et d'autre part que les représentations des lignes des matrices $\hat{X}$ et C coïncident. Pour représenter de façon optimale les lignes de $\hat{X}$ il suffit de faire l'ACP de (C,N^1,I).

Les matrices R_C et $\bar{R}_C$ qui servent à représenter dans un repère cartésien les colonnes de $\hat{X}$ et C respectivement sont liées par :

$$R_C = U\Lambda^{1/2} = M^2U^2\bar{U}\Lambda^{1/2} = M^2U^2\bar{R}_C$$

$$\bar{R}_C = {}^tU^2R_C$$

En résumé on peut faire l'ACP du triplet $(\hat{X},N^1,N^2)$ en faisant l'ACP de (C,N^1,I). En particulier on peut obtenir la représentation cartésienne des lignes et colonnes de $\hat{X}$ grâce à cette dernière analyse.

Puisque $\hat{X}$ appartient à $M_{\mathbb{R}}(p^1,p^2)$ l'ACP de $(\hat{X},N^1,N^2)$ conduit à diagonaliser une matrice d'ordre $\min(p^1,p^2)$.

Si $\eta = \{\eta_1,\eta_2\}$ et $\eta' = \{\eta_2,\eta_1\}$ il est clair que ${}^t\overset{\eta}{X} = \overset{\eta'}{X}$

donc l'ACP de $(\overset{\eta}{X},N^1,N^2)$ est équivalente à celle de $(\overset{\eta'}{X},N^2,N^1)$
Alors, puisque $\overset{\eta}{C}$ appartient à $M_{\mathbb{R}}(p^1,q^2)$ et $\overset{\eta'}{C}$ à $M_{\mathbb{R}}(p^2,q^1)$ on peut choisir ou bien $\overset{\eta}{C}$ ou bien $\overset{\eta'}{C}$ de façon à diagonaliser une matrice d'ordre

$$\min(\min(p^1,q^2),\ \min(p^2,q^1)) = \min(q^1,q^2)$$

ce qui peut signifier un gain considérable en temps de calcul.

Exemple : Si $\forall i\in[5]$ $p_i = 10$ et $q_i = 2$ et si $\eta = \{\{5,3\},\{1,4,2\}\}$ alors l'ACP de $\hat{X} \in M_{\mathbb{R}}(100,1000)$ implique la diagonalisation d'une matrice symétrique d'ordre 100 si l'on ne profite pas des résultats obtenus lors de la n-ACP de χ , et la diagonalisation d'une matrice d'ordre 4 dans le cas contraire.

La construction de la matrice $\bar{T}$ qu'il faut diagonaliser peut être allégée en utilisant le fait que

$$C = M^{1}U^{1}H$$

où H est la η-représentation matricielle du cube central h :

$$\bar{T} = {}^{t}CN^{1}C = {}^{t}H{}^{t}U^{1}M^{1}N^{1}M^{1}U^{1}H = {}^{t}HH.$$

Les sorties de la n-ACP étant l'hypercube central h et les matrices U_i la démarche pour obtenir les représentations graphiques des lignes et colonnes de $\hat{X}$ est :

1. Calcul de $\theta = {}^{t}HH$

2. Calcul de $\bar{U}$ et $\bar{\Lambda}$ telles que $\theta\bar{U} \equiv \bar{U}\bar{\Lambda}$

3. Calcul de $R_L = M^{1}U^{1}H\bar{U}$ qui donne en ligne la représentation des lignes de $\hat{X}$

4. Calcul de $R_C = M^{2}U^{2}\bar{U}\bar{\Lambda}^{1/2}$ dont ses lignes fournissent les coordonnées pour la représentation cartésienne des colonnes de $\hat{X}$.

Le cas $\eta_2 = \{k\}$:

Si $\eta = \{\{1,2,\ldots,k-1, k+1,\ldots,n\}, \{k\}\}$ la démarche précédente permet de constater que :

a) Puisque $H = {}^{t}U^{k}\,{}^{k}\hat{X}\,U_k$

$$t_{HH} = {}^{t}U_k\,{}^{t}{}^{k}\hat{X}\,U^{k}{}^{t}U^{k}{}_{X}U_k = {}^{t}U_kM_kU_k\Lambda_k = \Lambda_k$$

alors

$$\theta = \Lambda_k.$$

b) Puisque $\Lambda_k I = I\Lambda_k$
$\bar{U}$ est la matrice des r premières colonnes de la matrice unité I,
et $\bar{\Lambda}$ est la matrice diagonale des r premières valeurs de Λ_k.

c) $R_L = M^k U^k H \bar{U} = \overset{k}{C}\bar{U}$
elle est la matrice constituée par les r premières colonnes de $\overset{k}{C}$.

d) $R_C = M_k U_k \bar{U}\ \bar{\Lambda}^{1/2}$
ce qui montre que R_C est la matrice des r premières colonnes de $A = M_k U_k \Lambda_k^{1/2}$.

Ceci confirme le résultat obtenu en 5.6 selon lequel la matrice A était la meilleure représentation cartésienne de $\overset{k}{X}$. La matrice $\overset{k}{C}$ qui était la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^k \otimes N_k)$-euclidienne de $\overset{k}{X}$ est aussi la $(G_3 \times O_1)$-meilleure approximation $(N^k \otimes N_k)$-euclidienne de $\overset{k}{\hat{X}}$. D'ailleurs, si pour tout $i \neq k$ N_i est diagonale et si l'on prend N^k comme matrice des poids il se trouve que la matrice $\overset{k}{C}$ des k-composantes principales de la n-ACP de $(\chi, \otimes N_i)$ est la G_3-meilleure représentation cartésienne de $\overset{k}{X}$ et la meilleure représentation cartésienne de $\overset{k}{\hat{X}}$.

ANNEXE A

L'objectif de cette annexe est de présenter un exemple d'un hypercube de données soumis à plusieurs n-ACP. Notre but n'est pas de faire une analyse des données elles-mêmes, mais plutôt de présenter les sorties fournies par l'algorithme TUCKALSN et de montrer que le choix des métriques et le pré-traitement des données jouent un rôle fondamental : on peut obtenir à partir des mêmes données des résultats fort différents et dont la lecture doit être particularisée.

On dispose d'un 4-hypercube noté χ qui pour 9 années consécutives ventile la population économiquement active de la France, par région, par catégorie socio-professionnelle et par taille d'établissements. Notre hypercube de données est donc une suite de 9 tableaux de contingence à trois entiers. On fait 3 analyses :

1. On réalise d'abord la 4-ACP de χ en dotant les 4 modes des métriques identité. N'ayant ni normalisation ni centrage on s'attend à un fort effet de taille. On montre que les représentations graphiques ne sont pas très éloignées de celles obtenues par les ACP des représentations matricielles $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$.

2. On fait l'analyse de la somme des 9 cubes de contingence qui est elle même un cube de contingence. On normalise les données en les divisant par les marges et on utilise comme métrique dans chaque mode la matrice diagonale des inverses des fréquences marginales des éléments. On montre que pour ce cube de données les résultats obtenus ne sont pas trop différents de ceux obtenus grâce à une Analyse Factorielle des Correspondances Multiples (A.F.C.M.).

3. On réalise la 3-ACP du cube somme construit en 2. mais, cette fois-ci on dote chaque mode de la matrice de variance-covariance comme métrique. On ne retient qu'une seule conclusion : les résultats obtenus par cette n-ACP n'ont rien à voir avec les résultats des analyses précédentes.

Les données

Les données proviennent de l'enquête "Structure des emplois" réalisée annuellement par le Ministère du Travail et par l'INSEE. Cette enquête couvre d'une part les établissements de plus de 10 salariés dans l'industrie, les services, les commerces et les établissements de plus de 15 salariés dans l'agriculture, et d'autre part, elle s'étend au secteur privé, aux établissements du secteur nationalisé et du secteur semi-public dont le personnel ne jouit pas d'un statut particulier.

Le champ théorique de l'enquête, estimé à partir des statistiques de l'UNEDIC s'étend à un peu plus de 10 millions de personnes par an, soit 62 % environ de la population salariée. Ce pourcentage varie selon le secteur d'activité économique. Dans le secteur industriel, par exemple, où en général les petits établissements sont peu nombreux, 92 % des salariés sont inclus dans le champ de l'enquête ; dans le bâtiment, elle s'étend à 75 % des salariés. Par contre le secteur "transport, commerces, services" n'est couvert qu'à 47 %. Hors agriculture le taux de réponse global a été estimé à 85 %, il est plus élevé dans l'industrie (90 % environ) que dans le secteur des "services" (80 % environ). Cette enquête est donc assez représentative de l'industrie, moins bonne dans le commerce et les autres activités des services et peu représentative de l'agriculture.

Pour chaque année de la période 1975-1984 on ventile la population recensée par cette enquête par région, catégorie socio-professionnelle et taille de l'établissement. Pour les CSP on utilise la nomenclature E2 à 11 postes axés sur le niveau de qualification dans chacun des deux groupes d'activités économiques : production et services. Pour les tailles des établissements on utilise le code T2 à 4 postes. Le cardinal du domaine de définition de notre 4-cube de données est donc 8712 (22 x 11 x 4 x 9

22 REGIONS

O1IF ILE DE FRANCE
O2CA CHAMPAGNE-ARDENNE
O3PI PICARDIE
O4HN HAUTE NORMANDIE
O5CE CENTRE
O6BN BASSE NORMANDIE
O7BO BOURGOGNE
O8NC NORD-PAS DE CALAIS
O9LO LORRAINE
1OAL ALSACE
11FC FRANCHE COMTE
12PL PAYS DE LA LOIRE
13BR BRETAGNE
14PC POITOU-CHARENTES
15AQ AQUITAINE
16MP MIDI-PYRENEES
17LI LIMOUSIN
18RA RHONE-ALPES
19AU AUVERGNE
2OLR LANGUEDOC-ROUSSILLON
21AC PR-ALPES-COTE D'AZUR
22CO CORSE

11 TYPES DES EMPLOIS

EPCA ING ET CADR.TECH PRO
ESCA CADR.SUP,TECH SERV
EPTA TECH,AGE.TECH PROD
ESTA TECH,AGEN.TECH SERV
EPPE PERS ENCADR.PROD
EOAQ OUVRIERS QUALIFIES
EOSQ OUVRIERS SANS QUALIF
ESPE PERS.ENCADR.SERVICIO
ESPQ PERS.QUALIFIE SERVC
ESPN PERS.SANS QUAL.SERV
EDIV MATIERS DIVERS

4 TAILLES

taO1 10-50
taO2 50-200
taO3 200-500
taO4 plus de 500

9 ANNEES

ANO1 1976
ANO2 1977
ANO3 1978
ANO4 1979
ANO5 1980
ANO6 1981
ANO7 1982
ANO8 1983
ANO9 1984

1. n-acp de χ avec des métriques identité

Les données de cette analyse sont :
le 4-cube de données χ associé à la famille $\{p_i\}_{i\in[4]}$ où :

$$p_1 = 22,\ p_2 = 11,\quad p_3 = 4,\quad p_4 = 9.$$

Le premier mode est donc défini par les régions, le deuxième par les emplois, le troisième par les tailles des établissements et le quatrième par les 9 années. Les 4 espaces vectoriels associés E_i ($i \in [4]$) sont munis des métriques identité :

$$M_1 = I_{22},\quad M_2 = I_{11},\quad M_3 = I_4,\quad M_4 = I_9.$$

Si x est la forme 4-linéaire correspondant à χ (par rapport aux bases canoniques) alors on cherche la forme $\hat{x}$ de rang $\{q_i\}_{i\in[4]}$ plus proche de x où :

$$q_1 = 2,\quad q_2 = 2,\quad q_3 = 2,\quad q_4 = 2\ ;$$

ce qui revient à déterminer 2 régions idéales, 2 emplois idéaux, 2 tailles idéales et 2 années idéales.

Les sorties du programme TUCKALSN étant volumineuses on ne présente ici (pages 1.18) que les résultats plus importants. On les commente brièvement.

Page 1 : contient les spécifications concernant l'analyse, les sorties et les fichiers à sauvegarder (la notice d'utilisation du programme TUCKALSN se trouve dans l'annexe B).

Page 2 : on présente la configuration initiale qui sert de point de départ pour l'algorithme. Elle constitue "l'approximation de Tucker" au modèle TUCKERN. $u_o = (U_1, U_2, \ldots, U_n) \in \Gamma_o$, où U_k est la matrice vérifiant l'expression :

$$t^{k}_{X}\,{}^{k}_{X}\,U_k \equiv U_k \Lambda_k .$$

(les données ont été normalisées en les divisant par une constante de façon à ce que

$$\|x\|^2 = p = \prod_{i=1}^{4} p_i = 8712. \;)$$

Page 3 : on présente les coordonnées des projections des éléments dans les premiers plans principaux obtenus à partir des ACP des triplets $(\overset{1}{X},I,I)$, $(\overset{2}{X},I,I)$, $(\overset{3}{X},I,I)$, $(\overset{4}{X},I,I)$. Les représentations graphiques correspondantes coïncident presque point par point avec celles obtenues de la 4-ACP de $(\chi,\mathbb{Q}I)$, qui sont présentées dans les pages 8, 10, 12 et 14.

Page 4 : Histoire des itérations pour obtenir la solution du modèle TUCKERN. (plus précisément on obtient une solution du système S2 (ch. 3.6.3.1). Il a fallu 3 itérations pour satisfaire le seul de tolérance spécifié.

$$f(u_o) = 8514.05$$

$$f(F_1(u_o)) = 8514.36$$

$$f(F_2(F_1(u_o)) = 8515.33$$

$$f(F_4(F_3(F_2(F_1(u_o))))) = f(F(u_o)) = f(u_1) = 8516.31$$

$$f(u_3) = 8516.409$$

Page 5 : Résumé concernant la solution du modèle TUCKERN. On fait remarquer la convergence de la suite $\{f(u_i)\}_i$ ainsi que celle de $\{u_i\}_i$.
La qualité de la représentation globale de la n-ACP de χ est :

$$Q(\chi) = 0.9775$$

qu'on compare à :

$$Q_2^1(X) = 0.9872 \; ; \quad Q_2^2(X) = 0.9890 \; ; \quad Q_2^3(X) = 0.9972 \; ; \quad Q_2^4(X) = 0.9997.$$

On constate que :

$$Q(\chi) \leq Q_2^i(X) \quad \forall i \in [4]. \quad \text{(ch. III, 93)}.$$

Page 6 : On présente les matrices U_i définissant la solution du modèle TUCKERN.

$$\bar{u} = (U_1, U_2, U_3, U_4) = u_3.$$

On exhibe aussi les matrices diagonales des valeurs propres Λ_i ; et on constate que

$$tr(\Lambda_1) = tr(\Lambda_2) = tr(\Lambda_3) = tr(\Lambda_4) = 8516.409.$$

On remarque que la deuxième valeur propre du mode ANNEES (le quatrième mode) est néglibeable par rapport à la première. Ceci veut dire que la deuxième année idéale contribue peu à l'analyse de notre cube de données, en d'autres termes, on peut considérer une seule variable pour expliquer le temps, ici le temps est linéaire.

Page 7 : Cube central.

h_{ijkl} représente les effectifs calculés pour l'année idéale l dans la région idéale i, dans l'emploi idéal j et dans les établissements de taille idéale k ($(i,j,k,l) \in x[2]$).
Exemple $h_{2211} = 12.826$.
On présente aussi le cube normalisé $\bar{h}$ dont $\bar{h}_{ijkl} = \frac{1}{\|x\|^2} (h_{ijkl})^2$.
Puisque

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \bar{h}_{ijkl} = \frac{\Sigma (h_{ijkl})^2}{\|x\|^2} = \frac{\|\hat{x}\|^2}{\|x\|^2} = Q(x) = 0.9775$$

On peut dire que ce cube réalise une décomposition de la qualité de la représentation globale de l'analyse, et il montre l'importance des éléments pour expliquer le carré de la norme de $\hat{x}$. Ainsi, la 2ème année idéale ne contribue à expliquer cette norme que dans un 0.3 % (0.001 + 0.002).
Pour l'interprétation du cube central on peut donc se borner à l'analyse du 3-cube défini par le premier facteur du temps. C'est le cube défini dans la partie gauche de la page 7.

Les 1, 2 et 3-représentations matricielles de ce cube sont respectivement les matrices :

		R1	R2
T1	E1	90.557	-0.697
	E2	0.429	12.826
T2	E1	-1.024	-3.959
	E2	8.038	6.490

		E1	E2
T1	R1	90.557	0.429
	R2	-0.697	12.826
T2	R1	-1.024	8.038
	R2	-3.959	6.490

		T1	T2
E1	R1	90.557	-1.024
	R2	-0.697	-3.959
E2	R1	0.429	8.038
	R2	12.826	6.490

La première représentation montre que la première région idéale est fortement liée à E1 et T1 (premier emplois idéal et première taille idéale). La deuxième région idéale serait globalement indépendante de la taille des établissements et plus influencée par le deuxième que par le premier emploi idéal.
La 2-représentation montre que le premier emploi (idéal) est très largement déterminé par R1 et T1 tandis que le deuxième emploi serait plus attaché à la deuxième région idéale.
La 3-représentation nous conduit à affirmer que la première taille idéale dépend de la première région du premier emploi, et que la deuxième taille dépendrait surtout du second emploi idéal.

Ces renseignements que l'on peut tirer du cube central, nous aident pour l'interprétation des représentations graphiques qui suivent.

Page 8 : Représentation cartésienne de l'espace des régions.

Les régions idéales définissent les axes. On appelle ici facteurs les formes linéaires qui fournissent les coordonnées sur les axes.

On remarque que la région faisant le plus petit angle avec le premier axe est 21AC (Provence-Alpes-Côte d'Azur) ; c'est donc la région la plus semblable à la région idéale 1.

Le premier facteur de ce mode mesurerait pour chaque région les effectifs travaillant dans le secteur des services, tandis que le deuxième oppose les régions où prédomine l'industrie à la région 01IF (Ile de France) qui est caractérisée par la forte proportion des emplois dans le secteur tertiaire.

Appelons E1 et E2 l'ensemble des salariés travaillant dans les services et l'industrie respectivement, et soit R_i l'ensemble des salariés dans la région réelle r_i (i=1,...,22). En utilisant la lecture du cube central on peut dire que le premier facteur de ce mode est approximativement

$$f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$$
$$r_i \to \text{card}(E1 \cap R_i)$$

et le deuxième est :

$$f_2 : E_1 \to IR$$
$$r_i \to \text{card}(E2 \cap R_i) - \text{card}(E1 \cap R_i).$$

Une région se plaçant sur le premier axe est donc telle que les emplois du secteur tertiaire et du secteur industriel sont équilibrés. Dans les régions au dessous du premier axe il y aurait une prédominance des services et dans celles au dessus de l'axe les salariés du secteur industriel seraient plus nombreux. On distingue alors deux types fondamentaux de régions : les régions à dominante secondaire et les régions à dominante tertiaire.

Ainsi, dans la région 21AC il y a un équilibre entre les deux secteurs, dans l'Ile de France prédomine le secteur tertiaire, et la région où le secteur industriel est plus important, serait 11FC suivie de 03PI (Franche-Comté ; Picardie). Les effectifs du secteur services dans les régions 08NC (Nord-Pas de Calais) et 21AC sont du même ordre mais dans la première région il y a d'avantage de travailleurs dans l'industrie.

La projection orthogonale sur la bissectrice du premier cadran permet de comparer les emplois industriels des différentes régions. Ainsi, même si 18RA (Rhône-Alpes) est plus industrielle que 01IF le nombre d'emplois industriels est supérieur dans cette dernière que dans 18RA.

Le tableau de contingence "Emplois-Régions" confirme les conclusions remarquées.

	01IF	02CA	03PI	04HN	05CE	06BN	07BO	08NC	09LO	10AL	11FC	12PL	13BR	14PC	15AQ	16MP	17LI	18RA	19AU
EPCA	882.	28.	39.	53.	50.	21.	33.	88.	53.	46.	28.	59.	34.	22.	63.	55.	11.	192.	28.
ESCA	3479.	151.	170.	207.	265.	132.	168.	434.	253.	234.	114.	326.	250.	150.	316.	260.	66.	796.	126.
EPTA	1687.	85.	120.	170.	163.	72.	111.	263.	177.	129.	100.	199.	106.	74.	171.	144.	38.	538.	93.
ESTA	2066.	95.	93.	111.	172.	73.	123.	275.	159.	153.	62.	209.	182.	89.	193.	172.	46.	517.	97.
EPPE	783.	108.	130.	145.	165.	80.	111.	295.	220.	133.	87.	193.	115.	81.	143.	125.	41.	458.	84.
EOAQ	6006.	807.	1027.	1171.	1315.	691.	847.	2546.	1509.	1073.	629.	1778.	1178.	710.	1273.	1081.	383.	3316.	635.
EOSQ	3681.	732.	901.	878.	1101.	545.	747.	1737.	1041.	785.	768.	1140.	734.	553.	785.	627.	261.	2550.	623.
ESPE	1178.	56.	72.	89.	104.	50.	62.	188.	107.	90.	43.	123.	91.	56.	117.	88.	24.	273.	43.
ESPQ	8001.	524.	587.	766.	924.	482.	620.	1559.	934.	823.	387.	1148.	954.	564.	1034.	808.	243.	2410.	427.
ESPN	2923.	221.	256.	322.	364.	206.	251.	626.	396.	309.	173.	473.	401.	210.	410.	356.	92.	993.	201.
EDIV	469.	24.	26.	30.	31.	27.	22.	120.	30.	24.	18.	85.	58.	24.	47.	37.	10.	125.	23.

	20LR	21AC	22CO
EPCA	27.	110.	1.
ESCA	191.	557.	15.
EPTA	68.	250.	2.
ESTA	120.	357.	8.
EPPE	84.	230.	5.
EOAQ	698.	1806.	50.
EOSQ	435.	1031.	42.
ESPE	67.	221.	6.
ESPQ	636.	1816.	62.
ESPN	287.	829.	27.
EDIV	32.	96.	4.

Page 9 :Tableaux des contributions absolues et relatives du premier mode.

On constate que toutes les régions sont assez bien représentées. Ceci veut dire que la connaissance des matrices U_i et du cube central h permet de reproduire assez fidèlement les sections du cube χ associées à chacune des régions. 22CO (Corse), 11FC et 20LR (Languedoc-Roussillon) sont tout de même un peu moins représentées.

On remarque que les contributions absolues des axes au carré de la norme de x coïncident avec les valeurs propres correspondantes car les métriques utilisées sont les matrices unité. Les valeurs propres représentent la partie de l'inertie totale du nuage des régions expliquée par les axes.

On remarque finalement que la région 01IF apporte 60 % de la contribution absolue du premier axe et 37 % de celle du deuxième axe.

Page 10 : Représentation cartésienne de l'espace des emplois.
Les emplois idéaux définissent les axes.
Le premier facteur de ce mode mesure approximativement pour chaque CSP le nombre d'effectifs dans la première région idéale, c'est-à-dire, dans les régions à dominante tertiaire. Le deuxième axe établit une opposition entre les emplois industriels et les emplois du secteur services.

Supposons que l'on puisse classer les régions en deux groupes :
1. régions à dominante tertiaire
2. régions à dominante secondaire.

Notons R1 et R2 l'ensemble des salariés des deux groupes de régions respectivement et C_i l'ensemble des salariés classés dans la CSP c_i ($i = 1,\ldots,11$). Alors le premier facteur de ce mode sera :

$$f_1(c_i) = \text{card}(R1 \cap C_i)$$

et le deuxième

$$f_2(c_i) = \text{card}(R2 \cap C_i) - \text{card}(R1 \cap C_i).$$

On en déduit que dans les régions à dominante tertiaire le type d'emploi le plus répandu serait ESPQ (Personnel qualifié des services) suivi de EOAQ (Ouvriers qualifiés). Les emplois faisant un angle petit avec la partie positive de l'axe 2 sont caractéristiques de l'industrie : ceux plus corrélés avec la partie négative sont plutôt caractéristiques des services. Dans les régions industrielles le pourcentage d'ouvriers sans qualification (EOSQ) est plus important que dans les autres régions, et la proportion des ordres de services (ESCA) est plus faible. Par rapport aux régions industrielles dans les régions à dominante tertiaire la fraction d'ouvriers sans qualification est faible et celles des cadres, techniques et personnel d'encadrement des services sont plus importantes.

La projection orthogonale sur la bissectrice du premier cadran permet de comparer le volume des emplois dans les régions industrielles : ce sont les ouvriers qualifiés les plus nombreux suivis par les ouvriers sans qualification et par le personnel qualifié des services.

Page 11 : Tableaux des contributions absolues et relatives.

On constate que,sauf les cadres, les techniciens et agents techniques de la production (EPCA, EPTA),toutes les catégories professionnelles sont bien représentées.

Page 12 : Représentation cartésienne de l'espace de "Tailles des établissements".

Le premier facteur de ce mode mesure approximativement les effectifs des services dans les régions à dominante tertiaire, le deuxième oppose les petits aux grands et moyens établissements. On peut dire qu'il mesure les effectifs de la production moins les effectifs des services dans les régions à dominante tertiaire.

Notons T_i l'ensemble des salariés travaillant dans les établissements de taille t_i ($i = 1,\ldots,4$). Les deux premiers facteurs seraient donc définis par :

$$f_1(t_i) = \text{card}(E1 \cap R1 \cap T_i)$$

$$f_2(t_i) = \text{card}(E2 \cap T_i) - f_1(t_i).$$

Ainsi, dans le secteur des services des régions à dominante tertiaire les salariés des petits établissements sont les plus nombreux et les travailleurs des établissements de taille 3 (TA03) sont les moins nombreux

Les tailles faisant le plus petit angle avec la partie positive du deuxième axe sont celles où la proposition des salariés du secteur secondaire est plus grande. On peut affirmer par exemple qu'en Franche-Comté (11FC) il y a d'avantage de salariés dans les grands que dans les petits établissements.

Page 13 : Tableaux des contributions absolues et relatives pour le 3ème mode. On constate que les grands établissements sont moins bien représentés que les autres.

Page 14 : Représentation cartésienne de l'espace des années.
Le premier axe ne permet pas de différencier les années, puisque toutes les années ont à peu près le même volume d'emplois on peut dire qu'il s'agit d'un axe de taille. Sur l'axe 2 on trouve les années ordonnées chronologiquement, ceci veut dire que même si elles est petite, on peut parler d'une certaine évolution de la population économiquement active de la France (voir ci-dessous).

Page 15 : On constate que toutes les années ont à peu près la même importance pour l'analyse et qu'elles sont aussi bien représentées les unes que les autres.

Page 16 - 17 : Représentation graphique des couples (emplois, années). Cette représentation provient de l'ACP du tableau (calculé) croisant (Emplois x Années) avec (Régions x Taille). On en déduit que les effectifs correspondant aux emplois propres du secteur tertiaire ont une tendance à augmenter dans le temps ; par contre les emplois du secteur industriel ont une petite tendance à la baisse. Il faut excepter cependant les cadres (EPCA) et les techniciens de la production (EPTA).

Page 18 : Représentation graphique des couples (tailles, années). Cette représentation provient du tableau croisant (Tailles x Années) avec (Régions x Emplois).

On est amené à dire que le nombre des salariés travaillant dans les petits établissements augmente avec le temps, tandis que les effectifs des grandes entreprises diminuent. Les tableaux de contingence Année-Emplois et Année-Taille confirment ces conclusions.

		EPCA	ESCA	EPTA	ESTA	EPPE	EOAQ	EOSQ	ESPE	ESPQ	ESPN	EDIV	taO1	taO2	taO3	taO4
ANO1	I	203.	870.	531.	550.	445.	3497.	2695.	329.	2711	1046.	131	5645.	2925.	1780.	2658.
ANO2	I	202.	884.	526.	558.	439.	3464.	2677.	332.	2755.	1078.	137	5795.	2912.	1744.	2601.
ANO3	I	219.	948.	539.	585.	440.	3452.	2531.	347.	2816.	1116.	143	5934.	2919.	1715.	2569.
ANO4	I	220.	967.	538.	593.	437.	3451.	2526.	350.	2865.	1144.	149	6110.	2952.	1715.	2463.
ANO5	I	218.	977.	533.	597.	430.	3402.	2487.	350.	2885.	1166.	156	6220.	2941.	1693.	2346.
ANO6	I	221.	996.	540.	618.	424.	3431.	2263.	358.	2904.	1167.	156	6264.	2906.	1672.	2236.
ANO7	I	219.	1007.	534.	625.	417.	3387.	2236.	362.	2932.	1190.	161	6332.	2898.	1646.	2194.
ANO8	I	213.	1009.	520.	625.	400.	3277.	2174.	362.	2934.	1207.	164	6369.	2838.	1586.	2092.
ANO9	I	208.	1005.	507.	620.	385.	3167.	2109.	361.	2916.	1212.	167	6327.	2772.	1543.	2014.
	I															
		EPCA	ESCA	EPTA	ESTA	EPPE	EOAQ	EOSQ	ESPE	ESPQ	ESPN	EDIV	taO1	taO2	taO3	taO4

THE TOTAL ARRAY CORE REQUIREMENT IS: 304656 BYTES OR APPROXIMATELY 298K
THE CORE REQUIREMENT FOR ARRAYS PLUS PROGRAM IS: 438K

INPUT SPECIFICATIONS

DATA SPECIFICATIONS:

NUMBER OF ELEMENTS IN MODE 1	22
NUMBER OF ELEMENTS IN MODE 2	11
NUMBER OF ELEMENTS IN MODE 3	4
NUMBER OF ELEMENTS IN MODE 4	9
NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 1	2
NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 2	2
NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 3	2
NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 4	2
TYPE OF METRICS (O=ALL IDENTITY,1=ALL DIAGONAL,2=NO)	0

INPUT AND OUTPUT SPECIFICATIONS:

DATA INPUT ON UNIT	8
METRICS INPUT ON UNIT	0
PRINTING OF INPUT DATA (O=NO,1=YES)	0
OUTPUT OF INITIAL CONFIGURATION (O=NO,1=YES)	1
HISTORY OF OPTIMAL APPROXIMATION	1
PRINTING OF CORE MATRIX (O=NO,1=YES)	1
OUTPUT OF ACP OF CARTESIAN PRODUCTS OF THE MODES (O=NO,N=NUMBER OF PRODUCTS (N<5))	3

PARTITIONS FOR THE PRODUCTS OF MODES:

```
      1:   1 4
           2 3
      2:   1 3
           2 4
      3:   1 2
           3 4
```

OUTPUT OF CORE MATRIX TO UNIT	0
OUTPUT OF FITTED AND RESIDUAL SUMS OF SQUARES TO UNIT (O=NO=DEFAULT)	0
OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 1 TO UNIT	0
OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 2 TO UNIT	0
OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 3 TO UNIT	0
OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 4 TO UNIT	0

ANALYSIS SPECIFICATIONS:

MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS (MAIN)	30
CONVERGENCE CRITERIUM FOR OPTIMAL APPROXIMATION	0.01000000
CONVERGENCE CRITERION FOR COMPONENT MATRICES	0.01000000

LABELS FOR THE N MODES:

22-REGIONS
11-EMPLOIS
4-TAILLES
9-ANNEES

LABELS FOR THE ELEMENTS:

01If	02Ca	03Pi	04Hn	05Ce	06Bn	07Bo	08Nc	09Lo	10Al
11Fc	12Pl	13Br	14Pc	15Aq	16Mp	17Li	18Ra	19Au	20Lr
21Ac	22Co								

EPCA	ESCA	EPTA	ESTA	EPPE	EOAQ	EOSQ	ESPE	ESPQ	ESPN
EDIV									

TA01	TA02	TA03	TA04

an01	an02	an03	an04	an05	an06	an07	an08	an09

DATA INPUT FORMAT (THREE CARDS):

(22F8.3)

SUM OF ORIGINAL DATA = 117324.95700

SUM OF SQUARED ORIGINAL DATA= 8321402.74765

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE

INITIAL CONFIGURATION

EIGEN VECTOR MATRICES AND EIGEN VALUES
FOR TRANSFORMED PROBLEM (IDENTITY METRICS)

MODE 1 : 22-REGIONS
EIGEN VECTOR MATRIX U(1)

*	1.	2.
1 *	0.779	-0.613
2 *	0.077	0.138
3 *	0.092	0.173
4 *	0.105	0.146
5 *	0.132	0.203
6 *	0.070	0.107
7 *	0.088	0.133
8 *	0.217	0.311
9 *	0.132	0.188
10 *	0.104	0.107
11 *	0.064	0.130
12 *	0.166	0.239
13 *	0.127	0.142
14 *	0.077	0.100
15 *	0.139	0.140
16 *	0.115	0.123
17 *	0.037	0.062
18 *	0.337	0.409
19 *	0.069	0.108
20 *	0.085	0.081
21 *	0.222	0.106
22 *	0.008	0.008

EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.
1 *	8349.800	250.343

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.
1 *	0.958	0.029

MODE 2 : 11-EMPLOIS
EIGEN VECTOR MATRIX U(2)

*	1.	2.
1 *	0.048	-0.023
2 *	0.246	-0.328
3 *	0.101	0.039
4 *	0.143	-0.157
5 *	0.067	0.083
6 *	0.567	0.415
7 *	0.345	0.637
8 *	0.075	-0.037
9 *	0.628	-0.496
10 *	0.245	-0.179
11 *	0.039	-0.050

EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.
1 *	8309.215	306.954

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.
1 *	0.954	0.035

MODE 3 : 4-TAILLES
EIGEN VECTOR MATRIX U(3)

*	1.	2.
1 *	0.817	-0.520
2 *	0.397	0.226
3 *	0.235	0.299
4 *	0.345	0.768

EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.
1 *	8401.547	285.883

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.
1 *	0.964	0.033

MODE 4 : 9-ANNEES
EIGEN VECTOR MATRIX U(4)

*	1.	2.
1 *	0.330	-0.530
2 *	0.332	-0.425
3 *	0.332	-0.244
4 *	0.336	-0.122
5 *	0.336	0.006
6 *	0.335	0.209
7 *	0.336	0.270
8 *	0.334	0.381
9 *	0.330	0.450

EIGEN VALUES OF MODE 4

*	1.	2.
1 *	8676.672	32.932

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 4

*	1.	2.
1 *	0.996	0.004

NOTES:
THE EIGEN VECTOR MATRIX IS COLUMNWISE ORTHONORMAL.
THE EIGEN VALUES ARE STANDARDIZED BY DIVISION THROUGH SSQ(TOTAL).

NOTES:
THE EIGEN VECTOR MATRICES OF THE INITIAL CONFIGURATION RESULT FROM ORDINARY (TWO-MODE) PRINCIPAL COMPONENT ANALYSES ON 'STRING-OUT' MATRICES. THEY ARE THE SAME AS THOSE FROM A IMMEDIATE GENERALISATION OF TUCKER(1966) METHOD 1 ANALYSIS.
THE EIGEN MATRICES, HOWEVER, CONTAIN ONLY AN APPROXIMATIONN TO THE REAL MATRICES AS THE ITERATION PROCEDURE IS NOT CARRIED OUT UNTIL CONVERGENCE.

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 1 : 22-REGIONS
(TUCKER SOLUTION)

NR.	LABL	1.	2.
1	01If	71.152	-9.696
2	02Ca	7.061	2.180
3	03Pi	8.401	2.735
4	04Hn	9.627	2.315
5	05Ce	12.032	3.217
6	06Bn	6.441	1.691
7	07Bo	8.066	2.108
8	08Nc	19.846	4.925
9	09Lo	12.020	2.982
10	10Al	9.473	1.698
11	11Fc	5.859	2.058
12	12Pl	15.207	3.774
13	13Br	11.621	2.251
14	14Pc	7.065	1.589
15	15Aq	12.689	2.220
16	16Mp	10.546	1.943
17	17Li	3.377	0.975
18	18Ra	30.776	6.474
19	19Au	6.260	1.717
20	20Lr	7.762	1.275
21	21Ac	20.331	1.683
22	22Co	0.754	0.124

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 3 : 4-TAILLES
(TUCKER SOLUTION)

NR.	LABL	1.	2.
1	TA01	74.898	-8.791
2	TA02	36.430	3.815
3	TA03	21.562	5.055
4	TA04	31.620	12.980

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 2 : 11-EMPLOIS
(TUCKER SOLUTION)

NR.	LABL	1.	2.
1	EPCA	4.405	-0.407
2	ESCA	22.421	-5.743
3	EPTA	9.223	0.690
4	ESTA	13.054	-2.755
5	EPPE	6.087	1.454
6	EOAQ	51.676	7.264
7	EOSQ	31.439	11.154
8	ESPE	6.815	-0.643
9	ESPQ	57.255	-8.685
10	ESPN	22.327	-3.136
11	EDIV	3.549	-0.868

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 4 : 9-ANNEES
(TUCKER SOLUTION)

NR.	LABL	1.	2.
1	an01	30.708	-3.040
2	an02	30.901	-2.441
3	an03	30.961	-1.400
4	an04	31.299	-0.703
5	an05	31.314	0.034
6	an06	31.159	1.200
7	an07	31.255	1.549
8	an08	31.145	2.184
9	an09	30.696	2.583

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE

HISTORY OF ITERATION FOR OPTIMAL APPROXIMATION
****

STEP	SSQ(FIT)	INCREMENT	DIFFERENCE
1.1	8514.05105519	8514.05105519	
			||U1(0)-U1(1)||= 0.04355547
1.2	8514.36810186	0.31704667	
			||U2(0)-U2(1)||= 0.02252955
1.3	8515.33271825	0.96461640	
			||U3(0)-U3(1)||= 0.11317777
1.4	8516.31123716	0.97851891	
			||U4(0)-U4(1)||= 0.02807530
2.1	8516.34274927	0.03151210	
			||U1(1)-U1(2)||= 0.01348352
2.2	8516.38382744	0.04107817	
			||U2(1)-U2(2)||= 0.00707920
2.3	8516.39563813	0.01181069	
			||U3(1)-U3(2)||= 0.00703264
2.4	8516.39939903	0.00376090	
			||U4(1)-U4(2)||= 0.00043556
3.1	8516.40257615	0.00317711	
			||U1(2)-U1(3)||= 0.00532841
3.2	8516.40825089	0.00567474	
			||U2(2)-U2(3)||= 0.00128713
3.3	8516.40863562	0.00038473	
			||U3(2)-U3(3)||= 0.00098461
3.4	8516.40870951	0.00007388	
			||U4(2)-U4(3)||= 0.00009654

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE

RESULTS OF OPTIMAL FACTORISATION

CONVERGENCE OF THE FITTED SUM OF SQUARES

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(1)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(2)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(3)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(4)

NUMBER OF ITERATIONS 3

			RAW	STANDARDIZED
TOTAL SU OF SQUARES (=*P(I))		: SSQ(TOTAL)	8712.000	1.0000
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES	FOR ACP(X1)	: X1.ESTSSQ(FIT)	8600.143	0.9872
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES	FOR ACP(X2)	: X2.ESTSSQ(FIT)	8616.170	0.9890
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES	FOR ACP(X3)	: X3.ESTSSQ(FIT)	8687.430	0.9972
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES	FOR ACP(X4)	: X4.ESTSSQ(FIT)	8709.604	0.9997
FITTED SUM OF SQUARES		: SSQ(FIT)	8516.409	0.9775
RESIDUAL SUM OF SQUARES		: SSQ(RESIDUAL)	195.591	0.0225
SSQ(FIT) - X1.ESTSSQ(FIT)			83.734	0.0096
SSQ(FIT) - X2.ESTSSQ(FIT)			99.761	0.0115
SSQ(FIT) - X3.ESTSSQ(FIT)			171.021	0.0196
SSQ(FIT) - X4.ESTSSQ(FIT)			193.195	0.0222
INCREMENT IN FIT			2.358	0.0003

NOTES:

1. THE ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP OF X(I) IS AN APPROXIMATION OF THE AMOUNT OF VARIATION EXPLAINED BY THE COMPONENTS OF AN ORDINARY PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS ON THE MODE NUMBER I.
THE FITTED SUM OF SQUARES -SSQ(FIT)- WILL ALWAYS BE SMALLER THAN OR EQUAL TO THE SMALLEST OF THE X(I).SSQ(FIT).
SOMETIMES DUE TO THE CRUDE APPROXIMATIONS THE SSQ(FIT) MIGHT BE SLIGHTLY LARGER, RESULTING IN A NEGATIVE DIFFERENCE BETWEEN THE SSQ(FIT) AND A X(I).ESTSSQ(FIT).

2. SSQ(TOTAL) HAS BEEN INTERNALLY RESCALED TO P1*P2*...*Pn STANDARDIZED QUANTITIES HAVE BEEN DIVIDED BY SSQ(TOTAL).

3. SSQ(TOTAL) = SSQ(FIT) + SSQ(RESIDUAL).

4. THE INCREMENT IN FIT INDICATES THE IMPROVEMENT BY ITERATION IN THE SSQ(FIT) OVER THE SSQ(FIT) DERIVED FROM THE INITIAL CONFIGURATIONS OF THE COMPONENTS.

TUCKALSN VERSION POLIT .(06/85) I.M.S.S.

THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE

EIGEN VECTOR MATRICES AND EIGEN VALUES
FOR TRANSFORMED PROBLEM (IDENTITY METRICS)

MODE 1 : 22-REGIONS
EIGEN VECTOR MATRIX U(1)

*	1.	2.
1	0.777	-0.608
2	0.077	0.137
3	0.092	0.183
4	0.106	0.153
5	0.132	0.202
6	0.071	0.109
7	0.088	0.135
8	0.218	0.316
9	0.132	0.192
10	0.104	0.108
11	0.064	0.156
12	0.167	0.228
13	0.127	0.122
14	0.077	0.099
15	0.139	0.127
16	0.116	0.117
17	0.037	0.058
18	0.338	0.417
19	0.068	0.126
20	0.085	0.068
21	0.223	0.081
22	0.008	0.007

EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.
1	8292.994	223.408

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.
1	0.952	0.026

MODE 2 : 11-EMPLOIS
EIGEN VECTOR MATRIX U(2)

*	1.	2.
1	0.048	-0.027
2	0.247	-0.338
3	0.101	0.038
4	0.144	-0.160
5	0.066	0.083
6	0.565	0.426
7	0.342	0.628
8	0.075	-0.040
9	0.630	-0.490
10	0.246	-0.174
11	0.039	-0.052

EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.
1	8232.958	283.450

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.
1	0.945	0.033

MODE 3 : 4-TAILLES
EIGEN VECTOR MATRIX U(3)

*	1.	2.
1	0.817	-0.545
2	0.397	0.323
3	0.235	0.320
4	0.344	0.704

EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.
1	8376.541	139.868

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.
1	0.961	0.016

MODE 4 : 9-ANNEES
EIGEN VECTOR MATRIX U(4)

*	1.	2.
1	0.329	-0.540
2	0.331	-0.419
3	0.332	-0.243
4	0.336	-0.114
5	0.336	0.015
6	0.335	0.192
7	0.336	0.259
8	0.335	0.382
9	0.330	0.459

EIGEN VALUES OF MODE 4

*	1.	2.
1	8489.167	27.242

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 4

*	1.	2.
1	0.974	0.003

NOTES:
THE EIGEN VECTOR MATRIX IS COLUMNWISE ORTHONORMAL.
THE EIGEN VALUES ARE STANDARDIZED BY DIVISION THROUGH SSQ(TOTAL).

```
TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
                    THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

                    ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE
-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

 CORE MATRIX
*************

 VELOCITY OF VARIATION OF THE INDEX:   4  3  2  1
 THE INDEX IN THE RIGHT ARE THE FASTED.

MODE 1 : 22-REGIONS

MODE 2 : 11-EMPLOIS
```

```
MODE 4 : 9-ANNEES        COMPONENT 1
MODE 3 : 4-TAILLES       COMPONENT 1
SCORES OF CORE MATRIX
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *   90.557     0.429
  2 *   -0.697    12.826

STANDARDIZED SQUARES
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *    0.941     0.000
  2 *    0.000     0.019
```

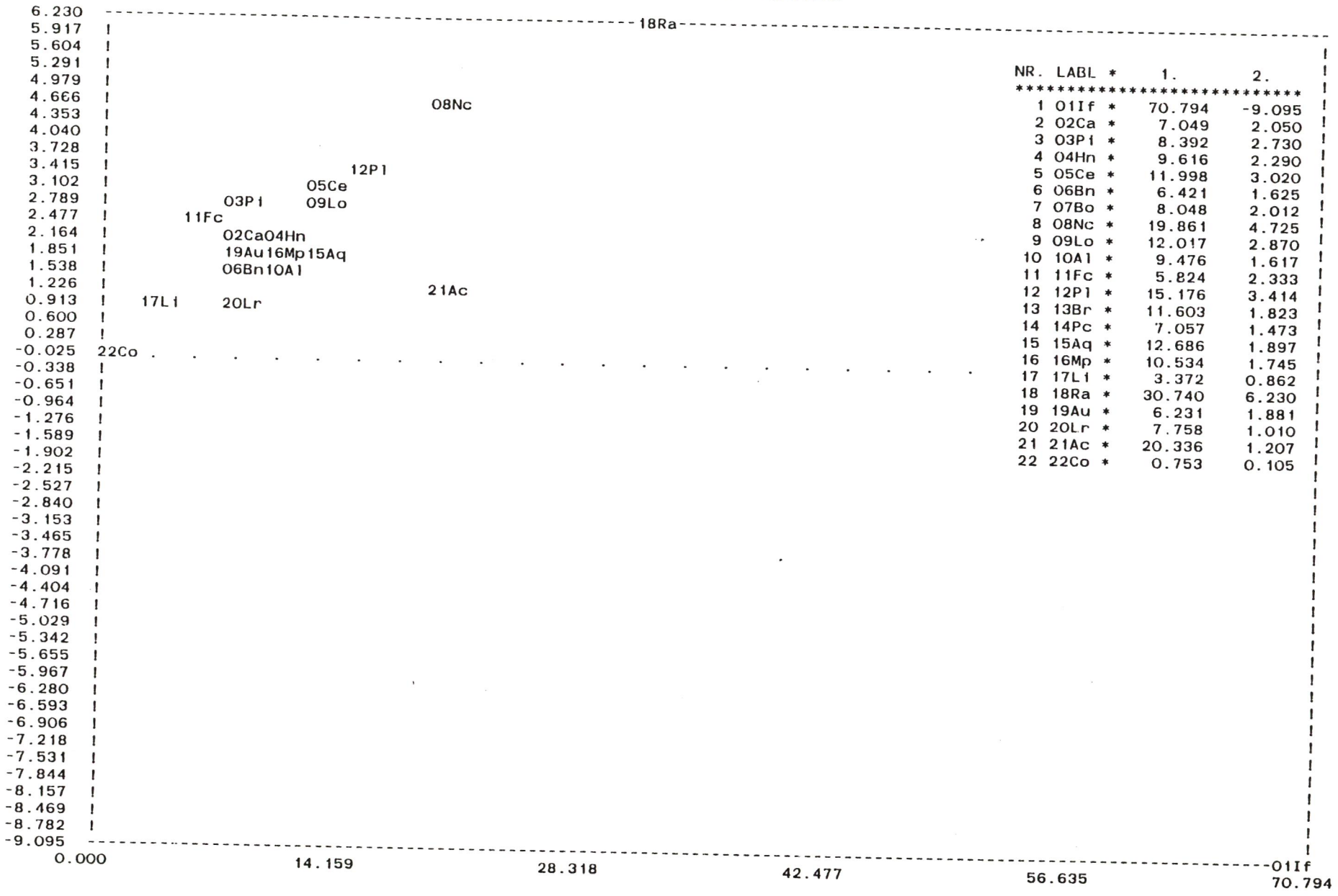
```
MODE 4 : 9-ANNEES        COMPONENT 1
MODE 3 : 4-TAILLES       COMPONENT 2
SCORES OF CORE MATRIX
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *   -1.024     8.038
  2 *   -3.959     6.490

STANDARDIZED SQUARES
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *    0.000     0.007
  2 *    0.002     0.005
```

```
MODE 4 : 9-ANNEES        COMPONENT 2
MODE 3 : 4-TAILLES       COMPONENT 1
SCORES OF CORE MATRIX
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *    0.127    -3.222
  2 *    0.653    -0.091

STANDARDIZED SQUARES
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *    0.000     0.001
  2 *    0.000     0.000
```

```
MODE 4 : 9-ANNEES        COMPONENT 2
MODE 3 : 4-TAILLES       COMPONENT 2
SCORES OF CORE MATRIX
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *   -3.841    -1.162
  2 *   -0.103    -0.542

STANDARDIZED SQUARES
  MODE 2
MODE 1

    *     1.         2.
***********************
  1 *    0.002     0.000
  2 *    0.000     0.000
```

PROJECTION OF THE 22 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL



NR.	LABL	*	1.	2.
1	01If	*	70.794	-9.095
2	02Ca	*	7.049	2.050
3	03Pi	*	8.392	2.730
4	04Hn	*	9.616	2.290
5	05Ce	*	11.998	3.020
6	06Bn	*	6.421	1.625
7	07Bo	*	8.048	2.012
8	08Nc	*	19.861	4.725
9	09Lo	*	12.017	2.870
10	10Al	*	9.476	1.617
11	11Fc	*	5.824	2.333
12	12Pl	*	15.176	3.414
13	13Br	*	11.603	1.823
14	14Pc	*	7.057	1.473
15	15Aq	*	12.686	1.897
16	16Mp	*	10.534	1.745
17	17Li	*	3.372	0.862
18	18Ra	*	30.740	6.230
19	19Au	*	6.231	1.881
20	20Lr	*	7.758	1.010
21	21Ac	*	20.336	1.207
22	22Co	*	0.753	0.105

CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY

MODE 1 : 22-REGIONS

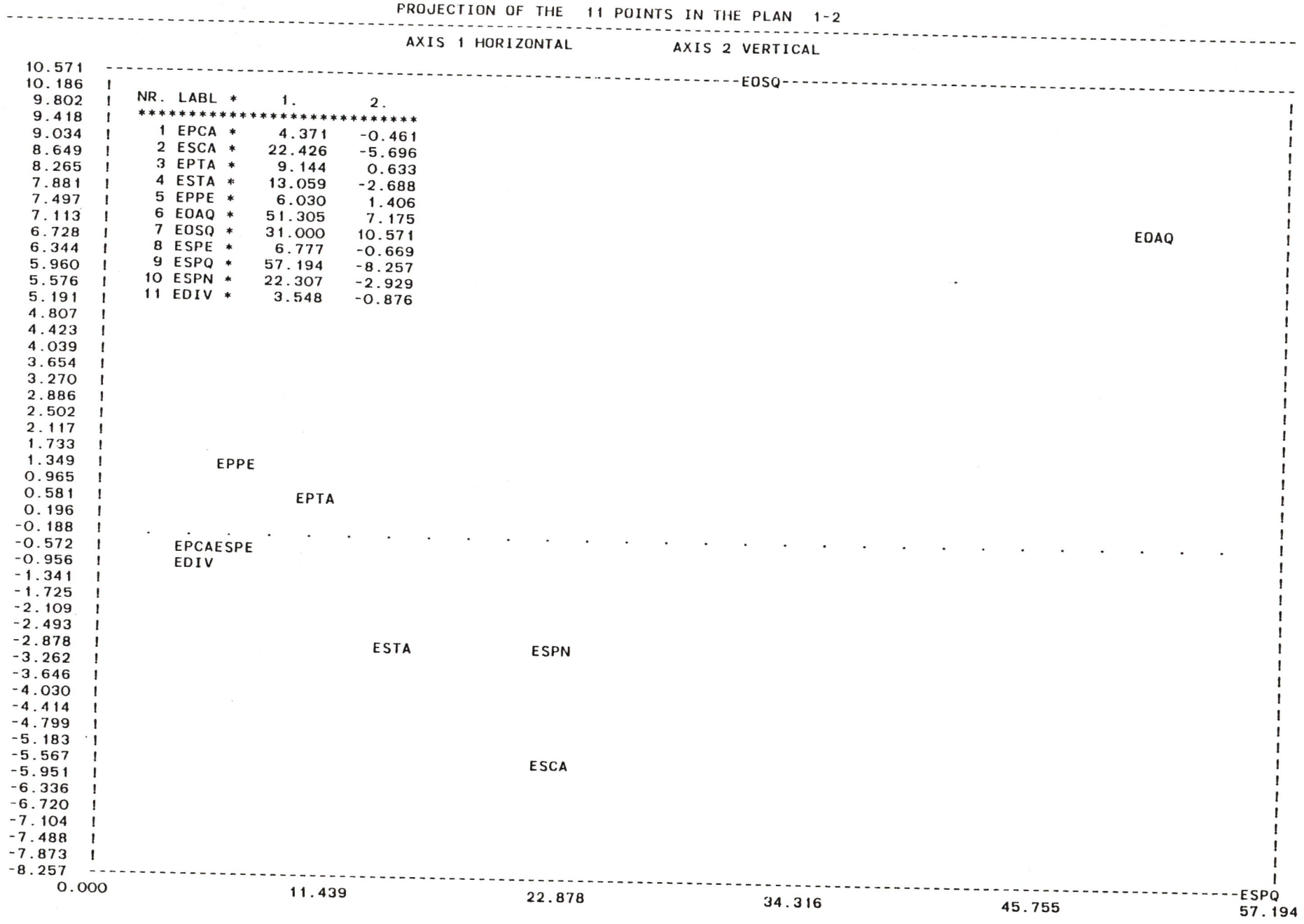
N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	01If	1.0001	71.8161	5011.826	82.717	0.000	0.000	0.00011	5094.5431	5157.5331	98.7791	71.376
2	02Ca	1.0001	7.4861	49.692	4.201	0.000	0.000	0.00011	53.8931	56.0481	96.1551	7.341
3	03Pi	1.0001	8.9851	70.434	7.454	0.000	0.000	0.00011	77.8881	80.7381	96.4701	8.825
4	04Hn	1.0001	10.1371	92.471	5.243	0.000	0.000	0.00011	97.7141	102.7541	95.0951	9.885
5	05Ce	1.0001	12.5331	143.947	9.119	0.000	0.000	0.00011	153.0661	157.0831	97.4421	12.372
6	06Bn	1.0001	6.7141	41.235	2.641	0.000	0.000	0.00011	43.8761	45.0711	97.3481	6.624
7	07Bo	1.0001	8.3681	64.765	4.050	0.000	0.000	0.00011	68.8151	70.0251	98.2721	8.295
8	08Nc	1.0001	20.9411	394.456	22.324	0.000	0.000	0.00011	416.7801	438.5271	95.0411	20.415
9	09Lo	1.0001	12.6161	144.396	8.237	0.000	0.000	0.00011	152.6331	159.1741	95.8901	12.354
10	10Al	1.0001	9.7381	89.790	2.615	0.000	0.000	0.00011	92.4051	94.8331	97.4391	9.613
11	11Fc	1.0001	6.6691	33.914	5.441	0.000	0.000	0.00011	39.3551	44.4691	88.5001	6.273
12	12Pl	1.0001	15.7301	230.304	11.653	0.000	0.000	0.00011	241.9561	247.4391	97.7841	15.555
13	13Br	1.0001	12.1481	134.639	3.324	0.000	0.000	0.00011	137.9631	147.5661	93.4921	11.746
14	14Pc	1.0001	7.3061	49.804	2.171	0.000	0.000	0.00011	51.9751	53.3781	97.3711	7.209
15	15Aq	1.0001	13.1541	160.927	3.598	0.000	0.000	0.00011	164.5251	173.0341	95.0821	12.827
16	16Mp	1.0001	10.9831	110.968	3.044	0.000	0.000	0.00011	114.0121	120.6191	94.5231	10.678
17	17Li	1.0001	3.5731	11.369	0.743	0.000	0.000	0.00011	12.1121	12.7641	94.8921	3.480
18	18Ra	1.0001	31.5281	944.949	38.808	0.000	0.000	0.00011	983.7571	994.0391	98.9661	31.365
19	19Au	1.0001	6.6531	38.821	3.537	0.000	0.000	0.00011	42.3591	44.2581	95.7081	6.508
20	20Lr	1.0001	8.2821	60.187	1.021	0.000	0.000	0.00011	61.2081	68.5891	89.2391	7.824
21	21Ac	1.0001	21.0541	413.533	1.458	0.000	0.000	0.00011	414.9911	443.2901	93.6161	20.371
22	22Co	1.0001	0.8761	0.568	0.011	0.000	0.000	0.00011	0.5791	0.7681	75.3271	0.761
	AXIS CONTRIBUTIONS			8292.994	223.408	0.000	0.000	0.00011	8516.4031	8712.0001	97.7551	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	01If	60.434	37.025	0.000	0.000	0.000	97.175	1.604	0.000	0.000	0.000	98.779
2	02Ca	0.599	1.880	0.000	0.000	0.000	88.661	7.495	0.000	0.000	0.000	96.155
3	03Pi	0.849	3.336	0.000	0.000	0.000	87.238	9.232	0.000	0.000	0.000	96.470
4	04Hn	1.115	2.347	0.000	0.000	0.000	89.993	5.102	0.000	0.000	0.000	95.095
5	05Ce	1.736	4.082	0.000	0.000	0.000	91.637	5.805	0.000	0.000	0.000	97.442
6	06Bn	0.497	1.182	0.000	0.000	0.000	91.488	5.860	0.000	0.000	0.000	97.348
7	07Bo	0.781	1.813	0.000	0.000	0.000	92.489	5.783	0.000	0.000	0.000	98.272
8	08Nc	4.756	9.992	0.000	0.000	0.000	89.950	5.091	0.000	0.000	0.000	95.041
9	09Lo	1.741	3.687	0.000	0.000	0.000	90.716	5.175	0.000	0.000	0.000	95.890
10	10Al	1.083	1.171	0.000	0.000	0.000	94.682	2.758	0.000	0.000	0.000	97.439
11	11Fc	0.409	2.435	0.000	0.000	0.000	76.265	12.235	0.000	0.000	0.000	88.500
12	12Pl	2.777	5.216	0.000	0.000	0.000	93.075	4.709	0.000	0.000	0.000	97.784
13	13Br	1.624	1.488	0.000	0.000	0.000	91.240	2.252	0.000	0.000	0.000	93.492
14	14Pc	0.601	0.972	0.000	0.000	0.000	93.304	4.067	0.000	0.000	0.000	97.371
15	15Aq	1.941	1.611	0.000	0.000	0.000	93.003	2.079	0.000	0.000	0.000	95.082
16	16Mp	1.338	1.363	0.000	0.000	0.000	91.999	2.524	0.000	0.000	0.000	94.523
17	17Li	0.137	0.332	0.000	0.000	0.000	89.073	5.819	0.000	0.000	0.000	94.892
18	18Ra	11.395	17.371	0.000	0.000	0.000	95.061	3.904	0.000	0.000	0.000	98.966
19	19Au	0.468	1.583	0.000	0.000	0.000	87.715	7.992	0.000	0.000	0.000	95.708
20	20Lr	0.726	0.457	0.000	0.000	0.000	87.751	1.488	0.000	0.000	0.000	89.239
21	21Ac	4.987	0.652	0.000	0.000	0.000	93.287	0.329	0.000	0.000	0.000	93.616
22	22Co	0.007	0.005	0.000	0.000	0.000	73.886	1.441	0.000	0.000	0.000	75.327
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	95.190	2.564	0.000	0.000	0.000	97.755

PROJECTION OF THE 11 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

NR.	LABL	*	1.	2.
1	EPCA	*	4.371	-0.461
2	ESCA	*	22.426	-5.696
3	EPTA	*	9.144	0.633
4	ESTA	*	13.059	-2.688
5	EPPE	*	6.030	1.406
6	EOAQ	*	51.305	7.175
7	EOSQ	*	31.000	10.571
8	ESPE	*	6.777	-0.669
9	ESPQ	*	57.194	-8.257
10	ESPN	*	22.307	-2.929
11	EDIV	*	3.548	-0.876



CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY
****

MODE 2 : 11-EMPLOIS

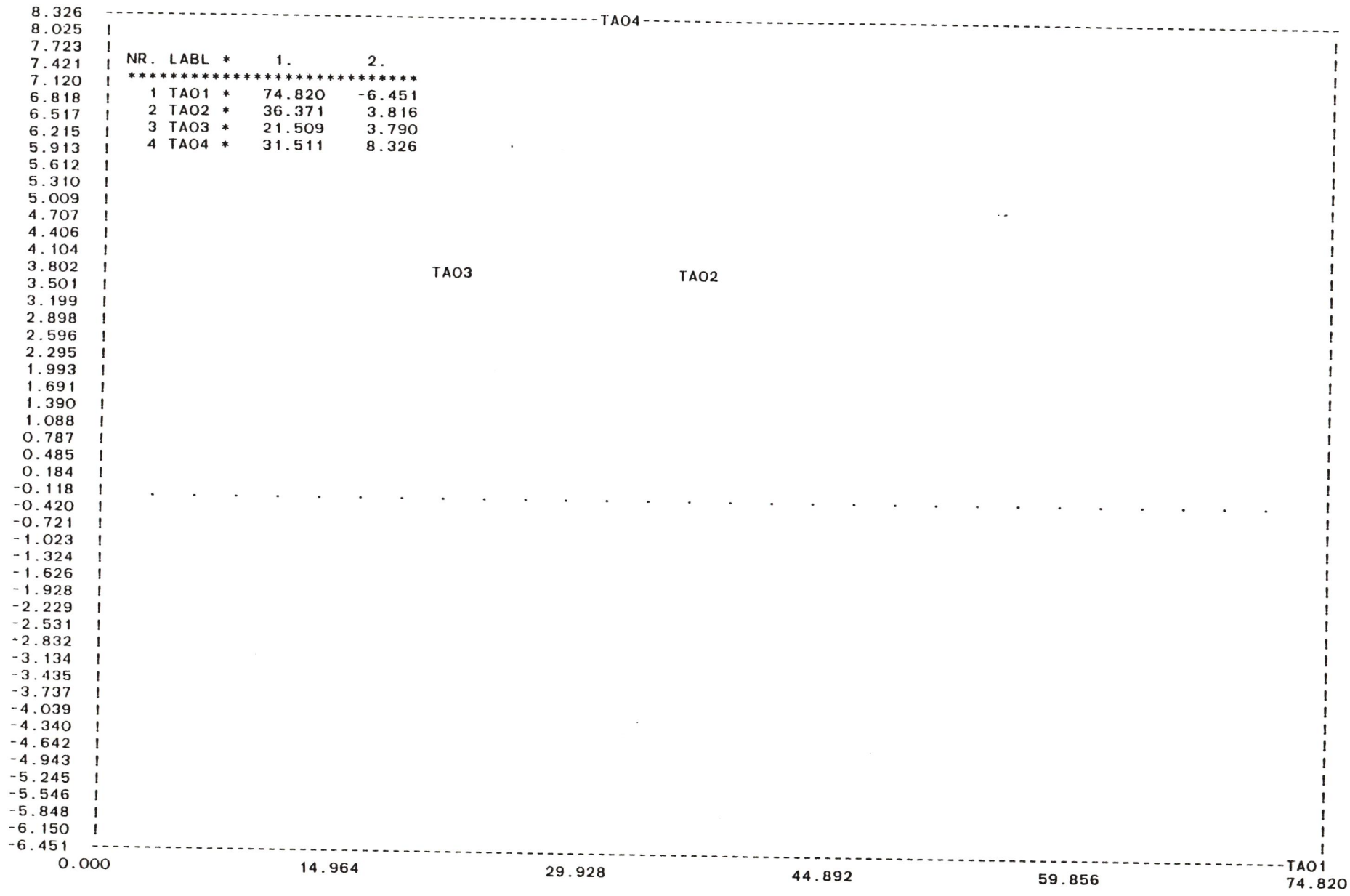
N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	EPCA	1.000	5.333	19.102	0.213	0.000	0.000	0.000	19.314	28.444	67.903	4.395
2	ESCA	1.000	23.268	502.906	32.445	0.000	0.000	0.000	535.352	541.389	98.885	23.138
3	EPTA	1.000	10.998	83.619	0.401	0.000	0.000	0.000	84.020	120.957	69.463	9.166
4	ESTA	1.000	13.492	170.548	7.227	0.000	0.000	0.000	177.775	182.038	97.658	13.333
5	EPPE	1.000	6.322	36.357	1.976	0.000	0.000	0.000	38.332	39.963	95.920	6.191
6	EOAQ	1.000	52.321	2632.163	51.483	0.000	0.000	0.000	2683.646	2737.527	98.032	51.804
7	EOSQ	1.000	33.519	961.019	111.738	0.000	0.000	0.000	1072.758	1123.535	95.481	32.753
8	ESPE	1.000	7.399	45.921	0.448	0.000	0.000	0.000	46.369	54.749	84.694	6.809
9	ESPQ	1.000	57.922	3271.128	68.175	0.000	0.000	0.000	3339.302	3354.923	99.534	57.787
10	ESPN	1.000	22.673	497.606	8.578	0.000	0.000	0.000	506.183	514.079	98.464	22.499
11	EDIV	1.000	3.794	12.589	0.767	0.000	0.000	0.000	13.356	14.396	92.777	3.655
	AXIS CONTRIBUTIONS			8232.958	283.450	0.000	0.000	0.000	8516.408	8712.000	97.755	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	EPCA	0.232	0.075	0.000	0.000	0.000	67.156	0.747	0.000	0.000	0.000	67.903
2	ESCA	6.108	11.447	0.000	0.000	0.000	92.892	5.993	0.000	0.000	0.000	98.885
3	EPTA	1.016	0.141	0.000	0.000	0.000	69.131	0.331	0.000	0.000	0.000	69.463
4	ESTA	2.072	2.550	0.000	0.000	0.000	93.688	3.970	0.000	0.000	0.000	97.658
5	EPPE	0.442	0.697	0.000	0.000	0.000	90.977	4.944	0.000	0.000	0.000	95.920
6	EOAQ	31.971	18.163	0.000	0.000	0.000	96.151	1.881	0.000	0.000	0.000	98.032
7	EOSQ	11.673	39.421	0.000	0.000	0.000	85.535	9.945	0.000	0.000	0.000	95.481
8	ESPE	0.558	0.158	0.000	0.000	0.000	83.875	0.819	0.000	0.000	0.000	84.694
9	ESPQ	39.732	24.052	0.000	0.000	0.000	97.502	2.032	0.000	0.000	0.000	99.534
10	ESPN	6.044	3.026	0.000	0.000	0.000	96.796	1.669	0.000	0.000	0.000	98.464
11	EDIV	0.153	0.270	0.000	0.000	0.000	87.451	5.326	0.000	0.000	0.000	92.777
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	94.501	3.254	0.000	0.000	0.000	97.755

PROJECTION OF THE 4 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

NR.	LABL	1.	2.
1	TAO1	74.820	-6.451
2	TAO2	36.371	3.816
3	TAO3	21.509	3.790
4	TAO4	31.511	8.326



CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY
****

MODE 3 : 4-TAILLES

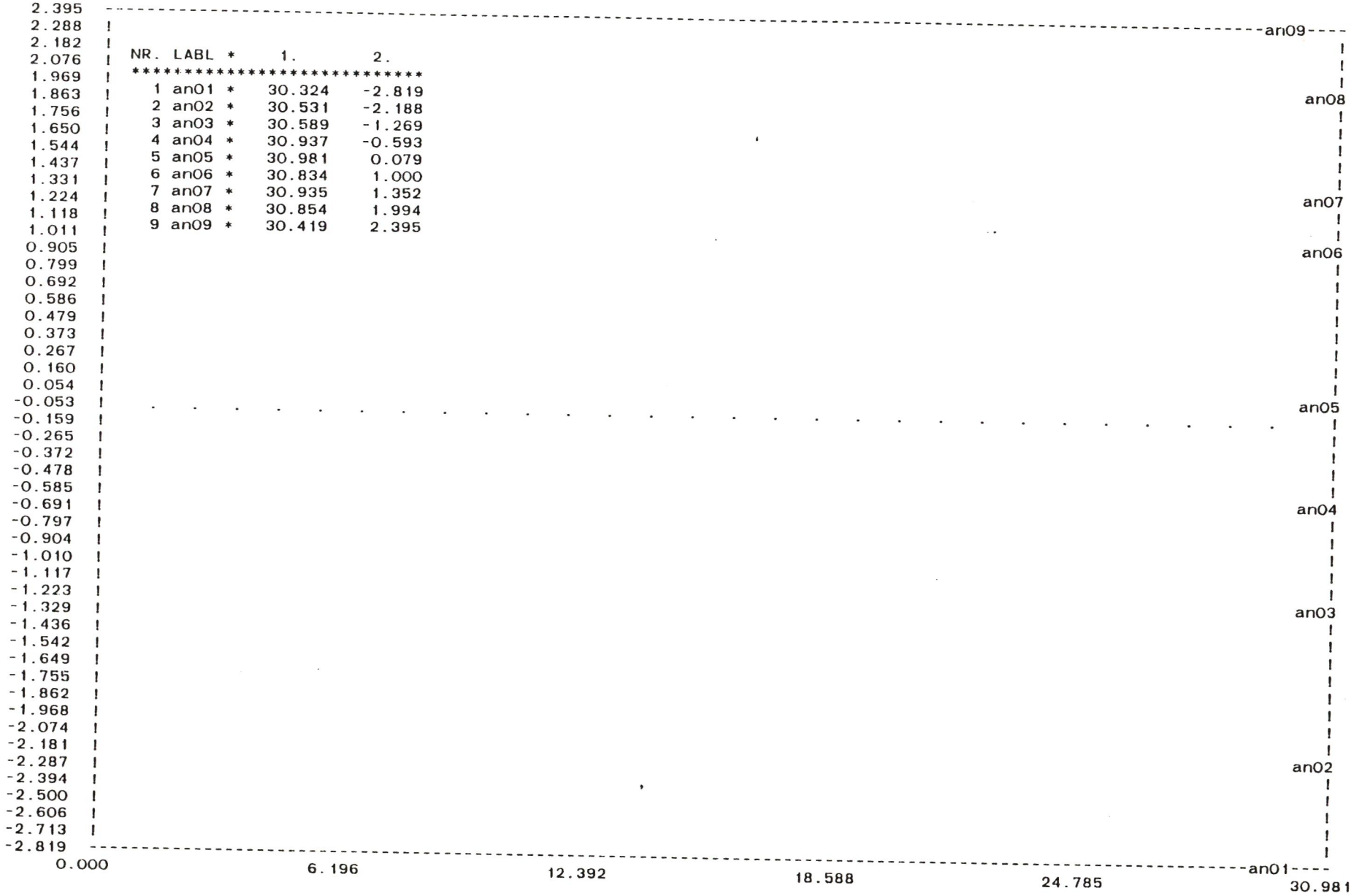
N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	TA01	1.000	75.420	5598.075	41.618	0.000	0.000	0.000	5639.692	5688.163	99.148	75.098
2	TA02	1.000	36.774	1322.885	14.564	0.000	0.000	0.000	1337.449	1352.313	98.901	36.571
3	TA03	1.000	22.292	462.653	14.363	0.000	0.000	0.000	477.015	496.950	95.989	21.841
4	TA04	1.000	34.272	992.928	69.324	0.000	0.000	0.000	1062.252	1174.574	90.437	32.592
	AXIS CONTRIBUTIONS			8376.541	139.868	0.000	0.000	0.000	8516.409	8712.000	97.755	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	TA01	66.830	29.755	0.000	0.000	0.000	98.416	0.732	0.000	0.000	0.000	99.148
2	TA02	15.793	10.412	0.000	0.000	0.000	97.824	1.077	0.000	0.000	0.000	98.901
3	TA03	5.523	10.269	0.000	0.000	0.000	93.098	2.890	0.000	0.000	0.000	95.989
4	TA04	11.854	49.564	0.000	0.000	0.000	84.535	5.902	0.000	0.000	0.000	90.437
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	96.149	1.605	0.000	0.000	0.000	97.755

PROJECTION OF THE 9 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

NR.	LABL	1.	2.
1	an01	30.324	-2.819
2	an02	30.531	-2.188
3	an03	30.589	-1.269
4	an04	30.937	-0.593
5	an05	30.981	0.079
6	an06	30.834	1.000
7	an07	30.935	1.352
8	an08	30.854	1.994
9	an09	30.419	2.395



CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY
****

MODE 4 : 9-ANNEES

N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	an01	1.000	30.863	919.523	7.948	0.000	0.000	0.000	927.471	952.514	97.371	30.454
2	an02	1.000	31.000	932.122	4.789	0.000	0.000	0.000	936.911	961.016	97.492	30.609
3	an03	1.000	30.998	935.684	1.610	0.000	0.000	0.000	937.294	960.890	97.544	30.615
4	an04	1.000	31.312	957.104	0.352	0.000	0.000	0.000	957.456	980.461	97.654	30.943
5	an05	1.000	31.321	959.799	0.006	0.000	0.000	0.000	959.805	980.985	97.841	30.981
6	an06	1.000	31.188	950.716	1.000	0.000	0.000	0.000	951.716	972.665	97.846	30.850
7	an07	1.000	31.296	956.949	1.828	0.000	0.000	0.000	958.777	979.437	97.891	30.964
8	an08	1.000	31.223	951.969	3.974	0.000	0.000	0.000	955.944	974.895	98.056	30.918
9	an09	1.000	30.808	925.299	5.735	0.000	0.000	0.000	931.034	949.136	98.093	30.513
	AXIS CONTRIBUTIONS			8489.167	27.242	0.000	0.000	0.000	8516.409	8712.000	97.755	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	an01	10.832	29.175	0.000	0.000	0.000	96.536	0.834	0.000	0.000	0.000	97.371
2	an02	10.980	17.578	0.000	0.000	0.000	96.993	0.498	0.000	0.000	0.000	97.492
3	an03	11.022	5.911	0.000	0.000	0.000	97.377	0.168	0.000	0.000	0.000	97.544
4	an04	11.274	1.291	0.000	0.000	0.000	97.618	0.036	0.000	0.000	0.000	97.654
5	an05	11.306	0.023	0.000	0.000	0.000	97.840	0.001	0.000	0.000	0.000	97.841
6	an06	11.199	3.672	0.000	0.000	0.000	97.743	0.103	0.000	0.000	0.000	97.846
7	an07	11.273	6.710	0.000	0.000	0.000	97.704	0.187	0.000	0.000	0.000	97.891
8	an08	11.214	14.589	0.000	0.000	0.000	97.648	0.408	0.000	0.000	0.000	98.056
9	an09	10.900	21.052	0.000	0.000	0.000	97.489	0.604	0.000	0.000	0.000	98.093
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	97.442	0.313	0.000	0.000	0.000	97.755

EUCLIDEAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
THE CARTESIAN PRODUCT OF THE MODES: 2 4
(PLOT ELEMENTS AND/OR CENTRES OF GRAVITY)
BY ACP OF PROJETED HYPER-CUBE MATRIX REPRESENTATION
****

NR.	LABL	*	1.	2.
1	0101	*	1.386	-0.124
2	0201	*	6.774	-1.814
3	0301	*	3.062	0.303
4	0401	*	4.009	-0.834
5	0501	*	2.119	0.549
6	0601	*	17.545	2.981
7	0701	*	11.233	4.002
8	0801	*	2.154	-0.177
9	0901	*	17.912	-2.413
10	1001	*	7.016	-0.838
11	1101	*	1.074	-0.278
12	0102	*	1.407	-0.131
13	0202	*	6.960	-1.831
14	0302	*	3.070	0.282
15	0402	*	4.102	-0.848
16	0502	*	2.102	0.530
17	0602	*	17.508	2.846
18	0702	*	11.068	3.891
19	0802	*	2.186	-0.187
20	0902	*	18.242	-2.487
21	1002	*	7.138	-0.869
22	1102	*	1.103	-0.281
23	0103	*	1.427	-0.139
24	0203	*	7.171	-1.842
25	0303	*	3.058	0.250
26	0403	*	4.204	-0.860
27	0503	*	2.061	0.500
28	0603	*	17.318	2.630
29	0703	*	10.746	3.701
30	0803	*	2.214	-0.200
31	0903	*	18.572	-2.574
32	1003	*	7.257	-0.905
33	1103	*	1.136	-0.283
34	0104	*	1.456	-0.147
35	0204	*	7.401	-1.868
36	0304	*	3.079	0.228
37	0404	*	4.323	-0.877
38	0504	*	2.050	0.482
39	0604	*	17.348	2.495
40	0704	*	10.611	3.596
41	0804	*	2.258	-0.212
42	0904	*	19.004	-2.665
43	1004	*	7.418	-0.942
44	1104	*	1.171	-0.287
45	0105	*	1.470	-0.153
46	0205	*	7.555	-1.876
47	0305	*	3.070	0.205
48	0405	*	4.397	-0.886
49	0505	*	2.021	0.459
50	0605	*	17.210	2.337
51	0705	*	10.376	3.458
52	0805	*	2.279	-0.222
53	0905	*	19.245	-2.728
54	1005	*	7.505	-0.968
55	1105	*	1.195	-0.288
56	0106	*	1.480	-0.160
57	0206	*	7.717	-1.875
58	0306	*	3.037	0.171
59	0406	*	4.470	-0.893
60	0506	*	1.966	0.425
61	0606	*	16.906	2.105
62	0706	*	9.984	3.245
63	0806	*	2.293	-0.234
64	0906	*	19.448	-2.797
65	1006	*	7.575	-0.999
66	1106	*	1.220	-0.289
67	0107	*	1.491	-0.164
68	0207	*	7.817	-1.884
69	0307	*	3.040	0.159
70	0407	*	4.521	-0.900
71	0507	*	1.956	0.415
72	0607	*	16.877	2.028
73	0707	*	9.888	3.181
74	0807	*	2.310	-0.239
75	0907	*	19.623	-2.837
76	1007	*	7.639	-1.015
77	1107	*	1.235	-0.290
78	0108	*	1.499	-0.169
79	0208	*	7.934	-1.884
80	0308	*	3.020	0.136
81	0408	*	4.575	-0.905
82	0508	*	1.919	0.392
83	0608	*	16.677	1.869
84	0708	*	9.622	3.035
85	0808	*	2.321	-0.248
86	0908	*	19.778	-2.887
87	1008	*	7.693	-1.037
88	1108	*	1.254	-0.290
89	0109	*	1.486	-0.170
90	0209	*	7.914	-1.860
91	0309	*	2.969	0.118
92	0409	*	4.554	-0.897
93	0509	*	1.871	0.371
94	0609	*	16.338	1.739
95	0709	*	9.327	2.901
96	0809	*	2.300	-0.250
97	0909	*	19.636	-2.884
98	1009	*	7.633	-1.038
99	1109	*	1.250	-0.287
100	EPCA	*	1.456	-0.151
101	ESCA	*	7.471	-1.859
102	EPTA	*	3.045	0.206
103	ESTA	*	4.351	-0.878
104	EPPE	*	2.007	0.458
105	EOAQ	*	17.081	2.337
106	EOSQ	*	10.317	3.446
107	ESPE	*	2.257	-0.219
108	ESPQ	*	19.051	-2.697
109	ESPN	*	7.430	-0.957
110	EDIV	*	1.182	-0.286
111	an01	*	6.753	0.123
112	an02	*	6.808	0.083
113	an03	*	6.833	0.025
114	an04	*	6.920	-0.018
115	an05	*	6.939	-0.060
116	an06	*	6.918	-0.118
117	an07	*	6.945	-0.140
118	an08	*	6.936	-0.181
119	an09	*	6.843	-0.205

LABL = PLOT LABEL

EIGEN VALUES :

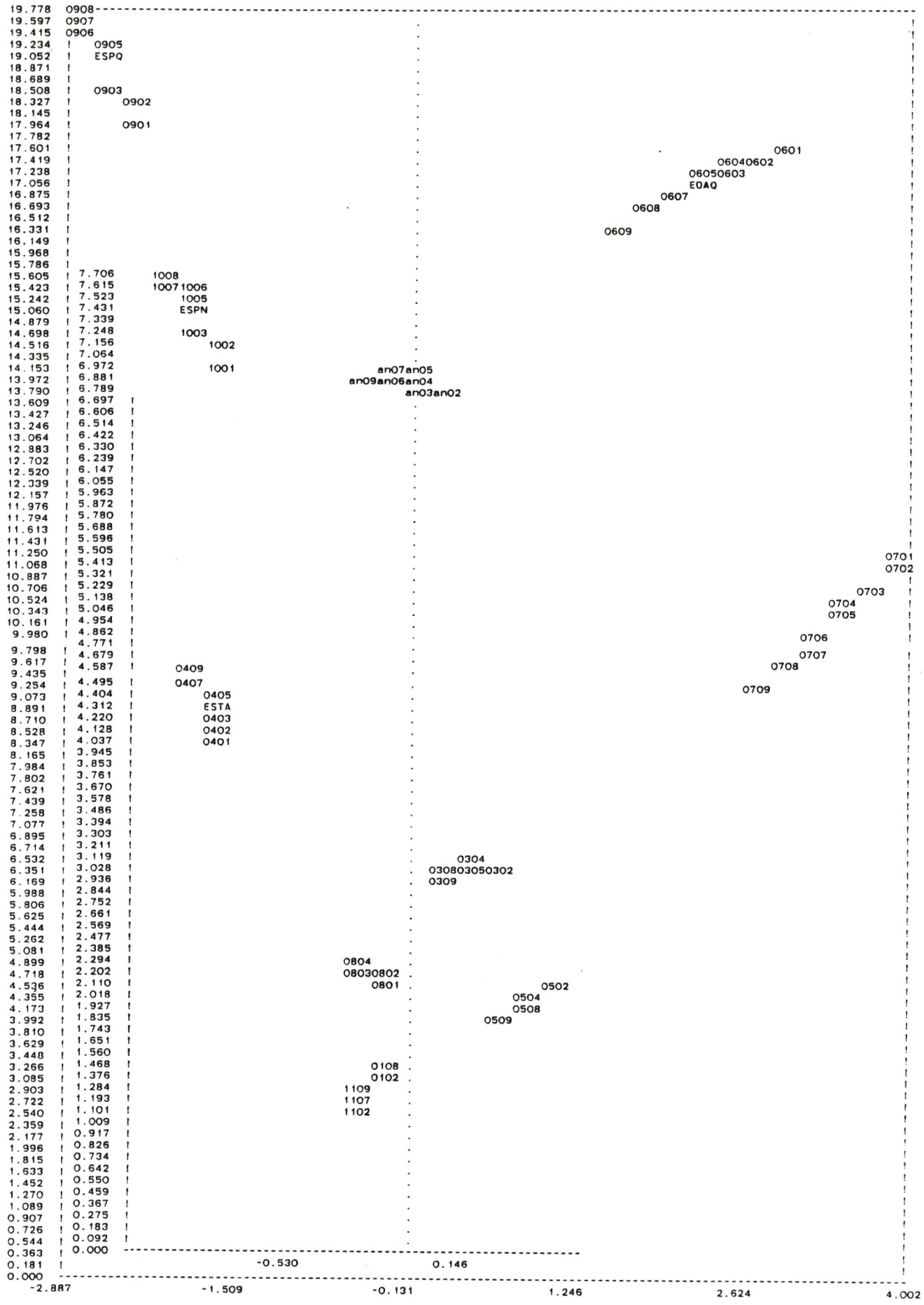
8227.883	274.427	13.896	0.202

STANDARDIZED EIGEN VALUES :

0.966	0.032	0.002	0.000

PROJECTION OF THE 119 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 2 HORIZONTAL AXIS 1 VERTICAL



PROJECTION OF THE 49 POINTS IN THE PLAN 1-2

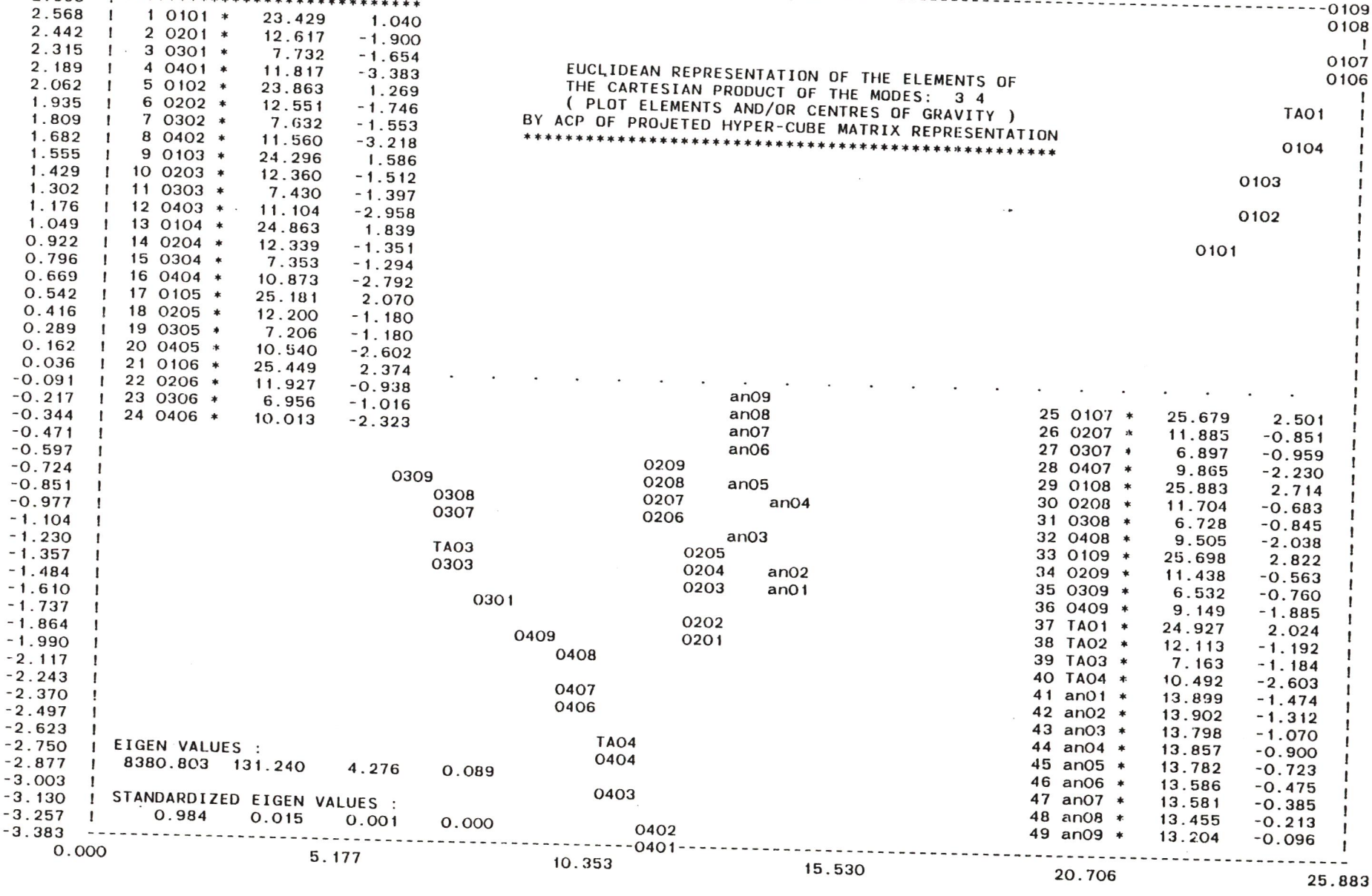
AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

EUCLIDEAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
THE CARTESIAN PRODUCT OF THE MODES: 3 4
(PLOT ELEMENTS AND/OR CENTRES OF GRAVITY)
BY ACP OF PROJETED HYPER-CUBE MATRIX REPRESENTATION

NR.	LABL	1.	2.
1	0101	23.429	1.040
2	0201	12.617	-1.900
3	0301	7.732	-1.654
4	0401	11.817	-3.383
5	0102	23.863	1.269
6	0202	12.551	-1.746
7	0302	7.632	-1.553
8	0402	11.560	-3.218
9	0103	24.296	1.586
10	0203	12.360	-1.512
11	0303	7.430	-1.397
12	0403	11.104	-2.958
13	0104	24.863	1.839
14	0204	12.339	-1.351
15	0304	7.353	-1.294
16	0404	10.873	-2.792
17	0105	25.181	2.070
18	0205	12.200	-1.180
19	0305	7.206	-1.180
20	0405	10.540	-2.602
21	0106	25.449	2.374
22	0206	11.927	-0.938
23	0306	6.956	-1.016
24	0406	10.013	-2.323
25	0107	25.679	2.501
26	0207	11.885	-0.851
27	0307	6.897	-0.959
28	0407	9.865	-2.230
29	0108	25.883	2.714
30	0208	11.704	-0.683
31	0308	6.728	-0.845
32	0408	9.505	-2.038
33	0109	25.698	2.822
34	0209	11.438	-0.563
35	0309	6.532	-0.760
36	0409	9.149	-1.885
37	TA01	24.927	2.024
38	TA02	12.113	-1.192
39	TA03	7.163	-1.184
40	TA04	10.492	-2.603
41	an01	13.899	-1.474
42	an02	13.902	-1.312
43	an03	13.798	-1.070
44	an04	13.857	-0.900
45	an05	13.782	-0.723
46	an06	13.586	-0.475
47	an07	13.581	-0.385
48	an08	13.455	-0.213
49	an09	13.204	-0.096

EIGEN VALUES :
8380.803 131.240 4.276 0.089

STANDARDIZED EIGEN VALUES :
0.984 0.015 0.001 0.000



2. n-ACP de χ avec des métriques diagonales

Il s'agit de montrer ici les sorties obtenues lors de l'application du programme TUCKALSN au 3-cube de contingence "Régions-Emplois-Tailles". Soit n_{ijk} le nombre des salariés dans la région i, l'emploi j et la taille k. $((i,j,k) \in [22] \times [11] \times [4])$.
Soient :

$$n_{i..} = \sum_{ij} n_{ijk} \; ; \; n_{.j.} = \sum_{ik} n_{ijk} \; ; \; n_{..k} = \sum_{ij} n_{ijk}$$

les nombres des travailleurs recensés dans la région i, dans l'emploi j et dans la taille k respectivement. On note n_i, n_j et n_k s'il n'y a pas possibilité de confusion.

$n... = n = \sum_{ijk} n_{ijk}$ est le nombre total des personnes recensées.

$\{\frac{n_i}{n}\}_i$, $\{\frac{n_j}{n}\}_j$, $\{\frac{n_k}{n}\}_k$ définissent respectivement les fréquences marginales des régions, emplois et tailles.

$$\frac{n_{ijk}/n}{(n_i/n),\ (n_j/n)\ (n_k/n)} = \frac{n^2\ n_{ijk}}{n_i\ n_j\ n_k} = x_{ijk} \qquad (1)$$

est le rapport entre la fréquence observée pour le triplet (i,j,k) et la fréquence calculée pour ce triplet à partir des fréquences marginales. S'il y a indépendance entre les variables région, emploi et taille la valeur attendue de ce rapport est 1.

Le 3-cube de données soumis à l'analyse est le cube x_{ijk} (cf. 1). Les éléments réels du premier mode sont donc les 22 régions, ceux du deuxième mode sont les 11 CSP et ceux du 3ème mode sont les 4 tailles des établissements :

$$p_1 = 22 \; ; \quad p_2 = 11 \; ; \; p_3 = 4.$$

Soit D_i la matrice diagonale des fréquences du mode i :

$$(D_i)_{jj'} = \frac{n_j}{n} \; \delta_{jj'} = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_{p_i} \end{vmatrix}$$

On dit que D_i est la matrice des poids des éléments du mode i.
Chaque mode du cube χ est muni de la métrique dont la matrice dans la base canonique est l'inverse de la matrice de poids :

$$M_1 = D_1^{-1} \; ; \; M_2 = D_2^{-1} \; ; \; M_3 = D_3^{-1}.$$

On demande 3 facteurs pour chaque mode :

$$q_1 = 2 \; ; \quad q_2 = 2 \; ; \quad q_3 = 2$$

alors si x est la forme n-linéaire associée à χ on cherche la forme n-linéaire $\hat{x}$ de rang $\{q_i\}$ la plus proche de x au sens de la métrique

$$N = D_1^{-1} \otimes D_2^{-1} \otimes D_3^{-1} \; .$$

Nous présentons dans les pages 247-259 numérotées en bas de 1 à 12 les sortiesles plus intéressantes de cette analyse.

Pages 1-2 a) Spécifications concernant l'analyse, les sorties et les fichiers à sauvegarder.

b) Diagonales des matrices définissant les métriques. Il s'agit des inverses des matrices de poids. Elles ont été lues dans le fichier de numéro logique 7.

Page 3 : Résumé concernant la convergence de l'algorithme et la qualité de l'analyse. Il a fallu deux itérations pour que les deux suites $\{u_i\}$ et $\{f(U_i)\}$ satisfassent le seuil de tolérance exigé.
La qualité de la représentation de cette n-ACP est : $Q(\chi) = 0.9825$.
Les qualités des représentations issues des ACP des triplets $(\overset{1}{X}, D_2^{-1} \otimes D_3^{-1}, D_1^{-1})$, $(\overset{2}{X}, D_1^{-1} \otimes D_3^{-1}, D_2^{-1})$ et $(\overset{3}{X}, D_1^{-1} \otimes D_2^{-1}, D_3^{-1})$ sont respectivement 0.9869, 0.9887 et 0.9983.

Page 4 : On présente les matrices U_i qui définissent une solution du modèle TUCKERN. $\bar{u} = (U_1, U_2, U_3) \in \Gamma_1$. Les matrices U_i sont D_i^{-1}-orthonormées.
On présente aussi les valeurs propres associées. Puisque les métriques utilisées sont diagonales la $j^{ème}$ valeur propre du $i^{ème}$ mode représente la partie de l'inertie du nuage des p_i éléments expliquée par le $j^{ème}$ axe du mode.
Nous constatons que le premier axe de chaque mode explique à lui seul 90 % environ de l'inertie totale du nuage correspondant. Alors, en ne retenant qu'un facteur dans chaque espace on devrait pouvoir reconstruire assez fidèlement le 3 cube de données χ .

Dans ce cas l'expression

$$\hat{x} = (\otimes M_i U_i)\underline{h}$$

s'écrit :

$$\hat{x}_{ijk} = (D_1^{-1})_{ii}\, u^1_{i1} (D_2^{-1})_{jj}\, u^2_{j1}\, (D_3^{-1})_{kk}\, u^3_{k1}.h$$

$$= \frac{u^1_{i1}\, u^2_{i2}\, u^3_{i3}\ \ h.n^3}{n_i\ n_j\ n_k}$$

où h est le seul élément du cube central.

Ceci implique que $\frac{n_{ijk}}{n}$ devrait être approximativement égal à $\frac{u^1_{i1}\ u^2_{j1}\ u^3_{jk}}{(1/h)}$ et donc que les trois modes ne sont pas très éloignés de l'indépendance.

On sait que chaque U_k satisfait l'expression :

$$t \overset{k}{X} (\underset{k}{\otimes} U_k \ {}^t U_k) \overset{k}{X} N_k M_k U_k \equiv (M_k U_k) \Lambda_k$$

qui est équivalente à :

$$t \overset{k}{\hat{X}} N^k \overset{k}{\hat{X}} N_k (M_k U_k) \equiv (M_k U_k) \Lambda_k$$

Supposons que le 3-cube de contingence donné puisse être entièrement reconstruit à partir des fréquences marginales, c'est-à-dire supposons que

$$n_{ijk} = n(n_i/n)\ (n_j/n)\ (n_k/n)$$

dans ce cas $x_{ijk} = \hat{x}_{ijk} = 1$. Tous les éléments des matrices $\overset{k}{\hat{X}}$ sont donc des 1 et la matrice à diagonaliser en (2) a pour terme générique :

$$({}^t \overset{k}{\hat{X}} N^k \overset{k}{\hat{X}} N_k)^j_{j'} = (D_k)_{jj} = \frac{n_j}{n}$$

et admet comme vecteur propre le vecteur $\mathbb{1}$ associé à la valeur propre 1. La continuité des vecteurs et des valeurs propres d'une matrice symétrique nous permet d'affirmer que si l'on est proche de l'indépendance des 3 modes la première colonne de la matrice $M_k U_k$ doit être proche de $\mathbb{1}$ et la valeur propre correspondante voisine de 1. Alors :

$$(D_k^{-1}) U_k \simeq \mathbb{1} \quad \text{et} \quad u^k_{j1} \simeq (D_k)_{jj} = \frac{n_j}{n} \qquad (3)$$

c'est-à-dire la première colonne des matrices U_k devrait donner les poids des éléments du mode k. Dans les pages 8, 10 et 12 on présente les poids des éléments des modes et l'on constate qu'ils coïncident de très près avec les premières colonnes de U_1, U_2 et U_3.

Ceci confirme la thèse de la presque indépendance des 3 modes. Les axes 2 et 3 devraient nous permettre d'expliquer les écarts à l'indépendance.

D'autre part, puisque U_i est M_i-orthonormée notre matrice $M_i U_i$ est D_i-orthonormée ; or sa première colonne est proche de $\mathbb{1}$ pour tout $j_i \in [q_i]-\{1\}$ les colonnes des matrices U_i vérifient :

$$\sum_{k_i=1}^{p_i} u^i_{k_i j_i} \simeq 0.$$

Page 5 : Cube central.

On sait que $\underline{\hat{x}} = (\otimes M_i U_i)\underline{h}$

équations qui dans notre cas s'écrit :

$$\hat{x}_{ijk} = \sum_{p=1}^{q_1} \sum_{q=1}^{q_2} \sum_{r=1}^{q_3} (n/n_i)\,(n/n_j)(n/n_k) u^1_{ip}\, u^2_{jq}\, u^3_{kr}\, h_{pqr}$$

puisque les 3 modes de notre cube χ sont presque indépendants en utilisant (3) on peut en déduire que :

$$\sum_i \sum_j \sum_k \hat{x}_{ijk} \simeq \sum_i \sum_j \sum_k (n/n_i)\,(n/n_j)(n/n_k)\, u^1_{i1}\, u^2_{j1}\, u^3_{k1}\, h_{111} \simeq \sum_i \sum_j \sum_k h_{111}.$$

Or $\hat{x}_{ijk} \simeq 1$ pour tout (i,j,k) alors on déduit que $h_{111} \simeq 1$.

C'est le résultat observable sur le cube central.

On constate aussi que tous les autres éléments h_{pqr}, $(p,q,r) \neq (1,1,1)$ sont petits par rapport à h_{111}.

Les 1,2 et 3-représentations matricielles du cube central h sont les matrices $\overset{1}{H}$, $\overset{2}{H}$ et $\overset{3}{H}$:

$\overset{1}{H}$

		R1	R2	R3
T1	E1	1.000	-0.005	-0.002
	E2	-0.003	-0.237	0.019
	E3	0.002	-0.050	-0.027
T2	E1	-0.024	-0.037	-0.139
	E2	-0.097	-0.090	0.027
	E3	-0.150	-0.033	0.002
T3	E1	0.001	-0.036	-0.007
	E2	0.043	-0.009	0.016
	E3	0.013	-0.009	-0.008

$\overset{2}{H}$

		E1	E2	E3
T1	R1	1.000	-0.003	0.002
	R2	-0.005	-0.237	-0.050
	R3	-0.002	0.019	-0.027
T2	R1	-0.024	-0.097	0.150
	R2	-0.037	-0.090	-0.033
	R3	-0.139	0.027	0.002
T3	R1	0.001	0.043	0.013
	R2	-0.036	0.009	-0.009
	R3	-0.007	0.016	-0.008

$\overset{3}{H}$

		T1	T2	T3
E1	R1	1.000	-0.024	0.001
	R2	-0.005	-0.037	-0.036
	R3	-0.002	-0.139	-0.007
E2	R1	-0.003	-0.097	0.043
	R2	-0.237	-0.090	0.009
	R3	0.019	0.027	0.016
E3	R1	0.002	0.150	0.013
	R2	-0.050	-0.033	-0.009
	R3	-0.027	0.002	-0.008

On sait que la $j^{ème}$ 1-composante principale est :

$$\overset{1}{C}_j = (M_3U_3 \otimes M_2U_2)(\overset{1}{H})_j$$

où $\overset{1}{H}_j$ est $j^{ème}$ colonne de $\overset{1}{H}$.
Puisque les premières colonnes de M_3U_3 et M_2U_2 sont proches de $\mathbb{1}$, la première colonne de $\overset{1}{C}$ est aussi proche de $\mathbb{1}$, ce qui veut dire que la forme $\hat{x}$ assigne à la première région idéale des valeurs indépendantes de la CSP et de la taille de l'établissement. La forme linéaire qui a chaque élément de l'espace des régions affecte sa coordonnée sur le premier axe est donc une constante ; sa valeur est à peu près :

$$(\Lambda_1)_{11}^{1/2} = 1.034^{1/2} \simeq 1.017$$

On déduit de la 2ème colonne de $\overset{1}{H}$ que la 2ème région idéale est approximativement indépendante des tailles des établissements et qu'elle dépend plutôt du 2ème emploi idéal.
La 3ème région idéale serait liée à la 2ème taille idéale.
On tire de $\overset{2}{H}$ le même type de conclusions que celles tirées de $\overset{1}{H}$:
le premier emploi idéal est indépendant des régions et des tailles. Le facteur correspondant est une constante de valeur $(\Lambda_2)_{11}^{1/2} \simeq 1.011$.
Le deuxième emploi idéal serait plutôt lié à la deuxième région et le 3ème emploi à la 2ème taille idéale.
De $\overset{3}{H}$ on déduit que le premier facteur de ce mode est la constante $(\Lambda_3)_{11}^{1/2} \simeq 1.029$. Le rapport entre les tailles idéales 2 et 3 avec les régions et les emplois idéaux semble moins évident. On peut conjecturer une certaine indépendance par rapport à ces deux modes.

Ces constatations faites dans le cube central nous suggèrent certaines idées générales pour l'interprétation des représentations graphiques des espaces des régions, emplois et tailles :

Page 6 : Représentation cartésienne de la projection du nuage des régions sur les axes déterminés par les deux premières régions idéales. On y constate que le premier axe ne permet pas de différencier les régions.

Page 7 : Représentation cartésienne de la projection du nuage des régions sur les axes définis par les régions idéales 2 et 3. L'axe 2 oppose les régions à dominante tertiaire aux régions à dominante secondaire (Ile de France, VS. Franche-Comté). L'axe 3 oppose les régions où la proportion de salariés dans les établissements de grande taille est supérieur à la moyenne nationale contre celles où la proportion de salariés dans les petits établissements est plus forte. Par rapport aux tailles des établissements la région 12PL (Pays de Loire) correspondrait à peu près à la moyenne nationale.

Page 8 : Tableaux des contributions absolues et relatives du premier mode.

Page 9 : Projection du nuage des emplois sur le sous-espace engendré par les emplois idéaux 2 et 3. Le 2ème axe oppose les emplois les plus caractéristiques des régions industrielles aux emplois les plus caractéristiques des régions à dominante tertiaire. L'axe 3 oppose les emplois plus spécifiques des grands établissements aux emplois qui ont une forte proportion dans les petits établissements. Ainsi, dans les grands établissements la proportion de cadres et techniciens de la production est plus importante qu'elle ne l'est au niveau national.

Page 10 : Tableaux des contributions absolues et relatives du mode 2. On constate que les "Emplois et métiers divers" (EDIV) sont moins bien représentés que les autres catégories professionnelles.

Page 11 : Projection du nuage de tailles sur le sous-espace engendré par les éléments idéaux 2 et 3. Le premier axe oppose les petits aux grands établissements, le deuxième oppose les tailles moyennes aux autres tailles.

Page 12 : Tableaux des contributions absolues et relatives du mode 3.

Comparaison avec l'AFCM

La formule de reconstitution des données obtenue de l'Analyse Factorielle des Correspondances Multiples d'un tableau de contingence à m entrées consiste à le reproduction approchée du m-cube de données défini par

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \frac{n_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{n_{i_1} n_{i_2} \ldots n_{i_m}} n^{(m-1)}$$

avec une expression de la forme

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{j_m=1}^{p_m} v^1_{i_1 j_1} \cdots v^m_{i_m j_m} h_{j_1 \ldots j_m} \qquad (5)$$

où dans cette somme on ne retient que les termes dont au plus deux des indices $j_1, \ldots, j_m$ sont différents de 1. (voir par exemple [17;318]).
Dans l'expression (5) :

$h_{j_1 j_2 \ldots j_m} \in \mathbb{R} \qquad \forall (j_1, j_2, \ldots, j_m) \in \underset{i=1}{\overset{m}{\times}} . [p_i]$

$v^k_{i_k j_k}$ est l'élément générique d'une matrice V_k telle que

$V_k \in \mathcal{O}^{D_k}_{p_k p_k}$ et dans laquelle la première colonne est $\mathbb{1}$.

Puisque la première colonne de V_k est $\mathbb{1}$ on vérifie que pour tout $j_k \neq 1$

$$\sum_{i_k=1}^{q_k} \frac{n_{ik}}{n} v^k_{i_k j_k} = 0$$

(les colonnes de V_k (sauf la première) sont D_k centrées.)
Ceci permet de montrer que dans l'expression (5), $h_{11\ldots1}$ doit être égal à 1 et que $h_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ est nul si tous les j_k sont égaux à 1 sauf un de ces indices.

La formule de reconstitution (approchée) de χ obtenue de la n-ACP de $(\chi, \mathbb{1}D_i^{-1})$ est :

$$\underline{\hat{x}} = (\otimes M_i U_i)\underline{h}$$

qui s'écrit :

$$\hat{x}_{i_1 \cdots i_m} = \sum_{j_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{q_n} v^1_{i_1 j_1} \cdots v^m_{i_m j_m} h_{j_1 \cdots j_m}$$

où on a appelé V_i la matrice $M_i U_i$.
Dans notre exemple les matrices V_i sont D_i-orthonormées et comme les 3 modes sont quasi-indépendants, les premières colonnes des matrices V_i sont $\mathbb{1}$. (ceci explique le fait que dans notre cube central les termes h_{ijk} sont proches de zéro quand un seul des indices est différent de 1. Les valeurs de ces h_{ijk} sont : -0.003, 0.002, -0.005, -0.002, -0.024, 0.001).
Par conséquent, dans notre cas la formule de la n-ACP consisterait à ajouter à la formule de reconstitution issue de l'AFCM les termes dont plus de deux des indices j_i sont différents de 1.

On constate que les élémentss du cube central correspondants à ces termes sont

$h_{222} = 0.007$ $\quad$ $h_{322} = 0.000$

$h_{223} = 0.001$ $\quad$ $h_{323} = 0.000$

$h_{232} = 0.001$ $\quad$ $h_{332} = 0.000$

$h_{233} = 0.000$ $\quad$ $h_{333} = 0.000$

l'apport de ces termes à la reconstitution de x est donc négligeable : les deux formules fournissent alors des reconstitutions très semblables.
On présente à la page 13 la représentation dans le premier plan principal de toutes les modalités des 3 variables (modes) issue de l'AFCM du cube de contingence Région-Emplois-Année. Si l'on prend séparément les modalités d'une seule variable on constate qu'à une notation près, elle coïncide, de très près avec la représentation graphique du mode correspondant issue de la n-ACP. Or la représentation du mode k selon la n-ACP est la même que celle issue de l'ACP du triplet $(\underset{\sim}{\tilde{X}}^k, D^k, D_k)$ on peut dire que les sorties de l'AFCM coïncident avec celles de la n-ACP après avoir réalisé la notation qui maximise l'énergie du nuage sur le premier axe.

```
TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
                              THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

                              ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE
-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+


THE TOTAL ARRAY CORE REQUIREMENT IS:    40732 BYTES OR APPROXIMATELY    40K
THE CORE REQUIREMENT FOR ARRAYS PLUS PROGRAM IS: 180K

                              INPUT SPECIFICATIONS
                              ********************
 DATA SPECIFICATIONS:

   NUMBER OF ELEMENTS  IN MODE  1                                  22
   NUMBER OF ELEMENTS  IN MODE  2                                  11
   NUMBER OF ELEMENTS  IN MODE  3                                   4
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 1                                   3
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 2                                   3
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE 3                                   3
   TYPE OF METRICS (O=ALL IDENTITY,1=ALL DIAGONAL,2=NO)             1
   METRICS FOR THE MODES:
     (O=IDENTITY,1=INVERSE WEIGHT DIAG.,2=DIAGONAL,3=GENERAL)

          MODE 1                                                    2
          MODE 2                                                    2
          MODE 3                                                    2

 INPUT AND OUTPUT SPECIFICATIONS:


   DATA INPUT ON UNIT                                                   8
   METRICS INPUT ON UNIT                                                7
   PRINTING OF INPUT DATA (O=NO,1=YES)                                  0
   OUTPUT OF INITIAL CONFIGURATION (O=NO,1=YES)                         1
   HISTORY OF OPTIMAL APPROXIMATION                                     1
   PRINTING OF CORE MATRIX (O=NO,1=YES)                                 1
   OUTPUT OF ACP OF CARTESIAN PRODUCTS OF THE MODES                     3
    (O=NO,N=NUMBER OF PRODUCTS (N<5))
  PARTITIONS FOR THE PRODUCTS OF MODES:
         1:    1
               2 3
         2:    1
               3 2
         3:    2
               3 1
   OUTPUT OF CORE MATRIX TO UNIT                                        0
   OUTPUT OF FITTED AND RESIDUAL SUMS OF SQUARES TO UNIT (O=NO=DEFAULT) 0
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 1 TO UNIT                    0
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 2 TO UNIT                    0
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 3 TO UNIT                    0

 ANALYSIS SPECIFICATIONS:

   MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS (MAIN)                                 30
   CONVERGENCE CRITERIUM FOR OPTIMAL APPROXIMATION             0.10000000
   CONVERGENCE CRITERION FOR COMPONENT MATRICES                0.10000000
```

LABELS FOR THE N MODES:

22-REGIONS
11-EMPLOIS
4-TAILLES

LABELS FOR THE ELEMENTS:

01If	02Ca	03Pi	04Hn	05Ce	06Bn	07Bo	08Nc	09Lo	10Al
11Fc	12Pl	13Br	14Pc	15Aq	16Mp	17Li	18Ra	19Au	20Lr
21Ac	22Co								

EPCA	ESCA	EPTA	ESTA	EPPE	EOAQ	EOSQ	ESPE	ESPQ	ESPN
EDIV									

TAO1	TAO2	TAO3	TAO4

DATA INPUT FORMAT (THREE CARDS):

(22F8.3)

SUM OF ORIGINAL DATA = 889.26300

SUM OF SQUARED ORIGINAL DATA= 1014.53550

METRICS FOR THE MODES

MODE 1 :
DATA DIAGONAL

3.70745	36.99158	30.89038	29.11883	25.45961	47.96121	36.00363	13.01530	20.56964	29.21325
45.01956	20.82010	31.56330	47.80237	29.22830	37.49306	100.93170	9.80577	47.96700	54.55906
18.80543	1029.10603								

MODE 2 :
DATA DIAGONAL

52.47318	15.81402	20.69871	23.90535	25.77990	3.64892	4.75945	33.50833	5.01452	14.99766
115.33461									

MODE 3 :
DATA DIAGONAL

3.94563	3.60579	5.50042	3.47924

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE

RESULTS OF OPTIMAL FACTORISATION

CONVERGENCE OF THE FITTED SUM OF SQUARES

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(1)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(2)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(3)

NUMBER OF ITERATIONS 2

		RAW	STANDARDIZED
TOTAL SU OF SQUARES (=*P(I))	: SSQ(TOTAL)	1.146	1.0000
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X1)	: X1.ESTSSQ(FIT)	1.131	0.9869
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X2)	: X2.ESTSSQ(FIT)	1.133	0.9887
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X3)	: X3.ESTSSQ(FIT)	1.144	0.9883
FITTED SUM OF SQUARES	: SSQ(FIT)	1.126	0.9825
RESIDUAL SUM OF SQUARES	: SSQ(RESIDUAL)	0.020	0.0175
SSQ(FIT) - X1.ESTSSQ(FIT)		0.015	0.0131
SSQ(FIT) - X2.ESTSSQ(FIT)		0.013	0.0113
SSQ(FIT) - X3.ESTSSQ(FIT)		0.002	0.0017
INCREMENT IN FIT		0.001	0.0002

NOTES:

1. THE ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP OF X(I) IS AN APPROXIMATION OF THE AMOUNT OF VARIATION EXPLAINED BY THE COMPONENTS OF AN ORDINARY PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS ON THE MODE NUMBER I.
THE FITTED SUM OF SQUARES -SSQ(FIT)- WILL ALWAYS BE SMALLER THAN OR EQUAL TO THE SMALLEST OF THE X(I).SSQ(FIT).
SOMETIMES DUE TO THE CRUDE APPROXIMATIONS THE SSQ(FIT) MIGHT BE SLIGHTLY LARGER, RESULTING IN A NEGATIVE DIFFERENCE BETWEEN THE SSQ(FIT) AND A X(I).ESTSSQ(FIT).

2. SSQ(TOTAL) = SSQ(FIT) + SSQ(RESIDUAL).

3. THE INCREMENT IN FIT INDICATES THE IMPROVEMENT BY ITERATION IN THE SSQ(FIT) OVER THE SSQ(FIT) DERIVED FROM THE INITIAL CONFIGURATIONS OF THE COMPONENTS.

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE

EIGEN VECTOR MATRICES AND EIGEN VALUES
FOR ORIGINAL PROBLEM (NO IDENTITY METRICS)

MODE 1 : 22-REGIONS
EIGEN VECTOR MATRIX U(1)

*	1.	2.	3.
1 *	0.268	-0.419	-0.116
2 *	0.027	0.030	0.008
3 *	0.032	0.034	-0.025
4 *	0.035	0.030	-0.034
5 *	0.039	0.030	0.022
6 *	0.021	0.018	-0.003
7 *	0.028	0.023	0.003
8 *	0.077	0.060	-0.081
9 *	0.049	0.040	-0.062
10 *	0.034	0.018	-0.019
11 *	0.023	0.030	-0.044
12 *	0.048	0.027	0.002
13 *	0.032	0.015	0.050
14 *	0.021	0.014	0.021
15 *	0.034	0.007	0.053
16 *	0.027	0.001	0.034
17 *	0.010	0.007	0.016
18 *	0.102	0.039	0.055
19 *	0.021	0.013	-0.025
20 *	0.018	-0.001	0.049
21 *	0.053	-0.019	0.090
22 *	0.001	-0.000	0.005

EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	1.034	0.071	0.021

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.902	0.062	0.018

MODE 2 : 11-EMPLOIS
EIGEN VECTOR MATRIX U(2)

*	1.	2.	3.
1 *	0.019	0.023	0.062
2 *	0.063	0.108	-0.021
3 *	0.048	0.007	0.158
4 *	0.042	0.057	-0.009
5 *	0.039	-0.027	0.018
6 *	0.274	-0.168	-0.111
7 *	0.211	-0.269	0.018
8 *	0.030	0.032	0.052
9 *	0.199	0.181	-0.090
10 *	0.067	0.049	-0.066
11 *	0.009	0.008	-0.013

EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.	3.
1 *	1.022	0.077	0.027

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 2

*	1.	2.	3.
1 *	0.892	0.067	0.024

MODE 3 : 4-TAILLES
EIGEN VECTOR MATRIX U(3)

*	1.	2.	3.
1 *	0.245	-0.318	0.275
2 *	0.275	-0.129	-0.223
3 *	0.183	0.030	-0.260
4 *	0.297	0.393	0.208

EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.	3.
1 *	1.059	0.063	0.004

STANDARDIZED EIGEN VALUES OF MODE 3

*	1.	2.	3.
1 *	0.924	0.055	0.003

NOTES:
THE EIGEN VECTOR MATRIX IS COLUMNWISE MI-ORTHONORMAL.

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE

CORE MATRIX

VELOCITY OF VARIATION OF THE INDEX: 3 2 1
THE INDEX IN THE RIGHT ARE THE FASTED.

MODE 1 : 22-REGIONS

MODE 2 : 11-EMPLOIS

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 1

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	1.000	-0.003	0.002
2 *	-0.005	-0.237	-0.050
3 *	-0.002	0.019	-0.027

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.873	0.000	0.000
2 *	0.000	0.049	0.002
3 *	0.000	0.000	0.001

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 3

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.001	0.043	0.013
2 *	-0.036	0.009	-0.009
3 *	-0.007	0.016	-0.008

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.001	0.002	0.000
2 *	0.001	0.000	0.000
3 *	0.000	0.000	0.000

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 2

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	-0.024	-0.097	0.150
2 *	-0.037	-0.090	-0.033
3 *	-0.139	0.027	0.002

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

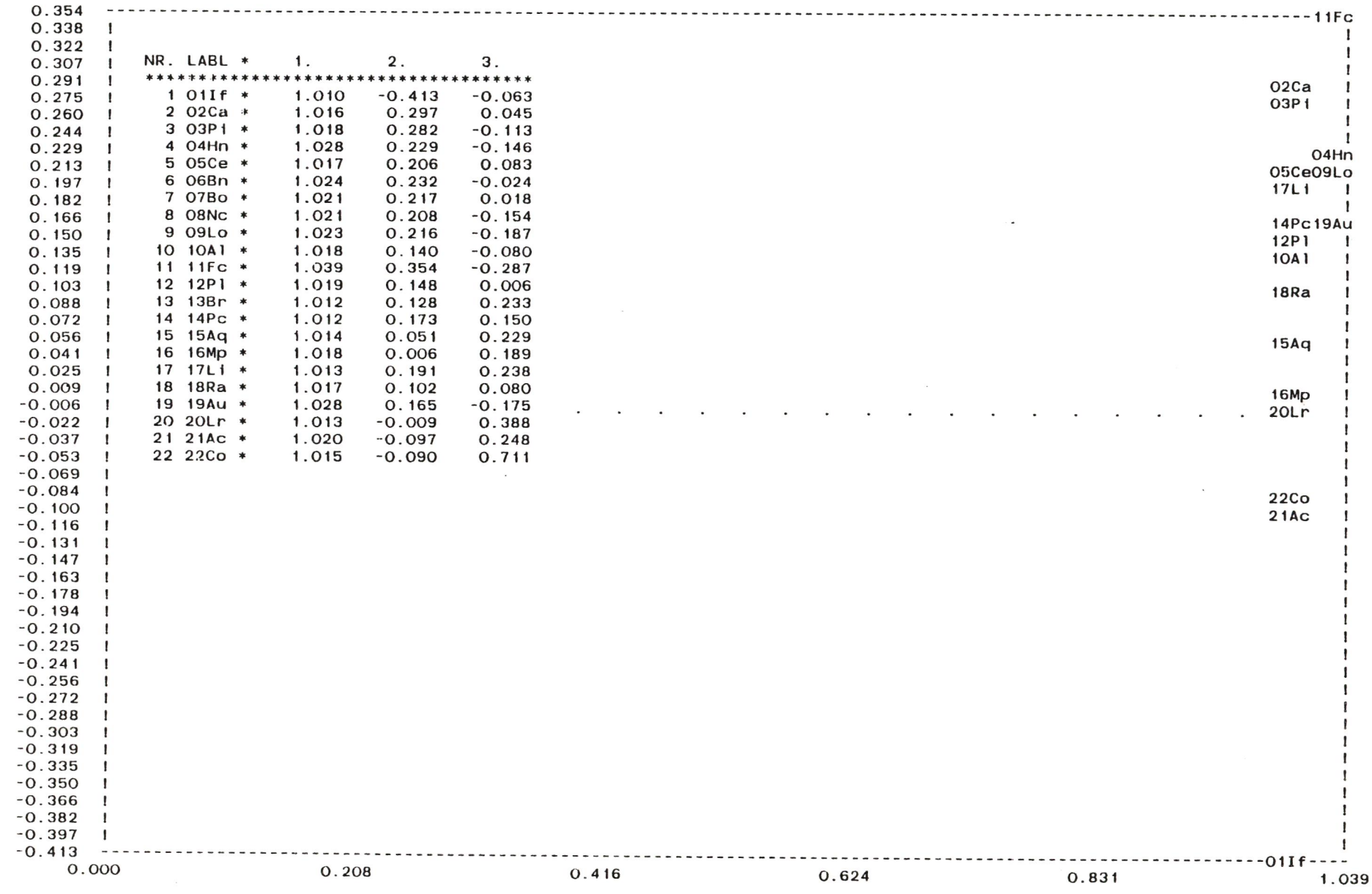
*	1.	2.	3.
1 *	0.001	0.008	0.020
2 *	0.001	0.007	0.001
3 *	0.017	0.001	0.000

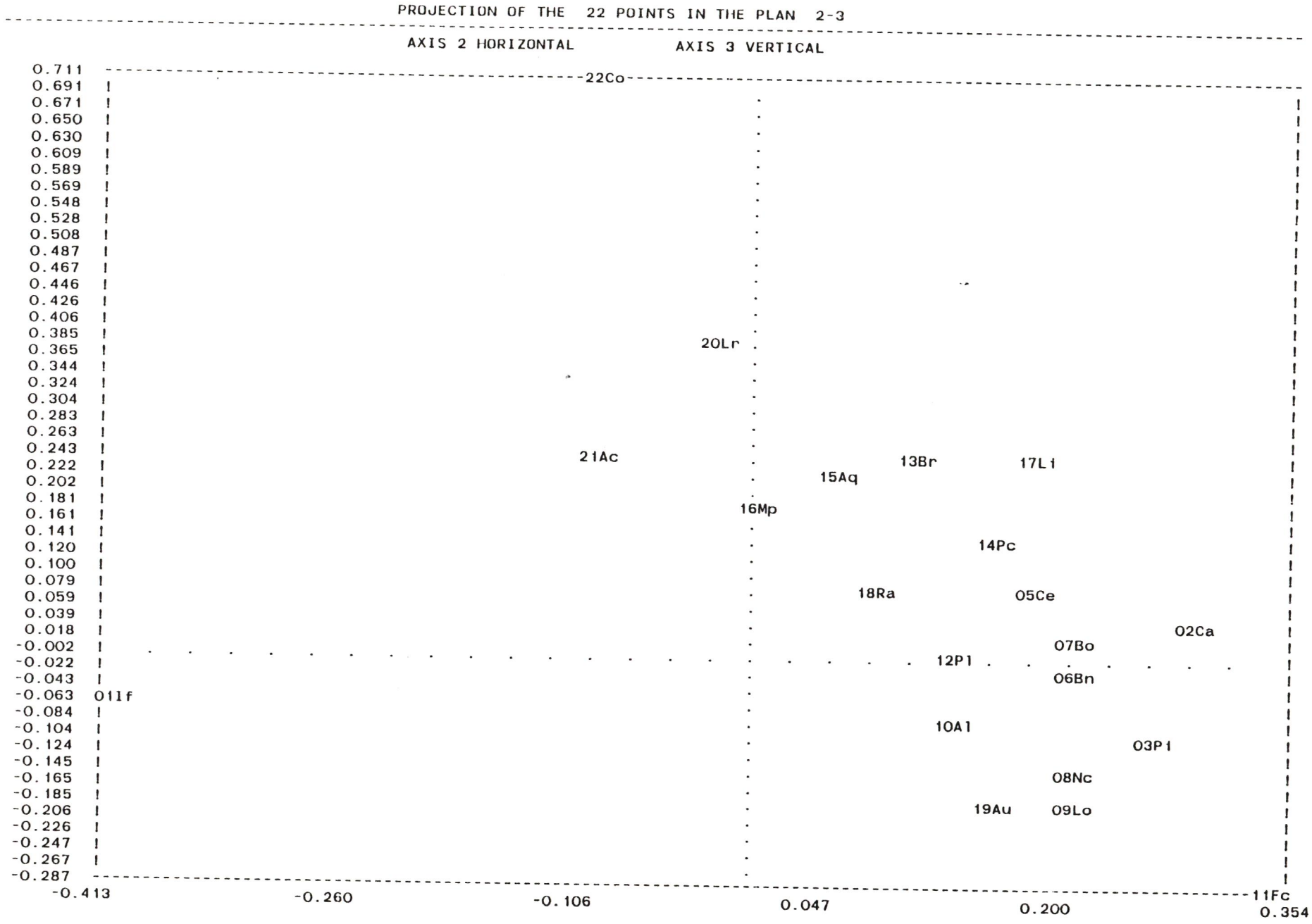
EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 1 : 22-REGIONS
****

PROJECTION OF THE 22 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

NR.	LABL	1.	2.	3.
1	01If	1.010	-0.413	-0.063
2	02Ca	1.016	0.297	0.045
3	03Pi	1.018	0.282	-0.113
4	04Hn	1.028	0.229	-0.146
5	05Ce	1.017	0.206	0.083
6	06Bn	1.024	0.232	-0.024
7	07Bo	1.021	0.217	0.018
8	08Nc	1.021	0.208	-0.154
9	09Lo	1.023	0.216	-0.187
10	10Al	1.018	0.140	-0.080
11	11Fc	1.039	0.354	-0.287
12	12Pl	1.019	0.148	0.006
13	13Br	1.012	0.128	0.233
14	14Pc	1.012	0.173	0.150
15	15Aq	1.014	0.051	0.229
16	16Mp	1.018	0.006	0.189
17	17Li	1.013	0.191	0.238
18	18Ra	1.017	0.102	0.080
19	19Au	1.028	0.165	-0.175
20	20Lr	1.013	-0.009	0.388
21	21Ac	1.020	-0.097	0.248
22	22Co	1.015	-0.090	0.711




PROJECTION OF THE 22 POINTS IN THE PLAN 2-3
AXIS 2 HORIZONTAL
AXIS 3 VERTICAL
0.711
0.691
0.671
0.650
0.630
0.609
0.589
0.569
0.548
0.528
0.508
0.487
0.467
0.446
0.426
0.406
0.385
0.365
0.344
0.324
0.304
0.283
0.263
0.243
0.222
0.202
0.181
0.161
0.141
0.120
0.100
0.079
0.059
0.039
0.018
-0.002
-0.022
-0.043
-0.063
-0.084
-0.104
-0.124
-0.145
-0.165
-0.185
-0.206
-0.226
-0.247
-0.267
-0.287
-0.413
-0.260
-0.106
0.047
0.200
0.354
22Co
20Lr
21Ac
13Br
17Li
15Aq
16Mp
14Pc
18Ra
05Ce
02Ca
07Bo
12Pl
06Bn
11f
10Al
03Pi
08Nc
19Au
09Lo
11Fc

CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY

****

MODE 1 : 22-REGIONS

N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	01If	0.270	1.096	0.275	0.046	0.001	0.000	0.000	0.322	0.324	99.434	1.093
2	02Ca	0.027	1.079	0.028	0.002	0.000	0.000	0.000	0.030	0.031	96.390	1.059
3	03Pi	0.032	1.066	0.034	0.003	0.000	0.000	0.000	0.037	0.037	99.278	1.063
4	04Hn	0.034	1.068	0.036	0.002	0.001	0.000	0.000	0.039	0.039	99.155	1.063
5	05Ce	0.039	1.053	0.041	0.002	0.000	0.000	0.000	0.043	0.044	97.747	1.041
6	06Bn	0.021	1.066	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000	0.023	0.024	97.125	1.051
7	07Bo	0.028	1.050	0.029	0.001	0.000	0.000	0.000	0.030	0.031	98.844	1.044
8	08Nc	0.077	1.062	0.080	0.003	0.002	0.000	0.000	0.085	0.087	98.297	1.053
9	09Lo	0.049	1.070	0.051	0.002	0.002	0.000	0.000	0.055	0.056	98.473	1.062
10	10Al	0.034	1.038	0.036	0.001	0.000	0.000	0.000	0.036	0.037	98.678	1.031
11	11Fc	0.022	1.170	0.024	0.003	0.002	0.000	0.000	0.029	0.030	94.042	1.135
12	12Pl	0.048	1.044	0.050	0.001	0.000	0.000	0.000	0.051	0.052	97.242	1.029
13	13Br	0.032	1.060	0.032	0.001	0.002	0.000	0.000	0.035	0.036	97.483	1.046
14	14Pc	0.021	1.044	0.021	0.001	0.000	0.000	0.000	0.023	0.023	98.846	1.038
15	15Aq	0.034	1.047	0.035	0.000	0.002	0.000	0.000	0.037	0.038	98.830	1.041
16	16Mp	0.027	1.047	0.028	0.000	0.001	0.000	0.000	0.029	0.029	97.809	1.036
17	17Li	0.010	1.078	0.010	0.000	0.001	0.000	0.000	0.011	0.012	96.345	1.058
18	18Ra	0.102	1.030	0.105	0.001	0.001	0.000	0.000	0.107	0.108	99.044	1.025
19	19Au	0.021	1.094	0.022	0.001	0.001	0.000	0.000	0.023	0.025	93.189	1.056
20	20Lr	0.018	1.094	0.019	0.000	0.003	0.000	0.000	0.022	0.022	98.305	1.085
21	21Ac	0.053	1.073	0.055	0.000	0.003	0.000	0.000	0.059	0.061	96.503	1.055
22	22Co	0.001	1.338	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.002	86.260	1.243
	AXIS CONTRIBUTIONS			1.034	0.071	0.021	0.000	0.000	1.126	1.146	98.272	

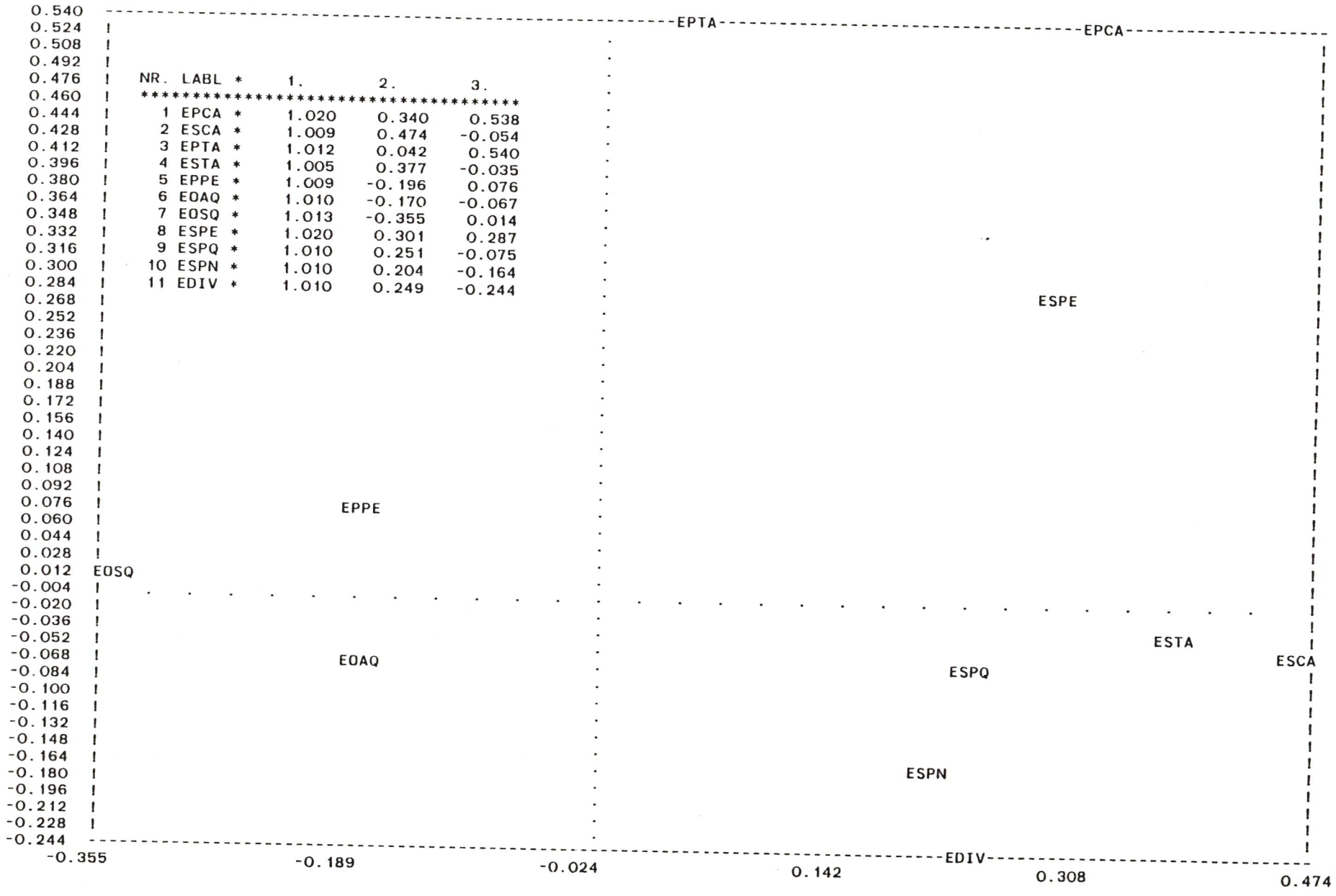
N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	01If	26.589	65.073	4.965	0.000	0.000	84.903	14.202	0.329	0.000	0.000	99.434
2	02Ca	2.698	3.362	0.260	0.000	0.000	88.661	7.552	0.177	0.000	0.000	96.390
3	03Pi	3.246	3.650	1.920	0.000	0.000	91.153	7.007	1.118	0.000	0.000	99.278
4	04Hn	3.509	2.541	3.429	0.000	0.000	92.691	4.587	1.877	0.000	0.000	99.155
5	05Ce	3.931	2.361	1.250	0.000	0.000	93.302	3.830	0.615	0.000	0.000	97.747
6	06Bn	2.116	1.585	0.055	0.000	0.000	92.349	4.727	0.050	0.000	0.000	97.125
7	07Bo	2.800	1.843	0.042	0.000	0.000	94.561	4.254	0.029	0.000	0.000	98.844
8	08Nc	7.744	4.721	8.510	0.000	0.000	92.345	3.848	2.104	0.000	0.000	98.297
9	09Lo	4.921	3.212	7.920	0.000	0.000	91.350	4.076	3.048	0.000	0.000	98.473
10	10Al	3.433	0.943	1.034	0.000	0.000	96.270	1.807	0.601	0.000	0.000	98.678
11	11Fc	2.320	3.931	8.557	0.000	0.000	78.875	9.135	6.032	0.000	0.000	94.042
12	12Pl	4.819	1.497	0.008	0.000	0.000	95.216	2.022	0.003	0.000	0.000	97.242
13	13Br	3.139	0.731	8.011	0.000	0.000	91.207	1.451	4.825	0.000	0.000	97.483
14	14Pc	2.072	0.882	2.201	0.000	0.000	94.041	2.735	2.071	0.000	0.000	98.846
15	15Aq	3.404	0.125	8.347	0.000	0.000	93.824	0.236	4.770	0.000	0.000	98.830
16	16Mp	2.674	0.001	4.447	0.000	0.000	94.546	0.003	3.260	0.000	0.000	97.809
17	17Li	0.983	0.512	2.611	0.000	0.000	88.333	3.147	4.865	0.000	0.000	96.345
18	18Ra	10.200	1.511	3.018	0.000	0.000	97.459	0.987	0.598	0.000	0.000	99.044
19	19Au	2.131	0.799	2.995	0.000	0.000	88.351	2.264	2.575	0.000	0.000	93.189
20	20Lr	1.819	0.002	12.864	0.000	0.000	85.730	0.007	12.568	0.000	0.000	98.305
21	21Ac	5.354	0.705	15.263	0.000	0.000	90.350	0.814	5.340	0.000	0.000	96.503
22	22Co	0.097	0.011	2.293	0.000	0.000	57.562	0.452	28.247	0.000	0.000	86.260
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	90.234	6.197	1.971	0.000	0.000	98.272

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 2 : 11-EMPLOIS
****

PROJECTION OF THE 11 POINTS IN THE PLAN 2-3

AXIS 2 HORIZONTAL AXIS 3 VERTICAL

NR.	LABL	*	1.	2.	3.
1	EPCA	*	1.020	0.340	0.538
2	ESCA	*	1.009	0.474	-0.054
3	EPTA	*	1.012	0.042	0.540
4	ESTA	*	1.005	0.377	-0.035
5	EPPE	*	1.009	-0.196	0.076
6	EOAQ	*	1.010	-0.170	-0.067
7	EOSQ	*	1.013	-0.355	0.014
8	ESPE	*	1.020	0.301	0.287
9	ESPQ	*	1.010	0.251	-0.075
10	ESPN	*	1.010	0.204	-0.164
11	EDIV	*	1.010	0.249	-0.244



CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY
****

MODE 2 : 11-EMPLOIS

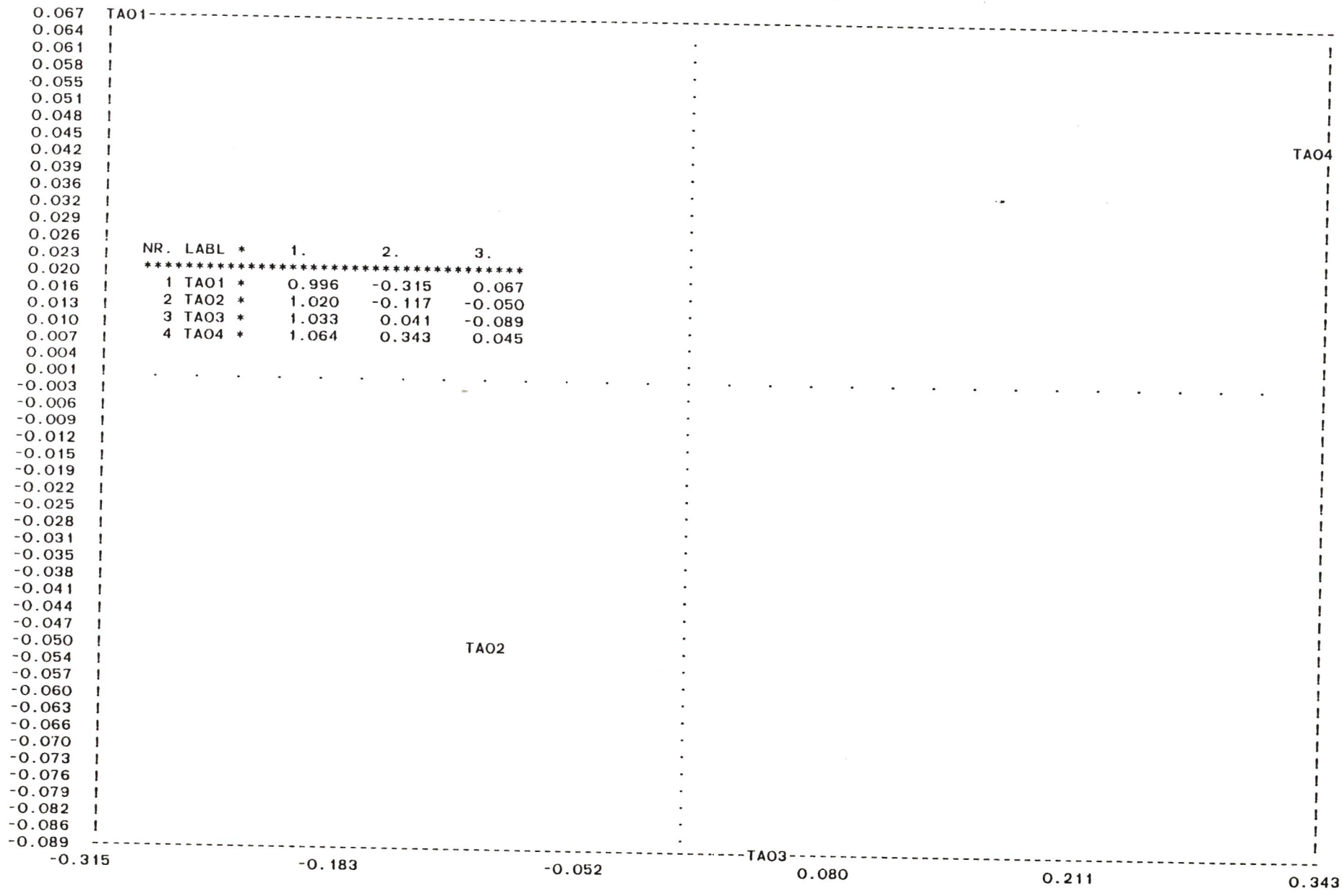
N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	EPCA	0.019	1.211	0.020	0.002	0.006	0.000	0.000	0.028	0.028	98.497	1.202
2	ESCA	0.063	1.122	0.064	0.014	0.000	0.000	0.000	0.079	0.080	98.864	1.116
3	EPTA	0.048	1.161	0.049	0.000	0.014	0.000	0.000	0.064	0.065	97.822	1.148
4	ESTA	0.042	1.085	0.042	0.006	0.000	0.000	0.000	0.048	0.049	97.842	1.074
5	EPPE	0.039	1.041	0.040	0.001	0.000	0.000	0.000	0.041	0.042	98.102	1.031
6	EOAQ	0.274	1.034	0.280	0.008	0.001	0.000	0.000	0.289	0.293	98.555	1.027
7	EOSQ	0.210	1.084	0.216	0.026	0.000	0.000	0.000	0.242	0.247	98.086	1.074
8	ESPE	0.030	1.115	0.031	0.003	0.002	0.000	0.000	0.036	0.037	97.670	1.102
9	ESPQ	0.199	1.047	0.203	0.013	0.001	0.000	0.000	0.217	0.219	99.234	1.043
10	ESPN	0.067	1.053	0.068	0.003	0.002	0.000	0.000	0.073	0.074	98.210	1.043
11	EDIV	0.009	1.190	0.009	0.001	0.001	0.000	0.000	0.010	0.012	80.683	1.069
	AXIS CONTRIBUTIONS			1.022	0.077	0.027	0.000	0.000	1.126	1.146	98.272	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	EPCA	1.938	2.861	20.274	0.000	0.000	70.885	7.879	19.733	0.000	0.000	98.497
2	ESCA	6.295	18.439	0.667	0.000	0.000	80.813	17.823	0.228	0.000	0.000	98.864
3	EPTA	4.841	0.111	51.795	0.000	0.000	76.040	0.131	21.651	0.000	0.000	97.822
4	ESTA	4.133	7.708	0.188	0.000	0.000	85.702	12.037	0.104	0.000	0.000	97.842
5	EPPE	3.867	1.938	0.817	0.000	0.000	94.026	3.548	0.529	0.000	0.000	98.102
6	EOAQ	27.363	10.337	4.481	0.000	0.000	95.425	2.714	0.416	0.000	0.000	98.555
7	EOSQ	21.103	34.408	0.153	0.000	0.000	87.346	10.723	0.017	0.000	0.000	98.086
8	ESPE	3.037	3.517	9.057	0.000	0.000	83.726	7.300	6.644	0.000	0.000	97.670
9	ESPQ	19.901	16.382	4.079	0.000	0.000	92.965	5.762	0.507	0.000	0.000	99.234
10	ESPN	6.655	3.601	6.591	0.000	0.000	92.035	3.750	2.425	0.000	0.000	98.210
11	EDIV	0.866	0.699	1.897	0.000	0.000	72.101	4.379	4.203	0.000	0.000	80.683
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	89.184	6.715	2.373	0.000	0.000	98.272

EUCLIDIAN REPRESENTATION OF THE ELEMENTS OF
MODE 3 : 4-TAILLES
****

PROJECTION OF THE 4 POINTS IN THE PLAN 2-3

AXIS 2 HORIZONTAL AXIS 3 VERTICAL



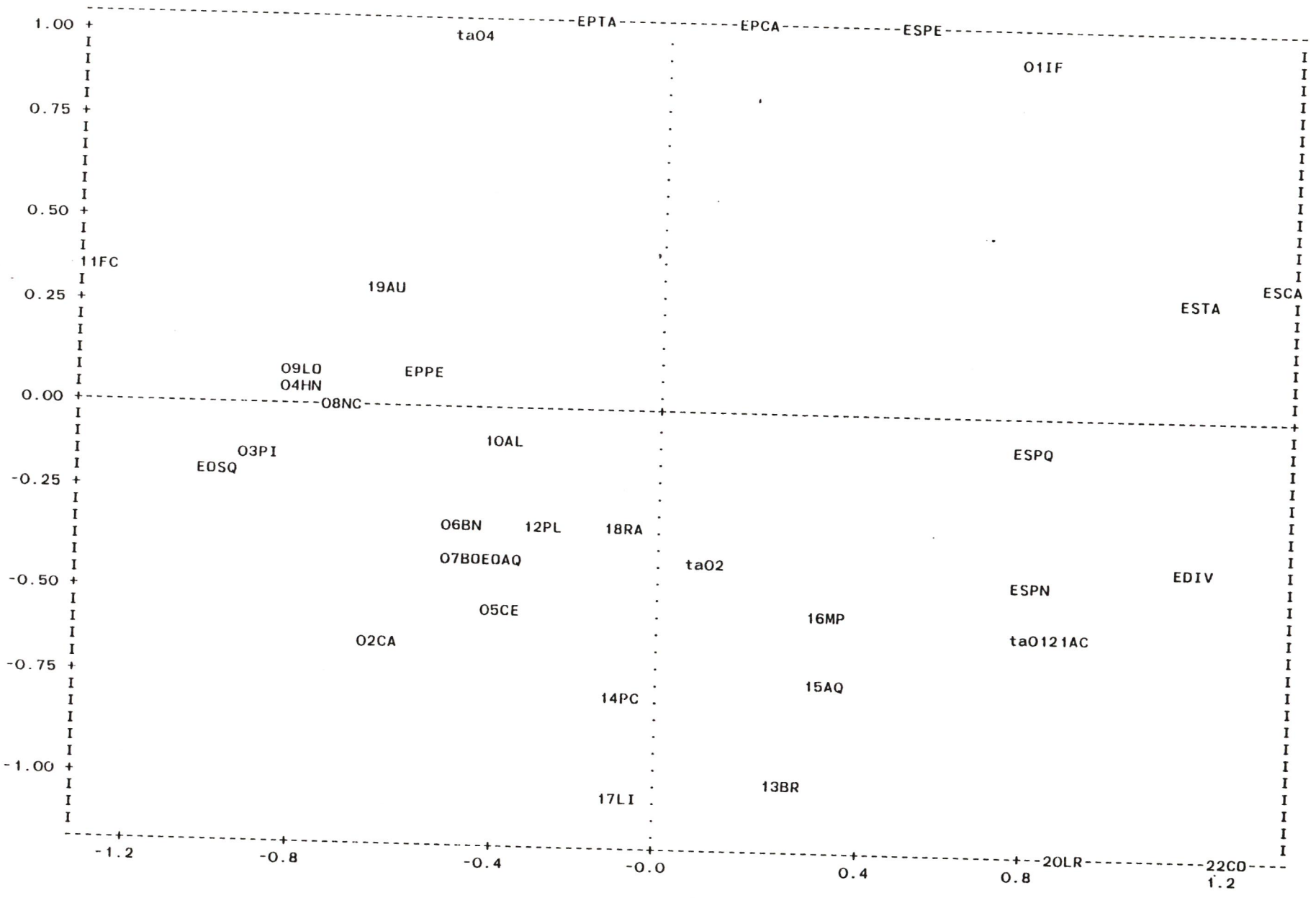
NR.	LABL	*	1.	2.	3.
1	TAO1	*	0.996	-0.315	0.067
2	TAO2	*	1.020	-0.117	-0.050
3	TAO3	*	1.033	0.041	-0.089
4	TAO4	*	1.064	0.343	0.045

CONTRIBUTIONS AND REPRESENTATIONS QUALITY
****

MODE 3 : 4-TAILLES

N	INDIVI. LABEL	WEIGHT	NORM	ABSOLUTES CONTRIBUTIONS AXIS 1	2	3	4	5	WEIGHTED FITTED NORM2	WEIGHTED NORM2	REPRESENT. QUALITY	FITTED NORM
1	TAO1	0.253	1.052	0.251	0.025	0.001	0.000	0.000	0.278	0.281	98.911	1.047
2	TAO2	0.277	1.033	0.289	0.004	0.001	0.000	0.000	0.293	0.296	99.042	1.028
3	TAO3	0.182	1.051	0.194	0.000	0.001	0.000	0.000	0.196	0.201	97.461	1.038
4	TAO4	0.287	1.132	0.325	0.034	0.001	0.000	0.000	0.360	0.368	97.611	1.119
	AXIS CONTRIBUTIONS			1.059	0.063	0.004	0.000	0.000	1.126	1.146	98.272	

N	LABEL	RELATIVES INDIVIDUALS CONTRIBUTIONS TO THE AXIS 1	2	3	4	5	RELATIVES AXIS CONTRIBUTIONS TO INDIVIDUALS NORMS 1	2	3	4	5	TOTAL
1	TAO1	23.729	39.897	29.920	0.000	0.000	89.536	8.964	0.410	0.000	0.000	98.911
2	TAO2	27.246	5.989	17.863	0.000	0.000	97.533	1.277	0.232	0.000	0.000	99.042
3	TAO3	18.325	0.480	37.148	0.000	0.000	96.599	0.151	0.712	0.000	0.000	97.461
4	TAO4	30.699	53.635	15.068	0.000	0.000	88.270	9.183	0.157	0.000	0.000	97.611
	TOTAL	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	92.432	5.504	0.336	0.000	0.000	98.272


EPTA
EPCA
ESPE
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
-1.00
taO4
O1IF
11FC
19AU
ESCA
ESTA
O9LO
O4HN
EPPE
O8NC
O3PI
EOSQ
1OAL
ESPQ
O6BN
12PL
18RA
O7BOEOAQ
taO2
EDIV
ESPN
O5CE
16MP
O2CA
taO121AC
15AQ
14PC
13BR
17LI
-1.2
-0.8
-0.4
-0.0
0.4
0.8
20LR
22CO
1.2

3. n-ACP de χ avec des métriques non diagonales

On présente finalement les résultats les plus importants obtenus lors de l'analyse du 3-cube défini par :

$$\chi : [22] \times [11] \times [4] \to \mathbf{R}$$

$$(i,j,k) \to x_{ijk}$$

où x_{ijk} est le nombre de salariés recensé dans la région i, l'emploi j et les établissements de taille k.

$$p_1 = 22, \quad p_2 = 11, \quad p_3 = 4.$$

Les espaces E_1 des régions, E_2 des emplois et E_3 des tailles des établissements ont été munis de la métrique définie par les matrices de Variance-Covariance empiriques. Notons ces matrices V_1, V_2 et V_3 respectivement. On a

$$(V_1)_{ii'} = \frac{1}{p_2 p_3} \sum_j \sum_k (x_{ijk} - \frac{x_{i\cdots}}{p_2 p_3})(x_{i'jk} - \frac{x_{i'\cdots}}{p_2 p_3})$$

et des expressions semblables pour V_2 et V_3.

$$M_1 = V_1, \quad M_2 = V_2, \quad M_3 = V_3.$$

Sur l'espace $E_1^* \otimes E_2^* \otimes E_3^*$ on adopte donc comme métrique

$$N = V_1^{-1} \otimes V_2^{-1} \otimes V_3^{-1}$$

On cherche la détermination de la forme 3-linéaire $\hat{x}$ de rang défini par

$$q_1 = 3, \quad q_2 = 3, \quad q_3 = 3$$

qui soit la plus proche de la forme 3-linéaire x associée à χ.

Nous présentons en :

Page 1 : Les spécifications nécessaires à l'exécution du programme TUCKALSN.

Page 2 : Résumé concernant la solution du modèle TUCKERN.
On remarque que la qualité de la représentation de cette n-ACP est 78.95 %.

Page 3 : Le cube central h (qui est le cube de données associé à $\hat{x}$).
On peut remarquer que :
les tailles idéales 2 et 3 n'ont presque pas d'importance par rapport à la première taille idéale.
Chacun des éléments idéaux du mode REGIONS est presque exclusivement lié à son correspondant du mode EMPLOIS : la première "section frontale" de χ est approximativement diagonale.

Page 4-7: Représentations cartésiennes des espaces des régions et des emplois.
On remarque que les représentations sont fort différentes de celles obtenues dans les deux analyses précédentes. Leur interpolation ne semble pas évidente. On la laisse aux lecteurs intéressés par la problématique du travail et de l'emploi.

```
TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
                              THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG

                              ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE
-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+


THE TOTAL ARRAY CORE REQUIREMENT IS:   49612 BYTES OR APPROXIMATELY   48K
THE CORE REQUIREMENT FOR ARRAYS PLUS PROGRAM IS: 188K

                              INPUT SPECIFICATIONS
                              ********************
 DATA SPECIFICATIONS:

   NUMBER OF ELEMENTS   IN MODE  1                                        22
   NUMBER OF ELEMENTS   IN MODE  2                                        11
   NUMBER OF ELEMENTS   IN MODE  3                                         4
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE  1                                         3
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE  2                                         3
   NUMBER OF COMPONENTS IN MODE  3                                         3
   TYPE OF METRICS (O=ALL IDENTITY,1=ALL DIAGONAL,2=NO)                    2
   METRICS FOR THE MODES:
     (O=IDENTITY,1=INVERSE WEIGHT DIAG.,2=DATA DIAGONAL,3=COVARIANCE)

        MODE 1                                                             3
        MODE 2                                                             3
        MODE 3                                                             3

 INPUT AND OUTPUT SPECIFICATIONS:


   DATA INPUT ON UNIT                                                          8
   METRICS INPUT ON UNIT                                                       O
   PRINTING OF INPUT DATA (O=NO,1=YES)                                         O
   OUTPUT OF INITIAL CONFIGURATION (O=NO,1=YES)                                1
   HISTORY OF OPTIMAL APPROXIMATION                                            1
   PRINTING OF CORE MATRIX (O=NO,1=YES)                                        1
   OUTPUT OF ACP OF CARTESIAN PRODUCTS OF THE MODES                            3
    (O=NO,N=NUMBER OF PRODUCTS (N<5))
  PARTITIONS FOR THE PRODUCTS OF MODES:
        1:   1
             2 3
        2:   1
             3 2
        3:   2
             3 1
   OUTPUT OF CORE MATRIX TO UNIT                                               O
   OUTPUT OF FITTED AND RESIDUAL SUMS OF SQUARES TO UNIT (O=NO=DEFAULT)        O
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 1 TO UNIT                           O
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 2 TO UNIT                           O
   OUTPUT OF COMPONENTS MATRIX OF THE MODE 3 TO UNIT                           O

 ANALYSIS SPECIFICATIONS:

   MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS (MAIN)                                       30
   CONVERGENCE CRITERIUM FOR OPTIMAL APPROXIMATION                   O.10000000
   CONVERGENCE CRITERION FOR COMPONENT MATRICES                      O.10000000

 LABELS FOR THE N MODES:

   22-REGIONS
   11-EMPLOIS
   4-TAILLES

 LABELS FOR THE ELEMENTS:

   O1If    O2Ca    O3P1    O4Hn    O5Ce    O6Bn    O7Bo    O8Nc    O9Lo    10A1
   11Fc    12P1    13Br    14Pc    15Aq    16Mp    17L1    18Ra    19Au    20Lr
   21Ac    22Co


   EPCA    ESCA    EPTA    ESTA    EPPE    EOAQ    EOSQ    ESPE    ESPQ    ESPN
   EDIV


   TAO1    TAO2    TAO3    TAO4


 DATA INPUT FORMAT (THREE CARDS):

   (22F8.3)
```

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE

RESULTS OF OPTIMAL FACTORISATION

CONVERGENCE OF THE FITTED SUM OF SQUARES

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(1)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(2)

CONVERGENCE OF THE COMPONENT MATRIX U(3)

NUMBER OF ITERATIONS 2

		RAW	STANDARDIZED
TOTAL SU OF SQUARES (=*P(I))	: SSQ(TOTAL)	968.000	1.0000
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X1)	: X1.ESTSSQ(FIT)	776.020	0.8017
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X2)	: X2.ESTSSQ(FIT)	825.835	0.8531
ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP(X3)	: X3.ESTSSQ(FIT)	966.958	0.9989
FITTED SUM OF SQUARES	: SSQ(FIT)	764.284	0.7895
RESIDUAL SUM OF SQUARES	: SSQ(RESIDUAL)	203.716	0.2105
SSQ(FIT) - X1.ESTSSQ(FIT)		11.737	0.0121
SSQ(FIT) - X2.ESTSSQ(FIT)		61.552	0.0636
SSQ(FIT) - X3.ESTSSQ(FIT)		202.675	0.2094
INCREMENT IN FIT		3.756	0.0039

NOTES:

1. THE ESTIMATED FITTED SUM OF SQUARES FOR ACP OF X(I) IS AN APPROXIMATION OF THE AMOUNT OF VARIATION EXPLAINED BY THE COMPONENTS OF AN ORDINARY PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS ON THE MODE NUMBER I.
THE FITTED SUM OF SQUARES -SSQ(FIT)- WILL ALWAYS BE SMALLER THAN OR EQUAL TO THE SMALLEST OF THE X(I).SSQ(FIT).
SOMETIMES DUE TO THE CRUDE APPROXIMATIONS THE SSQ(FIT) MIGHT BE SLIGHTLY LARGER, RESULTING IN A NEGATIVE DIFFERENCE BETWEEN THE SSQ(FIT) AND A X(I).ESTSSQ(FIT).

2. SSQ(TOTAL) HAS BEEN INTERNALLY RESCALED TO P1*P2*...*Pn STANDARDIZED QUANTITIES HAVE BEEN DIVIDED BY SSQ(TOTAL).

3. SSQ(TOTAL) = SSQ(FIT) + SSQ(RESIDUAL).

4. THE INCREMENT IN FIT INDICATES THE IMPROVEMENT BY ITERATION IN THE SSQ(FIT) OVER THE SSQ(FIT) DERIVED FROM THE INITIAL CONFIGURATIONS OF THE COMPONENTS.

TUCKALSN VERSION POLIT (06/85) I.M.S.S
THIS PROGRAM IS A GENERALISATION OF TUCKALS3 PROGRAM OF P.M KROONENBERG,UNIVERSITY OF LEIDEN (12/81)

ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE

CORE MATRIX

VELOCITY OF VARIATION OF THE INDEX: 3 2 1
THE INDEX IN THE RIGHT ARE THE FASTED.

MODE 1 : 22-REGIONS

MODE 2 : 11-EMPLOIS

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 1

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	22.200	0.278	-0.061
2 *	-0.256	13.339	0.647
3 *	0.140	0.657	-8.819

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.509	0.000	0.000
2 *	0.000	0.184	0.000
3 *	0.000	0.000	0.080

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 2

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.121	-1.424	0.638
2 *	1.309	-0.583	1.723
3 *	-0.831	2.368	-0.375

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

*	1.	2.	3.
1 *	0.000	0.002	0.000
2 *	0.002	0.000	0.003
3 *	0.001	0.006	0.000

MODE 3 : 4-TAILLES COMPONENT 3

SCORES OF CORE MATRIX
MODE 2
MODE 1

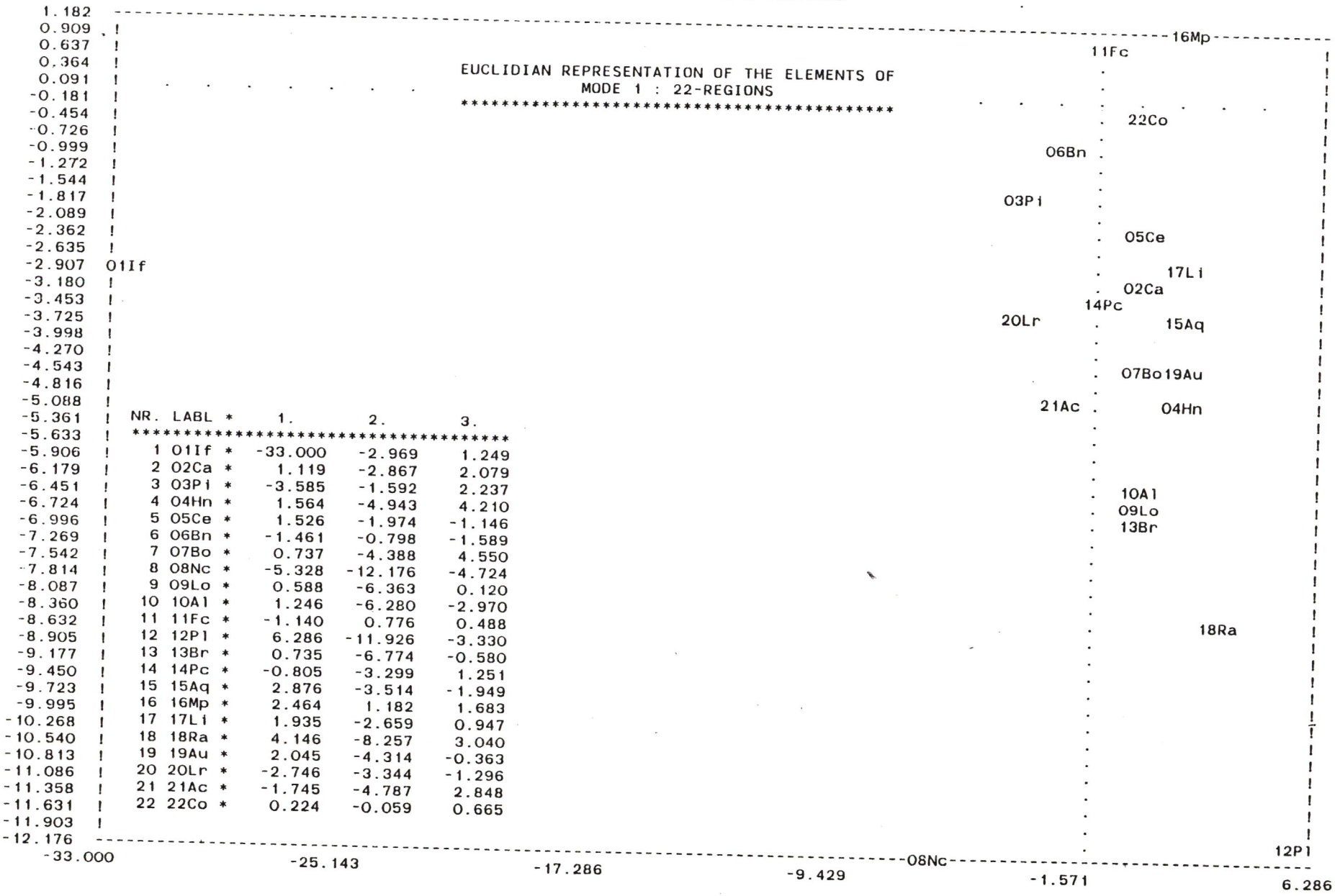
*	1.	2.	3.
1 *	0.167	-0.309	0.224
2 *	-0.578	-0.207	-0.215
3 *	-0.436	0.031	0.092

STANDARDIZED SQUARES
MODE 2
MODE 1

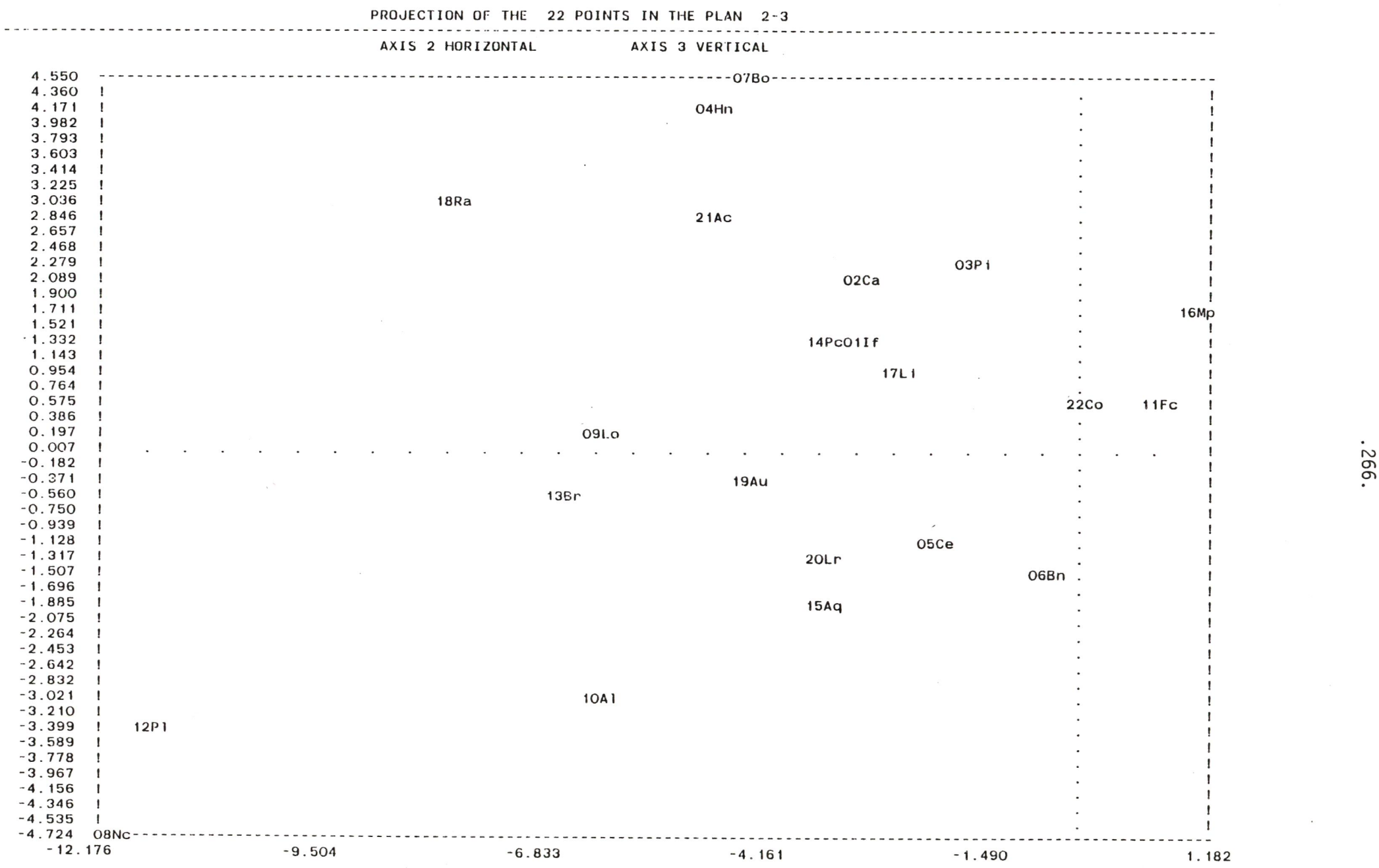
*	1.	2.	3.
1 *	0.000	0.000	0.000
2 *	0.000	0.000	0.000
3 *	0.000	0.000	0.000

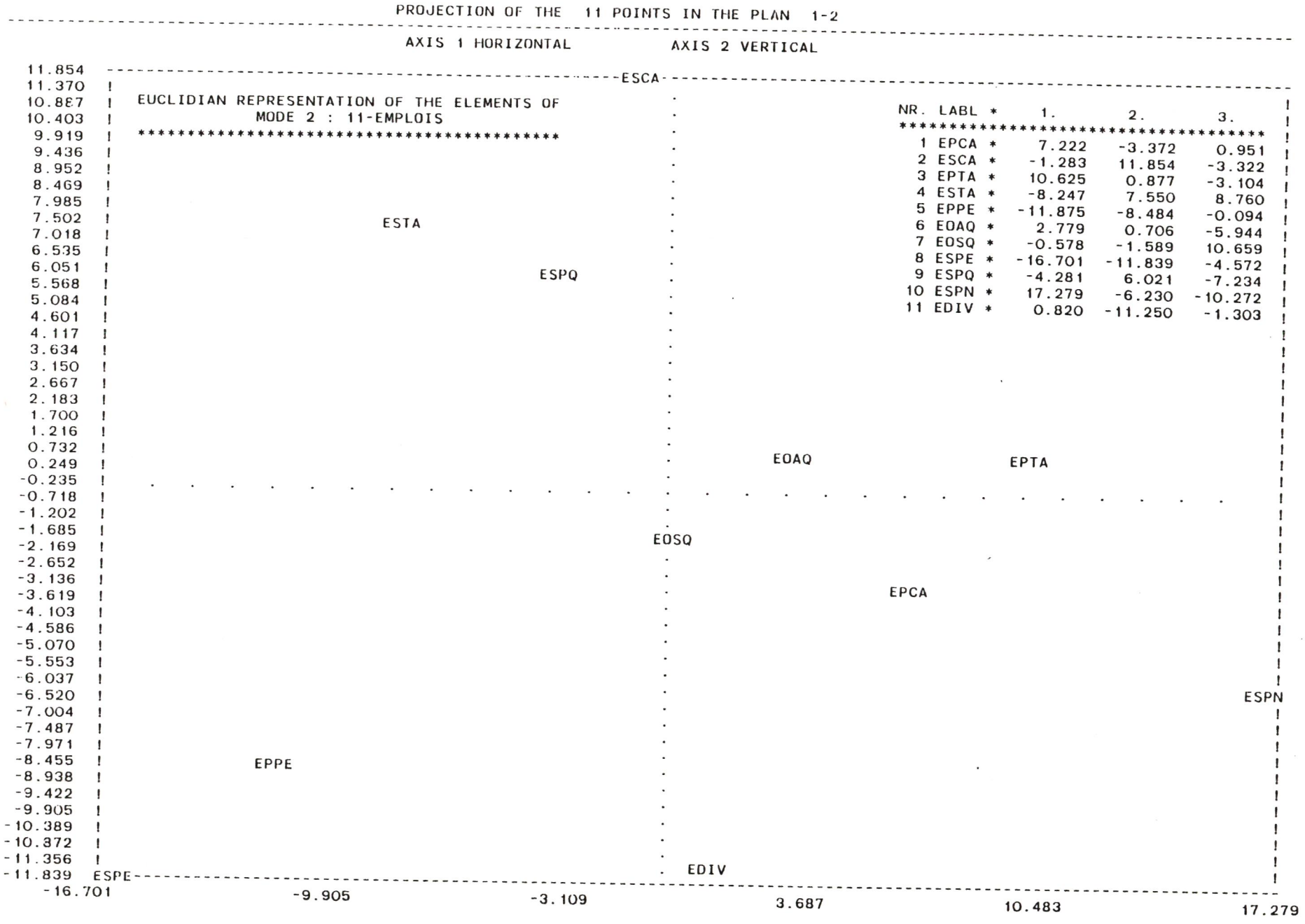
PROJECTION OF THE 22 POINTS IN THE PLAN 1-2

AXIS 1 HORIZONTAL AXIS 2 VERTICAL

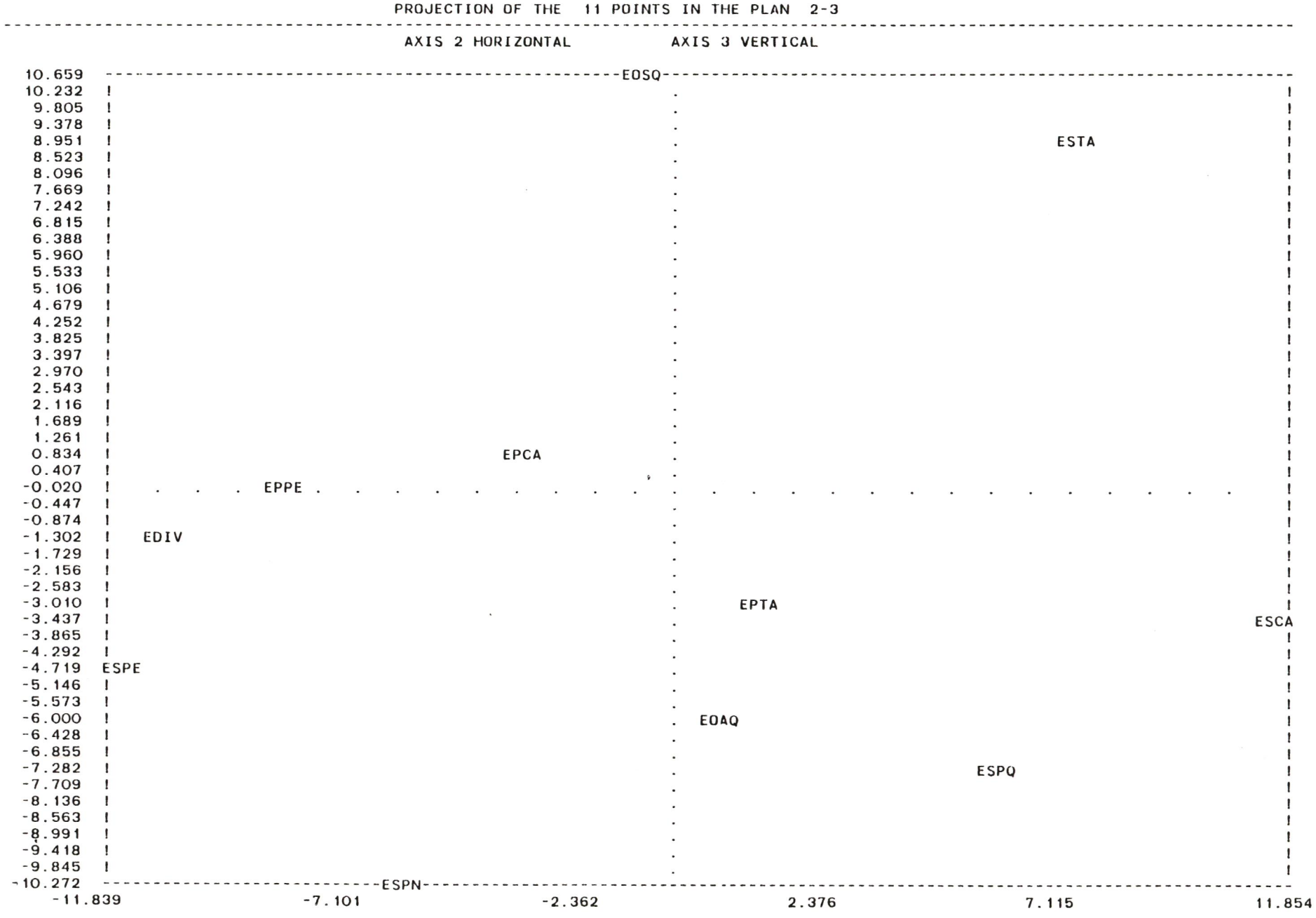


NR.	LABL	*	1.	2.	3.
1	01If	*	-33.000	-2.969	1.249
2	02Ca	*	1.119	-2.867	2.079
3	03Pi	*	-3.585	-1.592	2.237
4	04Hn	*	1.564	-4.943	4.210
5	05Ce	*	1.526	-1.974	-1.146
6	06Bn	*	-1.461	-0.798	-1.589
7	07Bo	*	0.737	-4.388	4.550
8	08Nc	*	-5.328	-12.176	-4.724
9	09Lo	*	0.588	-6.363	0.120
10	10Al	*	1.246	-6.280	-2.970
11	11Fc	*	-1.140	0.776	0.488
12	12Pl	*	6.286	-11.926	-3.330
13	13Br	*	0.735	-6.774	-0.580
14	14Pc	*	-0.805	-3.299	1.251
15	15Aq	*	2.876	-3.514	-1.949
16	16Mp	*	2.464	1.182	1.683
17	17Li	*	1.935	-2.659	0.947
18	18Ra	*	4.146	-8.257	3.040
19	19Au	*	2.045	-4.314	-0.363
20	20Lr	*	-2.746	-3.344	-1.296
21	21Ac	*	-1.745	-4.787	2.848
22	22Co	*	0.224	-0.059	0.665


PROJECTION OF THE 22 POINTS IN THE PLAN 2-3
AXIS 2 HORIZONTAL
AXIS 3 VERTICAL
4.550
4.360
4.171
3.982
3.793
3.603
3.414
3.225
3.036
2.846
2.657
2.468
2.279
2.089
1.900
1.711
1.521
1.332
1.143
0.954
0.764
0.575
0.386
0.197
0.007
-0.182
-0.371
-0.560
-0.750
-0.939
-1.128
-1.317
-1.507
-1.696
-1.885
-2.075
-2.264
-2.453
-2.642
-2.832
-3.021
-3.210
-3.399
-3.589
-3.778
-3.967
-4.156
-4.346
-4.535
-4.724
-12.176
-9.504
-6.833
-4.161
-1.490
1.182
07Bo
04Hn
18Ra
21Ac
03Pi
02Ca
16Mp
14Pc
01If
17Li
22Co
11Fc
09Lo
19Au
13Br
05Ce
20Lr
06Bn
15Aq
10Al
12Pl
08Nc



NR.	LABL	*	1.	2.	3.
1	EPCA	*	7.222	-3.372	0.951
2	ESCA	*	-1.283	11.854	-3.322
3	EPTA	*	10.625	0.877	-3.104
4	ESTA	*	-8.247	7.550	8.760
5	EPPE	*	-11.875	-8.484	-0.094
6	EOAQ	*	2.779	0.706	-5.944
7	EOSQ	*	-0.578	-1.589	10.659
8	ESPE	*	-16.701	-11.839	-4.572
9	ESPQ	*	-4.281	6.021	-7.234
10	ESPN	*	17.279	-6.230	-10.272
11	EDIV	*	0.820	-11.250	-1.303


PROJECTION OF THE 11 POINTS IN THE PLAN 2-3
AXIS 2 HORIZONTAL
AXIS 3 VERTICAL
EOSQ
ESTA
EPCA
EPPE
EDIV
EPTA
ESCA
ESPE
EOAQ
ESPQ
ESPN
10.659
10.232
9.805
9.378
8.951
8.523
8.096
7.669
7.242
6.815
6.388
5.960
5.533
5.106
4.679
4.252
3.825
3.397
2.970
2.543
2.116
1.689
1.261
0.834
0.407
-0.020
-0.447
-0.874
-1.302
-1.729
-2.156
-2.583
-3.010
-3.437
-3.865
-4.292
-4.719
-5.146
-5.573
-6.000
-6.428
-6.855
-7.282
-7.709
-8.136
-8.563
-8.991
-9.418
-9.845
-10.272
-11.839
-7.101
-2.362
2.376
7.115
11.854

ANNEXE B

LE PROGRAMME TUCKALSN : NOTICE D'UTILISATION

Le programme TUCKALSN réalise la n-ACP d'un hypercube de données et fournit les sorties graphiques et les aides à l'interprétation décrites au chapitre V. Ce programme, écrit en FORTRAN, est une généralisation du programme TUCKALS3 de Pieter M. Kroonenberg de l'Université de Leiden (décembre 1981). Bien que la structure générale de notre programme ainsi que les principales procédures soient neuves on a conservé certaines subroutines de TUCKALS3 et on a essayé de garder le type de sorties de ce programme.

TUCKALSN qui compte 3.000 lignes environ est composé de 60 sous programmes : 9 ont été repris directement de TUCKALS3, parmi eux, 3 soubroutines du paquet IBM-SSP ; 6 sont des sous programmes de TUCKALS3 légèrement modifiés, 6 proviennent du livre "Traitement des données statistiques" de Lebart, Morineau et Fénelon et les 39 soubroutines restantes ont été écrites par l'auteur.

Le programme TUCKALSN est disponible au Département d'Informatique et Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales de l'Université des Sciences Sociales de Grenoble.

TUCKALSN lit d'abord le n-hypercube de données de dimensions $\{p_i\}_{i\in n}$ ainsi que les dimensions $\{q_i\}_{i\in n}$ souhaitées pour l'hypercube central. Ensuite, il calcule ou bien il lit les matrices des métriques correspondant à chacun des n modes.

Le programme fait un changement de coordonnées de façon à transformer les matrices des métriques en matrices unité (ch. 3.6.3.2.1) et il calcule l'approximation de Tucker au Problème P3 que l'on prend comme point initial de l'algorithme itératif décrit en (3.6.3.2.2). Il édite cette approximation et trace les représentations graphiques correspondantes.

Une fois le critère de convergence satisfait il réalise la transformation inverse des coordonnées. Il édite alors le cube central et les matrices U_i dont ses colonnes M_i-orthonormées définissent les sous espaces optimaux $\bar{F}_i$.

Dans une deuxième partie TUCKALSN construit les représentations graphiques des éléments réels de chacun des modes grâce à leurs projections sur les espaces engendrés par les éléments idéaux (ch. 5.4). On y analyse la qualité avec laquelle l'hypercube projeté permet de reproduire la section correspondant à chaque élément réel des divers modes : le programme fournit les tableaux des contributions absolues et relatives (ch. 5.5). Finalement, il effectue si on le désire, les représentations graphiques relatives à l'ACP des n-représentations matricielles de l'hypercube des données. Ces représentations ne sont pas exactes car elles sont réalisées sur le cube des données projetté et non pas sur le cube original (ch. 5.7).

Le processus de transformation de coordonnées nécessaire à la réalisation de l'algorithme TUCKALSN implique l'exécution d'un produit matriciel de la forme (ch. III.61) :

$$(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i)\underline{x} \qquad (1)$$

où $A_i \in M_{\mathbb{R}}(p_i,q_i)$ et $\underline{x} \in M_{\mathbb{R}}(\prod_{i=1}^{n} p_i,1)$.

Si les matrices des métriques assignées à chacun des modes de l'hypercube des données sont diagonales les matrices A_i sont aussi diagonales. Dans ce cas le programme TUCKALSN est en mesure d'économiser de la place mémoire et surtout, du temps de calcul pour effectuer ce produit. Si les métriques ne sont pas diagonales les matrices A_i et $\bigotimes A_i$ ne le sont pas non plus ; dans ce cas le temps de calcul du produit (1) peut devenir considérable dès qu'on dépasse 3 dimensions.

Ainsi, si on a affaire à un 4-cube de données dont chaque mode compte m éléments, la réalisation d'un tel produit implique l'exécution de $(m^4)^2$ multiplications si les métriques ne sont pas diagonales, et de seulement m^4 multiplications si elles le sont. Si par exemple m=10 cette transformation de coordonnées demande 10.000 fois plus de temps de calcul quand les métriques ne sont pas diagonales. L'exécution de TUCKALSN risque alors de devenir coûteuse.

Notice d'utilisation

L'exécution du programme TUCKALSN requiert 4 fichiers :

1. Fichiers de commandes : contient les paramètres concernant les entrées et les sorties désirées.

2. Fichiers des données : contient les éléments du n-hypercube des données ordonnées selon un ordre σ-lexicographique (ch. 1.1.2).

3. Fichier des métriques : contient les matrices des métriques des modes. Ce fichier n'est pas nécessaire lorsque l'on choisit comme métriques les matrices unité ou bien quand les métriques sont générées par le programme : matrice diagonale des poids, matrice de variance-covariance.

4. Fichier des sorties : c'est le fichier où l'on édite toutes les sorties de TUCKALSN.

Le fichier des commandes

Le fichier des commandes est composé d'un nombre variable de cartes (lignes) selon les paramètres spécifiés.

Carte A

Colonnes 1-4 : mot clé .

Les mots clés possibles sont :

TITL : Indique le début d'une analyse (n-ACP)

SIZE : Si l'on veut calculer exclusivement l'espace en mémoire centrale nécessaire pour l'analyse.

. : Indique la fin de l'analyse.

Si mot clé = TITL alors :

colonnes 5-80 : Titre de l'analyse.

Carte B

N, ITYM, IVD, IVC, IOU

FORMAT(5I4)

N : nombre de modes du cube de données

ITYM : indicateur du type des métriques utilisées

0 toutes sont des métriques unité

1 toutes les métriques sont diagonales

2 il y a au moins une métrique non diagonale.

IVD : indicateur de l'ordre de stockage des données

0 ordre lexicographique

1 un ordre σ-lexicographique à définir dans la carte G.

IVC : indicateur de l'ordre avec lequel on veut éditer le cube central

0 ordre lexicographique

1 un ordre σ-lexicographique à définir dans la carte H.

IOU : indicateur de la sauvegarde des résultats

0 pas de sauvegarde

1 oui.

Carte C

(P(I),I=1,N)

FORMAT(16I5)

P(I) : nombre d'éléments du $i^{ème}$ mode du cube des données = = dimension de l'espace E_i.

Carte D

(Q(I), I=1,N)

FORMAT(16I5)

Q(I) : nombre d'éléments choisit pour le $i^{ème}$ mode du cube central = nombre d'éléments idéaux du $i^{ème}$ mode = = dimension du sous espace optimal $\bar{F}_i$ de E_i.

Carte E

Si ITYM = 0 pas de carte E, sinon :

(INDM(I), I=1,N)

FORMAT(16I5)

INDM(I):indicateur de la métrique assignée au $i^{ème}$ mode

0 métrique unité

1 métrique des poids

2 métrique diagonale à lire

3 matrice de variance-covariance.

Carte F

INP, INPMET, IDATPR, INCONF, IPR, IPRC, IEUPR

FORMAT(16I5)

INP : numéro logique du fichier de données

INPMET : numéro du fichier où on lira éventuellement les métriques

IDATPR : édition des données

0 non

1 oui

INCONF : éditions de la configuration initiale (approximation de Tucker).

0 non

1 oui

IPR : édition des étapes de la convergence de l'algorithme
0 non
1 oui

IPRC : édition du cube central
0 non
1 oui

IEUPR : nombre des bipartitions ordonnées pour lesquelles on demande la réalisation de l'ACP de la représentation matricielle correspondante ($0 \leq IEUPR \leq 5$).

Carte G

Si IVD = 0 pas de carte G ; sinon :
(IOD(I),I=1,N)
FORMAT(16I5)

Le fichier de données contient l'hypercube des données représenté selon un ordre σ-lexicographique. IOD définit la permutation σ : $\sigma(I) = IOD(I)$.

Carte H

Si IVC = 0 pas de carte H ; sinon :
(IOC(I),I=1,N)
FORMAT(16I5)

Le cube central sera édité selon l'ordre -lexicographique : IOC définit la permutation σ :
$\sigma(I) = IOC(I)$

Carte I

Si IEUPR = 0 pas de carte I ; sinon :
On remplit IEUPR cartes, chacune décrivant une bipartition ordonnée η . On demande la réalisation de l'ACP de toutes ces η-représentations matricielles du cube projeté :

IPART(I), I=1,N),N1,ICG
FORMAT (16I5)

Les entiers IPART(1),...,IPART(N1), dans l'ordre, constituent la première classe de la bipartition.
Les entiers IPART(N1+1),...,IPART(N), dans l'ordre, constituent la deuxième classe de la bipartition.
(il faut que $2N1 \leq N$).

ICG : indicateur pour les représentations graphiques
0 représentation des barycentres uniquement
1 représentation de tous les éléments appartenant aux produits cartésiens des modes inclus dans chacune des deux classes et de leurs barycentres.

Carte J

Si IOU = 0 pas de carte J ; sinon :
(IOUTC, IOUFRS, (IOUTE(I),I=1,N)
FORMAT (16I5)

IOUTC : numéro du fichier où on va sauvegarder le cube central
si IOUTC=0 pas de sauvegarde.

IOUFRS : numéro du fichier où on va sauvegarder la partie expliquée et le résidu de tous les éléments de tous les modes.
Si IOUFRS = 0 pas de sauvegarde.

IOUTE(I):numéro du fichier où on sauvegarde la matrice U_i
Si IOUTE(I) = 0 pas de sauvegarde de la matrice U_i.

Carte K

NIT, EPS1, EPS2
FORMAT(V) (format libre)

NIT : nombre maximal d'itérations pour l'algorithme principal.
Par défaut NIT=50

EPS1 : critère de convergence vers l'optimum de la fonction f
Par défaut EPS1 = 10^{-4}.

EPS2 : critère de convergence pour les matrices U_i
Par défaut EPS1 = 10^{-4}.

Carte L

Libellés pour les modes (12 caractères pour chacun des N libellés)
FORMAT (N(3A4))

Cartes M

Libellés pour les éléments (4 charactères pour chaque élément). On utilise une ou plusieurs cartes pour chaque mode.
FORMAT (10 A4)

Cartes N

3 cartes définissant le format de lecture des données et des métriques. Si IDATPR=1 il définit aussi le format d'édition des données.
FORMAT (60A4)

Carte 0

On écrit un '.' dans la première colonne pour signaler la fin du fichier des commandes.

Exemple 1

Le fichier TNRETA.comm a été utilisé pour effectuer la n-ACP d'un 4-cube de données qui ventile pendant 9 années consécutives la population économiquement active par région, catégorie socio-professionnelle et par la taille de l'établissement où l'on travaille.

TNRETA.comm

```
1   TITL ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE-ANNEE
2        4     1
3       22    11     4     9
4        2     2     2     2
5        1     1     1     1
6        8     0     0     1     1     1     3
7        1     4     2     3     2     1
8        1     3     2     4     2     1
9        1     2     3     4     2     1
10      30   0.1   0.1
11  22-REGIONS  11-EMPLOIS  4-TAILLES   9-ANNEES
12  01If 02Ca 03Pi 04Hn 05Ce 06Bn 07Bo 08Nc 09Lo 10Al
13  11Fc 12Pl 13Br 14Pc 15Aq 16Mp 17Li 18Ra 19Au 20Lr
14  21Ac 22Co
15  EPCA ESCA EPTA ESTA EPPE EOAQ EOSQ ESPE ESPQ ESPN
16  EDIV
17  TA01 TA02 TA03 TA04
18  an01 an02 an03 an04 an05 an06 an07 an08 an09
19  (22F8.3)
20
21
22  .
```

Commentaires

1. Titre de l'analyse : "Analyse Région-emplois-taille-année"

2. Il s'agit d'un 4-cube de données ; les métriques assignées aux modes sont toutes diagonales. Les données seront lues par ordre lexicographique et le cube central sera édité aussi par ordre lexicographique. Il n'y aura pas de sauvegarde des résultats intermédiaires.

3. Le premier mode est constitué par 22 régions, le second par 11 catégories socio-professionnelles, le troisième par 4 tailles des établissements et le quatrième par 9 années.

4. Pour chaque mode on demande 2 éléments idéaux (le 4-cube central aura deux éléments de chaque côté).

5. On assigne à chaque mode la métrique diagonale des poids. La métrique des poids est calculée par le programme TUCKALSN. Le fichier des métriques donc n'est pas pris en compte.

6. Les données seront lues sur le fichier dont le numéro logique est 8 ; on ne lit pas les métriques et on n'édite pas les données. Par contre on demande l'édition de la configuration initiale, ainsi que celle des étapes de la convergence et de l'hypercube central. On lira plus bas 3 bipartitions ordonnées.

Puisque IVD et IVC sont égales à zéro il n'y a pas de cartes H et I.

7. On définit la première bipartition n . La première classe est formée par 2 modes : les modes 1 et 4. La deuxième classe par les modes qui restent c'est-à-dire les modes 3 et 2.
On demande la représentation graphique de tous les points et des barycentres.

8.9. Même chose qu'en 6.

10.On fixe à 30 le nombre maximum des itérations et à 0.1 les deux critères de convergence.

11.Ce sont les libellés des 4 modes.

12., 13., 14. Libellés des 22 régions.

15., 16. Libellés des 11 catégories socio-professionnelles.

17.Libellés des 4 tailles des établissements .

18.Libellés des 9 années .

19.,21. Format avec lequel les données sont lues sur le fichier de numéro logique 8.

22.Fin du fichier de commandes.

Exemple 2

Pareil au précédent mais avec seulement 3 modes : régions, catégories socio-professionnelles et tailles des établissements.

TNRET.donn

```
1   TITL ANALYSE REGION-EMPLOIS-TAILLE
2        3     1
3       22    11     4
4        3     3     3
5        2     2     2
6        8     7     0     1     1     1     3
7        1     2     3     1     1
8        1     3     2     1     1
9        2     3     1     1     1
10      30   0.1   0.1
11  22-REGIONS  11-EMPLOIS  4-TAILLES
12  01If 02Ca 03Pi 04Hn 05Ce 06Bn 07Bo 08Nc 09Lo 10Al
13  11Fc 12Pl 13Br 14Pc 15Aq 16Mp 17Li 18Ra 19Au 20Lr
14  21Ac 22Co
15  EPCA ESCA EPTA ESTA EPPE EOAQ EOSQ ESPE ESPQ ESPN
16  EDIV
17  TAO1 TAO2 TAO3 TAO4
18  (22F8.3)
19
20
21  .
```

Commentaires

2. Les métriques sont toutes diagonales.

4. On demande 3 éléments idéaux pour chaque mode.

5. et 6. Les métriques diagonales seront lues dans le fichier de numéro logique 7.

7., 8. et 9. Les premières classes des bipartitions ordonnées sont constituées par un seul mode.

ANNEXE C1

$$\overset{2}{X} = \begin{matrix} 0.094189189 & -0.015417039 & 0.628562674 \\ -0.881095566 & -0.363836478 & -0.516020864 \\ 0.121659156 & 0.061294008 & 0.932854153 \\ -0.872377835 & -0.354776211 & -0.569489352 \\ -0.058073913 & 0.521733716 & 0.509501249 \\ -0.518300451 & -0.789621115 & 0.326478340 \\ -0.706969582 & 0.322596151 & 0.238500083 \\ -0.043583613 & -0.032569593 & 0.201195044 \\ -0.829735011 & -0.914372645 & -0.874317177 \end{matrix}$$

$$\| \overset{2}{X} \| = 8.2062459$$

$$\mathcal{U}_1 = \begin{matrix} 0.470802087 & 0.710517839 \\ -0.475809433 & -0.294697233 \\ 0.742933899 & -0.638997607 \end{matrix} \qquad \Lambda_1 = \begin{matrix} 4.254018962 & 1.568538025 \end{matrix}$$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{matrix} -0.539972693 & 0.707745612 \\ -0.498746619 & -0.705030702 \\ -0.677998006 & -0.045032053 \end{matrix} \qquad \Lambda_2 = \begin{matrix} 5.338654518 & 0.483902723 \end{matrix}$$

$$\mathcal{U}_3 = \begin{matrix} -0.576780841 & 0.252082698 \\ 0.488703575 & -0.655729741 \\ 0.654593520 & 0.711669043 \end{matrix} \qquad \Lambda_3 = \begin{matrix} 4.511408210 & 1.311149046 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_i) = 5.8225573$$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{matrix} 0.499819964 & 0.228724971 \\ -0.306480382 & 0.948805295 \\ 0.810092434 & 0.217837997 \end{matrix} \qquad \Delta_1 = \begin{matrix} 4.949437737 & 0.992808320 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}_2 = \begin{matrix} 0.728520684 & -0.428886097 \\ 0.484763142 & -0.228160035 \\ 0.484006532 & 0.874070764 \end{matrix} \qquad \Delta_2 = \begin{matrix} 4.714157224 & 1.228088990 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}_3 = \begin{matrix} 0.536550850 & 0.838599980 \\ -0.565618120 & 0.440181483 \\ -0.626250245 & 0.320921101 \end{matrix} \qquad \Delta_3 = \begin{matrix} 4.246346533 & 1.695899799 \end{matrix}$$

$$tr(\Delta_i) = 5.9422461$$

ANNEXE C2

$$
{}^{3}X = \begin{bmatrix}
0.061383935 & -0.004176698 & -0.474428941 & 0.050650373 \\
-0.281192198 & -0.670998842 & -0.807331152 & -0.000239598 \\
-0.593545355 & -0.876781121 & 0.848369949 & -0.264603365 \\
-0.000257202 & -0.118041784 & -0.061756130 & 0.030126726 \\
0.334560726 & -0.521103747 & 0.153135845 & -0.658543311 \\
0.052634558 & -0.204673786 & 0.639524147 & -0.508511953 \\
-0.172733394 & -0.559902526 & -0.562094815 & -0.746687077 \\
-0.895905368 & 0.263427023 & 0.402555134 & -0.362817496 \\
0.945171252 & -0.529306218 & 0.325143691 & 0.296982098 \\
-0.305212200 & 0.643599674 & -0.620930664 & 0.160598580 \\
-0.794238195 & -0.277722683 & 0.565103568 & 0.475422379 \\
0.774821319 & -0.555054300 & 0.369844161 & -0.206340866 \\
-0.321292888 & -0.052328148 & -0.165711451 & 0.636300839 \\
-0.711111337 & 0.549191482 & 0.868988685 & 0.877311386 \\
-0.677887484 & 0.743152387 & -0.877308950 & -0.632758282 \\
-0.360742979 & -0.136847833 & -0.345657751 & -0.028451092 \\
0.698134884 & 0.877627827 & 0.826586835 & -0.467478350 \\
0.424385790 & 0.333539974 & 0.321426451 & 0.706393689 \\
0.924618706 & 0.297107887 & -0.721657678 & 0.626344487 \\
0.786031745 & 0.465595149 & -0.499985840 & 0.519412346 \\
0.475432619 & -0.478228621 & 0.647785164 & 0.109051614
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathcal{U}_1 = \begin{bmatrix}
-0.181422610 & -0.272368327 & 0.801118784 & 0.213145128 & -0.219208123 & 0.300183687 \\
-0.318294991 & -0.296074633 & -0.374498904 & 0.600743078 & -0.283880718 & 0.255267970 \\
0.341304477 & 0.433476657 & 0.121622930 & -0.182335557 & -0.693739638 & 0.203675618 \\
0.287126724 & -0.390484538 & -0.008979814 & -0.370989081 & 0.344089709 & 0.636615984 \\
-0.578895800 & -0.304552864 & 0.033914381 & -0.611592717 & -0.261819191 & -0.263135679 \\
0.156785870 & -0.020876638 & 0.435484920 & 0.220047330 & 0.293234926 & -0.447273891 \\
0.554203480 & -0.636071444 & -0.110856673 & 0.018200749 & -0.342273477 & -0.358706050
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathcal{U}_2 = \begin{bmatrix}
0.749734528 & -0.436966598 \\
-0.297152188 & 0.029280314 \\
0.581615664 & 0.684792779 \\
-0.106404479 & 0.582461737
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathcal{U}_3 = \begin{bmatrix}
0.191875365 & 0.385556430 \\
-0.818613298 & -0.444372494 \\
0.541346572 & -0.808628038
\end{bmatrix}
$$

$$
\overset{\eta}{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}
-0.288981665 & 1.069239825 & -0.794511773 & 0.197703088 \\
-1.161220282 & -0.293824963 & -0.112402434 & -0.080180394 \\
1.147930443 & -0.156223916 & 0.282245643 & 0.321074121 \\
0.370898094 & -0.164443284 & -0.578776322 & -0.826646060 \\
-1.382343099 & 0.806505620 & 0.251023799 & -0.301478826 \\
0.477297019 & 0.291915491 & -0.501117818 & 0.163199855 \\
0.659677990 & -0.653492630 & -1.164868534 & -1.159970760
\end{bmatrix}
$$

$\eta = \{\{1\}, \{2,3\}\}$

$R =$

	1	2	3	4	5	6
1	0.276208937	0.289772473	-0.721798398	-0.008498484	-0.372610651	0.179814860
2	0.289772473	3.315002143	-1.834764108	0.256208874	-1.519329518	-1.016860664
3	-0.721798398	-1.834764108	2.478275746	-0.091928693	1.428558752	-0.076987236
4	-0.008498484	0.256208874	-0.091928693	0.184899468	0.015041208	0.202189557
5	-0.372610651	-1.519329518	1.428558752	0.015041208	1.010881573	0.409204241
6	0.179814860	-1.016860664	-0.076987236	0.202189557	0.409204241	1.210486919
7	-0.106023529	-0.580522135	0.797789864	0.348621871	0.689411238	0.869348012
8	0.254843485	-0.487339810	-0.510963023	-0.529347628	-0.403906155	-0.416609943
9	-0.644252479	-0.842950553	2.215126693	-0.158971230	0.967232823	-0.674077608
10	-0.118660184	0.703345232	-0.051818080	0.245953556	-0.056140918	-0.078795159
11	-0.310566012	-1.134631187	1.112339497	-0.382188514	0.509156600	-0.501954742
12	0.228692176	0.132165056	-0.340971936	-0.278337833	-0.377270840	-0.318382382

	7	8	9	10	11	12
1	-0.106023529	0.254843485	-0.644252479	-0.118660184	-0.310566012	0.228692176
2	-0.580522135	-0.487339810	-0.842950553	0.703345232	-1.134631187	0.132165056
3	0.797789864	-0.510963023	2.215126693	-0.051818080	1.112339497	-0.340971936
4	0.348621871	-0.529347628	-0.158971230	0.245953556	-0.382188514	-0.278337833
5	0.689411238	-0.403906155	0.967232823	-0.056140918	0.509156600	-0.377270840
6	0.869348012	-0.416609943	-0.674077608	-0.078795159	-0.501954742	-0.318382382
7	1.820535734	-1.402209938	0.763623804	0.233887389	-0.575835675	-0.333538573
8	-1.402209938	1.848715305	-0.464850768	-0.757231668	0.842850797	0.821618661
9	0.763623804	-0.464850768	2.680418104	-0.042117139	1.035627067	0.152716231
10	0.233887389	-0.757231668	-0.042117139	0.466622025	-0.419610102	-0.444435943
11	-0.575835675	0.842850797	1.035627067	-0.419610102	1.206979111	0.267417688
12	-0.333538573	0.821618661	0.152716231	-0.444435943	0.267417688	0.789167829

$R \in M_{\mathbb{R}}(12,12)$

$tr(R) =$ 17.288193

$A_1 =$

-0.204821164	0.310265999	-0.268621136	0.490235861	-0.529988691	0.027541226
-0.253290132	0.276112821	0.093183804	-0.578150116	-0.165748045	0.688357450
0.586841509	-0.324507162	-0.319764145	-0.384552229	-0.087543339	-0.051598124
0.218258101	0.381012455	-0.152315924	0.280087177	0.736761115	0.315492000
-0.450387724	0.245938396	-0.556526296	-0.392866794	0.233144430	-0.466683913
0.310622327	0.100670259	-0.628651448	0.089529871	-0.227319036	0.286917102
0.450041711	0.711618707	0.297969893	-0.191629970	-0.187426034	-0.350845613

$A_2 =$

0.665902644	-0.615121603	0.377001289
-0.287019167	-0.635006219	-0.179290500
0.653449863	0.208953148	-0.667813815
-0.217248542	-0.418008506	-0.616238311

$A_3 =$

0.300840225	0.631840773
-0.776434571	-0.272655219
0.553754896	-0.725559346

$C =$

-0.436732203	0.713832311	-0.513421178	-0.287693076
-1.111490116	-0.277728364	0.501139164	0.173545146
1.257648662	-0.096747724	0.345650576	1.325550243
0.273136571	-0.134275222	-0.826940514	0.379906688
-1.286237821	1.076202646	0.081482601	0.285993706
0.505326167	0.548915714	-0.421729971	1.099822134
0.621776260	-0.650973573	0.328342922	0.368049916

	1	2	3	4	5	6
1	0.41361408	0.096395255	-0.824065596	0.511460394	-0.380211223	0.075516418
2	0.096395255	2.659949780	-1.880057752	-0.689352259	-0.963084400	-0.715411320
3	-0.824065596	-1.880057752	2.737156391	-0.599579863	1.257861659	0.422760665
4	0.511460394	-0.689352259	-0.599579863	1.554083198	0.095773187	-0.484008893
5	-0.380211223	-0.963084400	1.257861659	0.095773187	1.122667864	0.097112899
6	0.075516418	-0.715411320	0.422760665	-0.484008893	0.097112899	1.392366037
7	-0.223469323	-1.018848196	1.103523925	-0.427387290	0.890392520	1.205266163
8	0.168290941	0.282334156	-0.452045836	0.017048759	-0.768360220	-0.279022083
9	-0.866260134	-0.999404684	2.163356841	-0.316418588	1.257663459	-0.566649474
10	0.238282602	-0.244079119	-0.357622202	0.942863129	-0.013038301	-0.645747446
11	-0.557793111	-0.553126760	1.446513757	-0.905801773	0.190610973	0.182517977
12	0.064464146	-0.099455821	0.038294146	-0.424956910	-0.588059314	0.426608037

$S =$

	7	8	9	10	11	12
1	-0.223469323	0.168290941	-0.866260134	0.238282602	-0.557793111	0.064464146
2	-1.018848196	0.282334156	-0.999404684	-0.244079119	-0.553126760	-0.099455821
3	1.103523925	-0.452045836	2.163356841	-0.357622202	1.446513757	0.038294146
4	-0.427387290	0.017048759	-0.316418588	0.942863129	-0.905801773	-0.424956910
5	0.890392520	-0.768360220	1.257663459	-0.013038301	0.190610973	-0.588059314
6	1.205266163	-0.279022083	-0.566649474	-0.645747446	0.182517977	0.426608037
7	1.671375468	-0.872767329	0.375689473	-0.611141995	0.190996468	-0.159206700
8	-0.872767329	0.770629309	-0.474997025	0.163904231	0.217879981	0.558502249
9	0.375689473	-0.474997025	2.444219083	0.024259483	1.059515864	-0.482461248
10	-0.611141995	0.163904231	0.024259483	0.685916759	-0.436145216	-0.265561286
11	0.190996468	0.217879981	1.059515864	-0.436145216	1.270163715	0.497392412
12	-0.159206700	0.558502249	-0.482461248	-0.265561286	0.497392412	0.753727391

$S \in M_{\mathbb{R}}(12,12)$

$tr(S) = 17.475869$

ANNEXE C3

$\overset{3}{X}$ =

0.0235473	0.4519635	-0.8121997	0.1682802	-0.0538043
-0.7761941	0.0502768	0.0356273	-0.9051218	0.8792263
0.5127500	0.3121134	0.8635376	-0.8412813	-0.7429281
-0.5128341	-0.8037065	0.0176538	-0.5338485	0.7918908
0.1430003	0.9610055	-0.1848415	-0.5247375	0.0747375
0.1831913	0.8007374	0.0415777	0.7597591	-0.1126993
-0.6712195	-0.6996304	-0.6905453	0.9177035	-0.2165066
-0.9193510	-0.8463715	0.9747311	-0.7109802	-0.3249161
-0.8140239	-0.3370153	-0.5510901	-0.6686592	-0.6989780
-0.5726916	-0.0529135	-0.9249534	0.1059036	-0.2100307
0.0971738	-0.6023143	-0.2656242	-0.7083468	0.2197779
0.1715735	-0.4095649	0.9631636	-0.0856004	-0.1347992
0.9482576	0.9220457	0.3540253	-0.5708013	0.3726989
0.6571407	-0.2807203	0.9027414	-0.8697857	-0.6125332
-0.2488935	0.3563878	0.1091219	0.7470762	-0.2575156
0.3668576	0.1033769	-0.4586047	0.8150577	0.8002993
0.6710398	0.9245654	-0.6801714	-0.2774432	0.0210298
0.7557198	-0.4140262	0.7797821	-0.1014343	-0.5445020
-0.0819793	0.0164480	0.4640592	0.2533611	0.3097527
0.3420027	-0.0669783	0.7688684	-0.8198921	-0.7509545
-0.1671459	-0.6410361	-0.1979582	0.6253895	0.6832084
-0.4571302	-0.7160170	-0.4270472	0.0622135	0.8170719
-0.6608251	-0.8442790	0.2470892	0.6479617	0.2731782
-0.8223432	-0.7980725	0.1352198	0.0992979	-0.0538189

$\overset{2}{X}$ =

0.0235473	-0.7761941	0.5127500	-0.5128341	0.1430003	0.1831913
0.4519635	0.0502768	0.3121134	-0.8037065	0.9610055	0.8007374
-0.8121997	0.0356273	0.8635376	0.0176538	-0.1848415	0.0415777
0.1682802	-0.9051218	-0.8412813	-0.5338485	-0.5247375	0.7597591
-0.0538043	0.8792263	-0.7429281	0.7918908	0.0747375	-0.1126993
-0.6712195	-0.9193510	-0.8140239	-0.5726916	0.0971738	0.1715735
-0.6996304	-0.8463715	-0.3370153	-0.0529135	-0.6023143	-0.4095649
-0.6905453	0.9747311	-0.5510901	-0.9249534	-0.2656242	0.9631636
0.9177035	-0.7109802	-0.6686592	0.1059036	-0.7083468	-0.0856004
-0.2165066	-0.3249161	-0.6989780	-0.2100307	0.2197779	-0.1347992
0.9482576	0.6571407	-0.2488935	0.3668576	0.6710398	0.7557198
0.9220457	-0.2807203	0.3563878	0.1033769	0.9245654	-0.4140262
0.3540253	0.9027414	0.1091219	-0.4586047	-0.6801714	0.7797821
-0.5708013	-0.8697857	0.7470762	0.8150577	-0.2774432	-0.1014343
0.3726989	-0.6125332	-0.2575156	0.8002993	0.0210298	-0.5445020
-0.0819793	0.3420027	-0.1671459	-0.4571302	-0.6608251	-0.8223432
0.0164480	-0.0669783	-0.6410361	-0.7160170	-0.8442790	-0.7980725
0.4640592	0.7688684	-0.1979582	-0.4270472	0.2470892	0.1352198
0.2533611	-0.8198921	0.6253895	0.0622135	0.6479617	0.0992979
0.3097527	-0.7509545	0.6832084	0.8170719	0.2731782	-0.0538189

$\overset{1}{X}$ =

0.0235473	-0.6712195	0.9482576	-0.0819793
0.4519635	-0.6996304	0.9220457	0.0164480
-0.8121997	-0.6905453	0.3540253	0.4640592
0.1682802	0.9177035	-0.5708013	0.2533611
-0.0538043	-0.2165066	0.3726989	0.3097527
-0.7761941	-0.9193510	0.6571407	0.3420027
0.0502768	-0.8463715	-0.2807203	-0.0669783
0.0356273	0.9747311	0.9027414	0.7688684
-0.9051218	-0.7109802	-0.8697857	-0.8198921
0.8792263	-0.3249161	-0.6125332	-0.7509545
0.5127500	-0.8140239	-0.2488935	-0.1671459
0.3121134	-0.3370153	0.3563878	-0.6410361
0.8635376	-0.5510901	0.1091219	-0.1979582
-0.8412813	-0.6686592	0.7470762	0.6253895
-0.7429281	-0.6989780	-0.2575156	0.6832084
-0.5128341	-0.5726916	0.3668576	-0.4571302
-0.8037065	-0.0529135	0.1033769	-0.7160170
0.0176538	-0.9249534	-0.4586047	-0.4270472
-0.5338485	0.1059036	0.8150577	0.0622135
0.7918908	-0.2100307	0.8002993	0.8170719
0.1430003	0.0971738	0.6710398	-0.6608251
0.9610055	-0.6023143	0.9245654	-0.8442790
-0.1848415	-0.2656242	-0.6801714	0.2470892
-0.5247375	-0.7083468	-0.2774432	0.6479617
0.0747375	0.2197779	0.0210298	0.2731782
0.1831913	0.1715735	0.7557198	-0.8223432
0.8007374	-0.4095649	-0.4140262	-0.7980725
0.0415777	0.9631636	0.7797821	0.1352198
0.7597591	-0.0856004	-0.1014343	0.0992979
-0.1126993	-0.1347992	-0.5445020	-0.0538189

$\| \hat{X} \| = \| \overset{2}{X} \| = \| \overset{3}{X} \| =$ 39.7127447

$$U_1^* = \begin{matrix} 0.3232085 & 0.7367441 & -0.2452749 \\ -0.5200505 & 0.6305777 & 0.4680873 \\ -0.5045474 & 0.0938422 & -0.8335921 \\ -0.6087000 & -0.2253297 & 0.1608062 \end{matrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{matrix} 12.0000541 & 11.6740588 & 10.6529078 \end{matrix}$$

$$tr(\Delta_1) = 34.3270211$$

$$U_2^* = \begin{matrix} -0.0089170 & -0.4448555 & 0.1778117 & 0.7090666 \\ 0.7384132 & -0.3488935 & -0.5655875 & -0.0690589 \\ -0.3516038 & -0.4277778 & -0.1058925 & -0.6316234 \\ -0.4477086 & -0.2520422 & -0.5436256 & 0.1969206 \\ -0.1248880 & -0.6084250 & 0.2814641 & -0.0196415 \\ 0.3391183 & -0.2523427 & 0.5123765 & -0.2331175 \end{matrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{matrix} 11.7921593 & 10.0577824 & 6.3190152 & 5.9393392 \end{matrix}$$

$$tr(\Delta_2) = 34.1082964$$

$$U_3^* = \begin{matrix} 0.5170815 & -0.3930949 & -0.2300005 \\ 0.3535194 & -0.6976558 & 0.1784825 \\ 0.4859806 & 0.4556112 & -0.4622383 \\ -0.5011387 & -0.3669471 & -0.7767043 \\ -0.3468914 & -0.1285341 & 0.3135442 \end{matrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{matrix} 14.8218187 & 12.1390748 & 5.9351424 \end{matrix}$$

$$tr(\Delta_3) = 32.8960361$$

$$U_1 = \begin{matrix} 0.3867112 & 0.7305645 & -0.3359054 \\ -0.5023544 & 0.3049942 & -0.6175078 \\ -0.3753397 & 0.5949205 & 0.7005767 \\ -0.6761765 & -0.1390096 & -0.1221495 \end{matrix}$$

$$\Lambda_1 = \begin{matrix} 10.8669689 & 8.9794573 & 7.8955425 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_1) = 27.7419689$$

$$U_2 = \begin{matrix} -0.2129920 & 0.3574242 & 0.7246992 & 0.1068371 \\ -0.8372771 & -0.1517492 & -0.1608132 & -0.4929208 \\ 0.0162038 & 0.5000045 & -0.6557795 & 0.1200988 \\ 0.2321431 & 0.4113828 & 0.0018471 & -0.5210496 \\ -0.2111918 & 0.6544153 & 0.0741228 & 0.0201756 \\ -0.3935053 & 0.0414788 & -0.1157835 & 0.6777105 \end{matrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{matrix} 9.9969447 & 8.1050017 & 5.1696433 & 4.4703612 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_2) = 27.7419510$$

$$(\Lambda_2)^2 = \begin{matrix} 99.9389029 & 65.6910524 & 26.7252116 & 19.9841297 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_2^2) = 212.3392963$$

$$U_3 = \begin{matrix} -0.3053115 & 0.5885822 & -0.1789856 \\ -0.0812283 & 0.7588744 & 0.2350292 \\ -0.6403198 & -0.2035510 & -0.3479955 \\ 0.5580199 & 0.1900254 & -0.7830876 \\ 0.4228372 & 0.0117474 & 0.4223724 \end{matrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{matrix} 12.7102191 & 10.5814037 & 4.4503034 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_3) = 27.7419262$$

$$A_1 = \overline{U}_1 = \begin{matrix} 0.1355336 & 0.8073187 & 0.2322578 \\ -0.6454744 & 0.2708002 & 0.5265484 \\ -0.4557917 & 0.3584041 & -0.8113260 \\ -0.5977017 & -0.3826882 & 0.1027284 \end{matrix}$$

$$\overline{\Lambda}_1 = \begin{matrix} 11.2105616 & 9.6242839 & 8.4662796 \end{matrix}$$

$$tr(\overline{\Lambda}_1) \quad 29.3011253$$

$$\overline{U}_2 = \begin{matrix} 0.2407335 & 0.3390596 & -0.7246906 & 0.0101633 & -0.3095015 \\ 0.8114854 & -0.1393167 & 0.2132639 & -0.5251686 & -0.0272967 \\ -0.0139541 & 0.5173670 & 0.6406787 & 0.1171858 & -0.1620294 \\ -0.2414098 & 0.4259338 & 0.0220508 & -0.4562195 & -0.5382984 \\ 0.2124311 & 0.6453171 & -0.1028151 & 0.0771582 & 0.6484751 \\ 0.4241915 & 0.0103468 & 0.0884064 & 0.7044661 & -0.4085644 \end{matrix}$$

$$\overline{\Lambda}_2 = \begin{matrix} 9.9382983 & 8.5156937 & 5.0379341 & 4.1247362 & 1.6844436 \end{matrix}$$

$$tr(\overline{\Lambda}_2) = 29.3011060$$

$$(\Lambda_2)^2 = \begin{matrix} 98.7697744 & 72.5170383 & 25.3807797 & 17.0134487 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_2^2) = 213.6810417$$

$$A_3 = \overline{U}_3 = \begin{matrix} 0.4231052 & -0.5206485 & 0.2825616 \\ 0.2088987 & -0.7353353 & -0.1918796 \\ 0.5876584 & 0.3481405 & 0.4524839 \\ -0.5405409 & -0.2263312 & 0.7930690 \\ -0.3739203 & -0.1256168 & -0.2228026 \end{matrix}$$

$$\overline{\Lambda}_3 = \begin{matrix} 13.2075735 & 11.0498576 & 5.0436526 \end{matrix}$$

$$tr(\overline{\Lambda}_3) = 29.3010838$$

$$A_2 = \begin{matrix} 0.241 & 0.339 & -0.725 & 0.010 \\ 0.811 & -0.139 & 0.213 & -0.525 \\ -0.014 & 0.517 & 0.641 & 0.117 \\ -0.241 & 0.426 & 0.022 & -0.456 \\ 0.212 & 0.645 & -0.103 & 0.077 \\ 0.424 & 0.010 & 0.088 & 0.704 \end{matrix}$$

$\overset{2}{\mathcal{C}} =$

0.126	0.496	-0.254	1.116
-0.242	0.751	0.081	0.855
0.397	0.090	-0.930	0.314
0.464	-0.885	0.877	0.817
-0.393	0.003	0.570	-0.568
0.494	-0.890	0.013	0.450
0.957	-0.731	0.073	0.212
-0.887	-0.459	-0.515	0.208
0.715	0.034	1.034	0.625
0.435	0.485	0.192	-0.340
-0.761	0.700	0.400	0.170
-0.345	1.118	0.832	-0.087
-1.253	-0.666	-0.232	0.403
1.083	0.460	-0.809	0.064
0.858	0.282	0.241	-0.335
0.153	-0.848	0.238	-0.351
0.796	-0.823	0.142	-0.403
-1.112	-0.505	0.175	0.021
0.411	0.665	0.063	-0.050
0.712	0.401	-0.180	0.055

$$\overset{2}{\mathcal{C}} = (U_1^t U_1 \otimes U_3^t U_3) \overset{2}{\times} U_2$$

$\overline{C} =$

-0.130	0.399	0.196	1.147
0.239	0.713	-0.143	0.823
-0.455	-0.027	0.864	0.410
-0.320	-1.038	-0.842	0.591
0.229	-0.085	-0.502	-0.314
-0.493	-0.958	-0.061	0.559
-0.983	-0.613	-0.112	0.237
0.940	-0.597	0.509	0.330
-0.668	-0.128	-1.139	0.599
-0.450	0.409	-0.307	-0.203
0.832	0.724	-0.431	0.129
0.323	1.098	-0.834	-0.112
1.299	-0.672	0.297	0.340
-1.092	0.506	0.682	0.113
-0.809	0.279	-0.065	-0.181
-0.153	-0.885	-0.236	-0.466
-0.825	-0.843	-0.060	-0.470
1.133	-0.464	-0.269	-0.045
-0.337	0.750	-0.077	-0.020
-0.571	0.377	0.160	0.077

$$\overline{C} = (A_1^t A_1 \otimes A_3^t A_3) \overset{2}{\times} A_2$$

$$\| \overset{2}{X}{}^t \overset{2}{X} - \overset{2}{\mathcal{C}}{}^t \overset{2}{\mathcal{C}} \| = 118.86972$$

$$\| \overset{2}{X}{}^t \overset{2}{X} - \overline{C}^t \overline{C} \| = 117.52789$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.183	0.828	0.368	0.613	-1.481	0.619	0.334	-0.443	0.059	0.003
2	0.828	2.515	-0.254	0.301	-0.867	0.087	-1.328	0.824	-0.664	-0.060
3	0.368	-0.254	1.443	-0.776	-0.571	-0.211	0.340	0.193	-1.219	-0.489
4	0.613	0.301	-0.776	2.693	-0.727	1.789	0.965	0.830	1.611	0.740
5	-1.481	-0.867	-0.571	-0.727	1.973	-0.633	-0.497	0.443	-0.137	0.111
6	0.619	0.087	-0.211	1.789	-0.633	2.325	1.424	0.685	0.438	1.132
7	0.334	-1.328	0.340	0.965	-0.497	1.424	1.853	-0.342	0.641	0.596
8	-0.443	0.824	0.193	0.830	0.443	0.685	-0.342	3.584	-0.950	0.294
9	0.059	-0.664	-1.219	1.611	-0.137	0.438	0.641	-0.950	2.315	0.333
10	0.003	-0.060	-0.489	0.740	0.111	1.132	0.596	0.224	0.333	0.752
11	-0.569	1.339	-1.048	-0.200	0.967	-1.053	-1.869	0.333	0.068	-0.276
12	0.426	0.988	-0.637	-0.745	-0.364	-0.691	-0.920	-1.847	0.199	-0.120
13	-0.356	0.579	-0.011	0.345	0.192	-0.826	-0.934	1.931	-0.023	-0.605
14	0.568	-1.071	1.139	-0.304	-0.653	0.063	1.049	-1.643	-0.113	-0.334
15	-0.155	-1.002	-0.559	-0.018	0.329	-0.027	0.512	-1.983	1.066	0.208
16	-0.384	-0.998	0.014	-0.217	0.111	-0.067	0.583	0.288	0.283	0.085
17	-0.176	-1.071	-0.459	0.822	-0.124	0.763	1.134	0.394	1.082	0.539
18	-0.408	0.876	-0.568	-0.250	0.463	-0.565	-1.090	0.998	-0.220	-0.086
19	1.042	0.921	0.191	-0.039	-1.113	0.119	-0.128	-1.453	-0.064	-0.110
20	0.551	-0.122	0.273	-0.463	-0.511	-0.524	0.003	-2.203	0.259	-0.405

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-0.569	0.426	-0.356	0.568	-0.155	-0.384	-0.176	-0.408	1.042	0.551
2	1.339	0.988	0.579	-1.071	-1.002	-0.998	-1.071	0.876	0.921	-0.122
3	-1.048	-0.637	-0.011	1.139	-0.559	0.014	-0.459	-0.568	0.191	0.273
4	-0.200	-0.745	0.345	-0.304	-0.018	-0.217	-0.124	-0.250	-0.039	-0.483
5	0.967	-0.364	0.192	-0.653	0.329	0.111	-0.124	0.463	-1.113	-0.511
6	-1.053	-0.691	-0.826	0.063	-0.027	-0.067	0.763	-0.565	0.119	-0.524
7	-1.869	-0.920	-0.934	1.049	0.512	0.583	1.134	-1.090	-0.128	0.003
8	0.333	-1.847	1.931	-1.643	-1.983	0.288	0.394	0.998	-1.453	-2.203
9	0.068	0.199	-0.023	-0.113	1.066	0.283	1.082	-0.220	-0.064	0.259
10	-0.278	-0.120	-0.605	-0.334	0.208	0.085	0.539	-0.086	-0.110	-0.405
11	2.549	0.947	0.666	-1.283	-0.089	-1.044	-1.301	1.106	0.078	0.073
12	0.947	2.093	-0.887	-0.146	0.751	-0.549	-0.719	0.270	1.251	1.099
13	0.866	-0.887	2.233	-1.170	-1.255	0.279	0.186	0.970	-0.974	-1.096
14	-1.283	-0.146	-1.170	2.392	0.829	-0.481	-0.698	-1.512	0.897	1.582
15	-0.089	0.751	-1.255	0.829	1.518	-0.129	0.056	-0.657	0.445	1.088
16	-1.044	-0.549	0.279	-0.481	-0.129	1.474	1.624	0.179	-0.944	-0.906
17	-1.301	-0.719	0.156	-0.698	0.056	1.624	2.278	0.072	-1.013	-1.155
18	1.106	0.270	0.970	-1.512	-0.657	0.179	0.072	1.107	-0.490	-0.858
19	0.078	1.251	-0.974	0.897	0.445	-0.944	-1.013	-0.490	1.561	1.344
20	0.073	1.099	-1.096	1.582	1.088	-0.906	-1.155	-0.858	1.344	1.872

$X^t X \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(20,20)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.572	1.276	0.682	0.308	-0.827	0.120	-0.024	0.024	0.542	-0.133
2	1.276	1.360	0.164	-0.007	-0.343	-0.402	-0.593	0.006	0.472	-0.016
3	0.682	0.164	1.130	-0.454	-0.864	0.246	0.313	0.151	-0.478	-0.070
4	0.308	-0.007	-0.454	2.435	-0.150	0.802	1.397	-0.287	1.718	-0.337
5	-0.827	-0.343	-0.864	-0.150	0.802	-0.445	-0.457	-0.064	-0.047	0.133
6	0.120	-0.402	0.246	1.397	-0.445	1.240	1.220	0.058	0.617	-0.268
7	-0.024	-0.593	0.313	1.329	-0.457	1.220	1.501	-0.507	0.867	0.004
8	0.024	0.006	0.151	-0.287	-0.064	0.058	-0.507	1.307	-1.052	-0.779
9	0.542	0.472	-0.478	1.718	-0.047	0.617	0.867	-1.052	1.972	0.314
10	-0.133	-0.016	-0.070	-0.337	0.133	-0.268	0.004	-0.779	0.314	0.578
11	0.339	0.887	-0.559	-0.483	0.433	-0.918	-1.175	0.183	-0.000	0.028
12	0.202	0.916	-0.838	-0.491	0.662	-1.194	-1.104	-0.654	0.598	0.582
13	0.021	0.129	-0.214	0.134	0.129	0.153	-0.644	1.621	-0.906	-1.050
14	0.642	0.072	1.244	-0.562	-0.922	0.144	0.655	-0.742	-0.007	0.517
15	-0.187	-0.262	0.037	0.086	-0.009	0.025	0.562	-1.084	0.862	0.670
16	-0.853	-0.954	-0.347	0.745	0.273	0.676	0.710	0.058	0.108	-0.180
17	-0.794	-1.144	-0.017	0.894	-0.005	0.947	1.289	-0.485	0.435	0.111
18	-0.412	-0.079	-0.643	0.101	0.524	-0.088	-0.679	1.133	-0.619	-0.703
19	0.309	0.362	0.148	-0.384	-0.095	-0.411	-0.099	-0.713	0.350	0.531
20	0.398	0.162	0.504	-0.137	-0.413	0.017	0.387	-0.712	0.371	0.451

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.339	0.202	0.021	0.642	-0.187	-0.853	-0.794	-0.412	0.309	0.398
2	0.887	0.916	0.129	0.072	-0.262	-0.954	-1.144	-0.079	0.362	0.162
3	-0.559	-0.838	-0.214	1.244	0.037	-0.347	-0.017	-0.643	0.148	0.504
4	-0.483	-0.491	0.134	-0.562	0.086	0.745	0.894	0.101	-0.384	-0.137
5	0.433	0.662	0.129	-0.922	-0.009	0.273	-0.005	0.524	-0.095	-0.413
6	-0.918	-1.194	0.153	0.144	0.025	0.676	0.947	-0.088	0.411	0.017
7	-1.175	-1.104	-0.644	0.555	0.562	0.710	1.289	-0.679	-0.099	0.387
8	0.183	-0.654	1.621	-0.742	-1.084	0.058	-0.485	1.133	-0.713	-0.712
9	-0.000	0.598	-0.906	-0.007	0.662	-0.108	0.435	-0.619	0.350	0.371
10	0.028	0.582	-1.050	0.517	0.670	-0.180	0.111	-0.703	0.531	0.451
11	1.258	1.363	0.463	-0.816	-0.416	-0.674	-1.193	0.567	0.169	-0.324
12	1.363	2.068	-0.540	-0.538	0.249	-0.772	-1.041	-0.037	0.658	0.047
13	0.463	-0.540	2.229	-1.450	-1.453	0.176	-0.644	1.698	-0.992	-1.095
14	-0.816	-0.538	-1.450	2.044	0.842	-0.440	0.343	-1.577	0.696	1.106
15	-0.416	0.249	-1.453	0.842	0.985	0.067	0.619	-1.061	0.572	0.662
16	-0.674	-0.772	0.176	-0.440	0.067	0.923	0.996	0.293	-0.468	-0.294
17	-1.193	-1.041	-0.644	0.343	0.619	0.996	1.494	-0.453	-0.191	0.189
18	0.567	-0.037	1.698	-1.577	-1.061	0.293	-0.453	1.524	-0.783	-1.025
19	0.169	0.658	-0.992	0.696	0.572	-0.468	-0.191	-0.783	0.617	0.545
20	-0.324	0.047	-1.095	1.106	0.662	-0.294	0.189	-1.025	0.545	0.704

$\tilde{\mathcal{C}}^t \tilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(20,20)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.530	1.169	0.688	0.140	-0.522	0.312	0.133	0.118	0.500	-0.072
2	1.169	1.263	0.086	-0.210	-0.192	-0.331	-0.461	-0.001	0.405	0.060
3	0.688	0.086	1.123	-0.312	-0.665	0.427	0.464	0.164	-0.431	-0.155
4	0.140	-0.210	-0.312	2.239	0.252	1.534	1.185	0.085	1.660	-0.142
5	-0.522	-0.192	-0.665	0.252	0.410	-0.177	-0.192	-0.093	0.241	0.080
6	0.312	-0.331	0.427	1.534	-0.177	1.477	1.211	0.262	0.857	-0.264
7	0.133	-0.461	0.464	1.185	-0.192	1.211	1.410	-0.537	1.005	0.178
8	0.118	-0.001	0.164	0.085	-0.093	0.262	-0.537	1.609	-0.934	-0.890
9	0.500	0.405	-0.431	1.660	0.241	0.857	1.005	-0.934	2.120	0.478
10	-0.072	0.060	-0.155	-0.142	0.080	-0.264	0.178	-0.890	0.478	0.505
11	0.245	0.883	-0.717	-0.579	0.305	-1.005	-1.182	0.173	-0.080	0.027
12	0.104	0.887	-0.944	-0.607	0.435	-1.222	-0.923	-0.813	0.527	0.582
13	0.011	0.069	-0.177	0.233	0.100	0.175	-0.818	1.887	-0.917	-1.020
14	0.606	0.094	1.119	-0.684	-0.671	0.075	0.713	-0.945	-0.045	0.466
15	-0.004	-0.135	0.230	-0.083	-0.120	0.034	0.589	-1.021	0.471	0.535
16	-0.914	-1.017	-0.302	0.892	0.305	0.677	0.609	0.110	0.206	-0.125
17	-0.780	-1.177	0.154	0.912	0.060	0.955	1.223	-0.458	0.445	0.140
18	-0.437	-0.058	-0.754	0.319	0.449	-0.123	-0.810	1.190	-0.418	-0.608
19	0.305	0.448	0.058	-0.618	-0.096	-0.559	-0.124	-0.811	0.206	0.486
20	0.344	0.172	0.420	-0.298	-0.288	-0.046	0.331	-0.655	0.197	0.346

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.245	0.104	0.011	0.606	-0.004	-0.914	-0.780	-0.437	0.305	0.344
2	0.883	0.887	0.069	0.094	-0.135	-1.017	-1.177	-0.058	0.448	0.172
3	-0.717	-0.944	-0.177	1.119	0.230	-0.302	0.154	-0.754	0.058	0.420
4	-0.579	-0.607	0.233	-0.684	-0.083	0.892	0.912	0.319	-0.618	-0.298
5	0.305	0.435	0.100	-0.671	-0.120	0.305	0.060	0.449	-0.096	-0.288
6	-1.005	-1.222	0.175	0.075	0.034	0.677	0.955	-0.123	-0.559	-0.046
7	-1.182	-0.923	-0.818	0.713	0.589	0.609	1.223	-0.810	-0.124	0.331
8	0.173	-0.813	1.887	-0.945	-1.021	0.110	-0.458	1.190	-0.811	-0.655
9	-0.080	0.527	-0.917	-0.045	0.471	0.206	0.445	-0.418	0.206	0.197
10	0.027	0.582	-1.020	0.466	0.535	-0.125	0.140	-0.608	0.486	0.346
11	1.418	1.409	0.509	-0.821	-0.466	-0.726	-1.332	0.716	0.294	-0.262
12	1.409	2.019	-0.604	-0.379	0.120	-0.772	-1.090	0.086	0.782	0.086
13	0.509	-0.604	2.344	-1.519	-1.321	0.167	-0.682	1.689	-0.973	-0.922
14	-0.821	-0.379	-1.519	1.927	0.960	-0.494	0.381	-1.661	0.693	0.932
15	-0.466	0.120	-1.321	0.960	0.770	-0.023	0.521	-1.021	0.491	0.543
16	-0.726	-0.772	0.167	-0.494	-0.023	1.080	1.106	0.322	-0.585	-0.319
17	-1.332	-1.090	-0.682	0.381	0.521	1.106	1.616	-0.506	-0.340	0.108
18	0.716	0.086	1.689	-1.661	-1.021	0.322	-0.506	1.573	-0.709	-0.869
19	0.294	0.782	-0.973	0.693	0.491	-0.585	-0.340	-0.709	0.683	0.461
20	-0.262	0.086	-0.922	0.932	0.543	-0.319	0.108	-0.869	0.461	0.500

$\tilde{\mathcal{C}}^t \tilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(20,20)$

$$R = \begin{matrix} 0.4166353 & 0.1868953 & 0.1444963 & -0.7631587 & -0.0414113 & -0.4318331 \\ 0.0016292 & -0.1889359 & 0.5711082 & -0.0122939 & -0.7715533 & 0.2066164 \\ 0.5304173 & 0.4793955 & -0.2122853 & -0.0008985 & -0.0968976 & 0.6590769 \\ 0.6387801 & -0.6230880 & -0.3089869 & 0.2455962 & -0.1265413 & -0.1786569 \\ -0.3056281 & 0.1506088 & -0.6938224 & -0.1300732 & -0.5958452 & -0.1748383 \\ -0.2088572 & -0.5372445 & -0.1761498 & -0.5832670 & 0.1501907 & 0.5234125 \end{matrix}$$

$$\Lambda_R = \begin{matrix} 4.0328739 & 3.1013704 & 2.3280613 & 1.1944427 & 0.6991056 & 0.6143414 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_R) = 11.9707954$$

$$(\Lambda_R)^2 = \begin{matrix} 16.2640717 & 9.6184981 & 5.4198696 & 1.4266934 & 0.4887486 & 0.3781529 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_R^2) = 33.5960340$$

$$\bar{R} = \begin{matrix} 0.3735226 & 0.3401119 & -0.1331377 & -0.5862735 & 0.6061488 & -0.1262782 \\ 0.0153760 & -0.3093607 & -0.6671655 & 0.2132318 & 0.3377962 & 0.5471523 \\ 0.3490334 & 0.6274826 & 0.1618066 & 0.1835041 & -0.2268847 & 0.6108268 \\ 0.7709259 & -0.4815494 & 0.3113710 & 0.2518252 & 0.0926015 & -0.0695745 \\ -0.3730625 & -0.0043780 & 0.5827366 & 0.2407702 & 0.6409322 & 0.2290390 \\ -0.0701269 & -0.4037034 & 0.2728542 & -0.6750968 & -0.2182466 & 0.5042511 \end{matrix}$$

$$\Lambda_{\bar{R}} = \begin{matrix} 3.8132295 & 3.1888222 & 2.1810714 & 1.3551668 & 0.8313238 & 0.7264656 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_{\bar{R}}) = 12.0960793$$

$$\Lambda_{\bar{R}}^2 \quad \begin{matrix} 14.5407190 & 10.1685873 & 4.7570723 & 1.8364771 & 0.6910993 & 0.5277523 \end{matrix}$$

$$tr(\Lambda_{\bar{R}}^2) = 32.5217075$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] CAILLEZ F. et PAGES J.P.,
Introduction à l'analyse des données
SMASH 1976.

[2] CAILLEZ F.
Analyse des données.
Les Presses de l'Université de Montréal. 1984

[3] GLACON F.
Analyse conjointe de plusieurs matrices de données
Thèse 3ème Cycle, Grenoble 1981

[4] LASTOVICKA J.L.
The extension of component analysis to four-mode matrices.
Psychometrika 46, pp. 47-57, 1981.

[5] LEBART L., MORINEAU A. et FENELON J.P.
Traitement des données statistiques.
DUNOD, 1979.

[6] MIZERE D.
Analyse d'un cube de données : décomposition tensorielle et liens entre procédures de comparaison de tableaux rectangulaires de données.
Thèse 3ème Cycle. Grenoble, 1981.

[7] KAPTEYN A., NEUDECKER H. et WANSBEEK T.
n-Mode Component Analysis
Forschbunsbericht 84-24-SE Fachbereich Paedagogick. Hochschule des Bundeswerhr. Muenchen 1984.

[8] KROONENBERG P.M. et DE LEEUW J.
Principal Component Analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms.
Psychometrika 45, pp. 69-97, 1980.

[9] KROONENBERG P.M.
Three mode principal component analysis.
DSWO Press, Leiden 1983.

[10] OKAMOTO M et KANAZAWA M.
Minimization of eigenvalues of a matrix and optimality of principal components.
The Annals of Mathematical Statistics 39, pp. 859-863. 1968.

[11] OKAMOTO M.
Optimality of Principal Components. Multivariate Analysis -II.
ed. P.R. Krishnaiah, New York : Academic Press. pp. 673-685, 1969.

[12] RAO R.C.
The use and interpretation of principal component analysis in applied research.
Sankhya A26, pp. 329-358, 1964.

[13] SIBSON R.
Studies in the robustness of multidimensional scaling : Procrustes statistics.
J.R. Statis. Soc. B, 40, n° 2, pp. 234-238. 1978.

[14] SWAMINATHAN H. et Mc DONALD R.P.
A simple matrix calculus with applications to multivariate analysis.
General Systems, XVIII, pp. 37-54, 1973.

[15] TAKEVCHI K, YANAI H. et MUKHERJEE B.N.
The foundations of multivariate analysis.
Wiley Eastern Limited. New Delhi 1982.

[16] TUCKER L.R.
Some mathematical notes on three-mode factor analysis.
Psychometrika 31 n° 3, pp. 279-311. 1966.

[17] BASTIN Ch. BENZECRI J.P., BOURGARIT Ch., CAZES P.
Pratique de l'Analyse des données.
Dunod 1980.